海南中学2023届高三年级数学第七次月考试题

（满分：150分；　　考试时间：120分钟）

一、单项选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求）

1．设集合 $A=\{x|e^x>1\}$，$B=\{-1,0,1,2,3\}$，则集合 $A\cap B$ 的真子集个数为（　　　　）

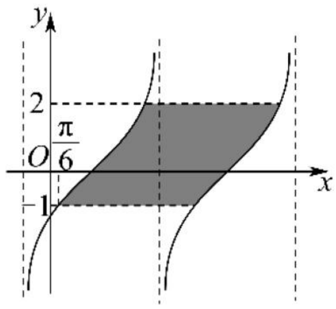
A．0　　　　B．7　　　　C．8　　　　D．15

2．已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=5$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的余弦值为 $\frac{1}{5}$，

则 $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=($　　$)$

A．-28　　　　B．-18　　　　C．12　　　　D．72

3．函数 $f(x)=\tan(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图像如图所示，图中阴影部分的面积为 6π，则 $\varphi=$（　　）



A．$\frac{5\pi}{12}$　　　　B．$\frac{\pi}{6}$

C．$-\frac{\pi}{4}$　　　　D．$-\frac{\pi}{3}$

4．某工厂随机抽取**20**名工人,对他们某天生产的产品件数进行统计,数据如下表,则该组数据的第**75**百分位数是（　　　　）

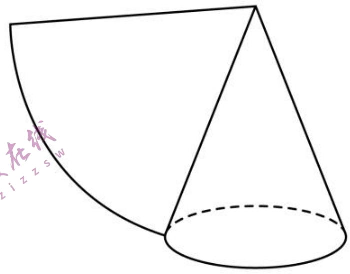
件数	7	8	9	10	11
人数	3	7	5	4	1

A．**8.5**　　　　B．**9**　　　　C．**9.5**　　　　D．**10**

5．已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，且 $f(x+1)$ 为奇函数，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=k\cdot 3^{x}+a$．若 $f(0)+f(3)=4$，则 $f\left(\log_{3}2\right)=$（　　）

A．2　　B．0　　C．-3　　D．-6

6．如图，圆锥的底面半径为 1，侧面展开图是一个圆心角为60°的扇形. 把该圆锥截成圆台，已知圆台的下底面与该圆锥的底面重合，圆台的上底面半径为$\frac{1}{3}$，则圆台的侧面积为（　　　　）



A．$\frac{16\pi}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{35}\pi}{2}$

C．$\frac{8\pi}{3}$　　D．8π

7．若正项递增等比数列 $\{a_n\}$ 满足：$\frac{1}{2}+a_2-a_3+\lambda(a_3-a_4)=0,\lambda\in R$，则 $a_4+\lambda a_5$ 的最小值为(　　)

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$2\sqrt{2}$　　D．4

8．已知双曲线 $H:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的右焦点为 F，关于原点对称的两点 A，B 分别在双曲线的左、右两支上，$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{FB}=0$，$3\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FC}$，且点 C 在双曲线上，则双曲线的离心率为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\frac{\sqrt{37}}{5}$　　C．$\frac{\sqrt{10}}{2}$　　D．$\sqrt{5}$

二、多项选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

9．下列命题正确的有（　　）

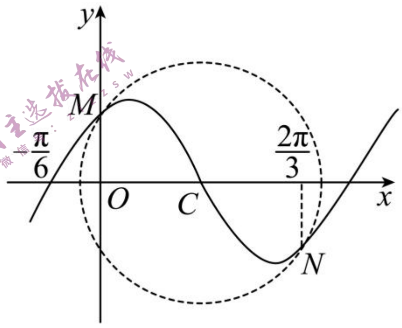
A. 若 $1-2\mathrm{i}$ 是 $ax^2+bx+c=0$（a，b，$c\in\mathbf{R}$）的根，则该方程的另一个根必是 $1+2\mathrm{i}$

B．$\forall Z_1\in\mathbf{C}$，$Z_2\in\mathbf{C}$，$\left|Z_1\cdot Z_2\right|=\left|Z_1\right|\cdot\left|Z_2\right|$

C. $\forall Z_1 \in \mathbf{C}$，$Z_2 \in \mathbf{C}$，$|Z_1+Z_2| = |Z_1| + |Z_2|$

D. 已知 a，$b \in \mathbf{R}$，i 是虚数单位，$a-1+(b-1)\mathrm{i}>0$，则 $a-1+\dfrac{\sin b}{a}$ 的最小值为 $2\sqrt{\sin 1}-1$

10. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi),(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的部分图像如图中实线所示，图中圆 C 与 $f(x)$ 的图像交于 M，N 两点，且 M 在 y 轴上，则下列说法正确的是（　　）



A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 π

B. 函数 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{7\pi}{12},-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减

C. 函数 $f(x)$ 的图像向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位后关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

D. 若圆 C 的半径为 $\dfrac{5\pi}{12}$，则函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=1$，$b_1=0$，$a_{n+1}=\dfrac{3}{4}a_n-\dfrac{b_n}{2}+1$，$2b_{n+1}=\dfrac{3}{2}b_n-\dfrac{a_n}{4}-1$. 则下列结论中正确的是（　　）

A. $a_2-2b_2=\dfrac{1}{2}$　　　　B. 数列 $\{a_n+2b_n\}$ 是等比数列

C. 数列 $\{a_n-2b_n\}$ 是等差数列　　　　D. $a_{n+1}>a_n$

12. 下列不等关系正确的是（　　）

A. $3^{\mathrm{e}}<\mathrm{e}^3<3^{\pi}$　　B. $\mathrm{e}^3<\pi^{\mathrm{e}}<\mathrm{e}^{\pi}$　　C. $\pi^{\mathrm{e}}<\pi^3<\mathrm{e}^{\pi}$　　D. $3^{\mathrm{e}}<\pi^3<3^{\pi}$

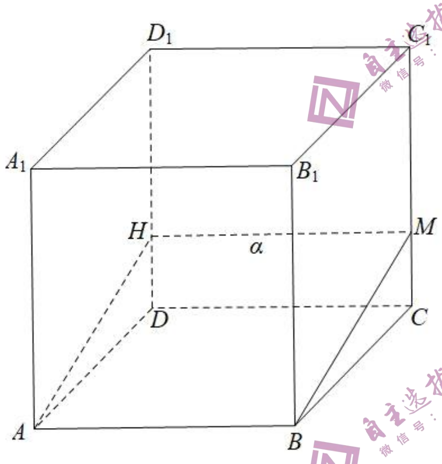
三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13．若$\left(3x+\frac{1}{x}\right)^n$展开式中各项系数之和为64，则该展开式中含$x^{-1}$的项的系数为____________.

14．设O为坐标原点，F为抛物线C：$x^2=2py(p>0)$的焦点，过焦点F且倾斜角为θ的直线l与抛物线C交于M，N两点（点N在第一象限），当$\theta=30°$时，$|MF|=2$，则$p=$____________.

15．若过点$(0,b)(b>0)$只可以作曲线$y=\frac{x}{e^x}$的一条切线，则b的取值范围是__________.

16．已知长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AD=9,AA_1=10$，过点A且与直线CD平行的平面α将长方体分成两部分，且分别与棱DD_1,CC_1交于点H,M.



（1）若$DH=DC=9$，则三棱柱$ADH-BCM$外接球的表面积为________；

（2）现同时将两个球分别放入被平面α分成的两部分几何体内.在平面α变化过程中，这两个球半径之和的最大值为________.

四、解答题（本题共6小题，70分.解答应写出文字说明、证明过程或步骤）

17.（本小题满分10分）

在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且$a\cos C+c\sin A=b$.

(1) 求角 A；

(2) $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DC}$，$BD=3$，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

18.（本小题满分 12 分）

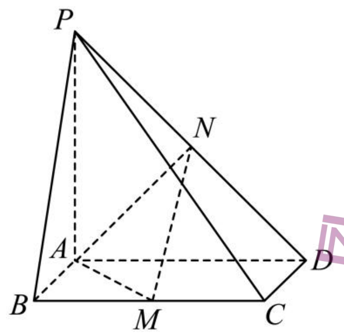
已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，满足 $a_1=1$，$a_n>0$，$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{1}{n(n+1)}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n=S_n\cos n\pi$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n-1$ 项和 T_{2n-1}.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB=2$，$AD=AP=4$，M，N 分别是 BC，PD 的中点.



(1) 求证：$MN\parallel$ 平面 PAB；

(2) 再从条件①，条件②两个中选择一个作为已知条件，求平面 AMN 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值.

条件①：$AD\perp MN$；

条件②：$AM=AN$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

20.（本小题满分12分）

已知椭圆$C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$的左、右焦点分别为F_1,F_2，点A,B为椭圆C上两点.

(1)若直线AB过左焦点F_1，求$\triangle ABF_2$的周长；

(2)若直线AB过点$P(1,0)$，求$|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|$的取值范围；.

21.（本小题满分12分）

玩具柜台五一前夕促销，在4月30日购买甲、乙系列的盲盒，并且集齐所有的产品就可以赠送大奖.而每个甲系列盲盒可以开出玩偶A_1,A_2,A_3中的一个，每个乙系列盲盒可以开出玩偶B_1，B_2中的一个.

(1)记事件E_n：一次性购买n个甲系列盲盒后集齐A_1,A_2,A_3玩偶；事件F_n：一次性购买n个乙系列盲盒后集齐B_1，B_2玩偶；求$P(E_6)$及$P(F_5)$；

(2)柜台对甲、乙两个系列的盲盒进行饥饿营销，每个消费者每天只有一次购买机会，且购买时，只能选择其中一个系列的一个盲盒.通过统计发现：第一次购买盲盒的消费者购买甲系列的概率为$\frac{1}{5}$，购买乙系列的概率为$\frac{4}{5}$；而前一次购买甲系列的消费者下一次购买甲系列的概率为$\frac{1}{4}$，购买乙系列的概率为$\frac{3}{4}$，前一次购买乙系列的消费者下一次购买甲系列的概率为$\frac{1}{2}$，购买乙系列的概率为$\frac{1}{2}$；如此往复，记某人第n次购买甲系列的概率为Q_n.

①求 Q_2；

②若礼品店每卖出一个甲系列的盲盒可获利 30 元，卖出一个乙系列的盲盒可获利 20 元，由样本估计总体，若礼品店每天可卖出 1000 个盲盒，且买的人之前都已购买过很多次这两个系列的盲盒，估计该礼品店每天利润为多少元？

22.（本小题满分 12 分）已知函数$f(x)=m(1-x)\mathrm{e}^x+\ln x$，$m\in R$.

(1)若$m=0$，证明：$f(x)\le x-1$.

(2)若$m\in(0,\mathrm{e}^{-1})$，

①证明：函数$f(x)$存在唯一的极值点β.

②若$f(\alpha)=0$，且$\alpha>\beta$，证明：$3\beta>2+\alpha$.