成都市2018级高中毕业班第三次诊断性检测

数　学(理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第Ⅰ卷(选择题)1至2页,第Ⅱ卷(非选择题)3至4页,共4页,满分150分,考试时间120分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用0.5毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第Ⅰ卷　(选择题,共60分)

一、选择题: 本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x\mid x>3\}$,$B=\{x\mid x<4\}$,则 $(\complement_U A)\cup B=$

(A) $\{x\mid x<3\}$　(B) $\{x\mid x\leqslant 3\}$　(C) $\{x\mid x<4\}$　(D) $\{x\mid x\leqslant 4\}$

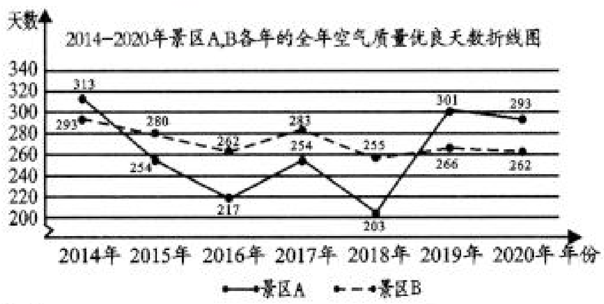
2. 已知复数 $z=\dfrac{1-3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ (i为虚数单位),则 $|z|=$

(A) 1　(B) $\sqrt{2}$　(C) 2　(D) $\sqrt{5}$

3. 设△ABC 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 若 $a=3b$,$\sin A=\dfrac{3}{5}$,则 $\sin B$ 的值为

(A) $\dfrac{1}{5}$　(B) $\dfrac{1}{15}$　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) $\dfrac{5}{9}$

4. 某市环境保护局公布了该市A,B两个景区2014年至2020年各年的全年空气质量优良天数的数据. 现根据这组数据绘制了如图所示的折线图,则由该折线图得出的下列结论中正确的是



(A)景区A这七年的空气质量优良天数的极差为98

(B)景区B这七年的空气质量优良天数的中位数为283

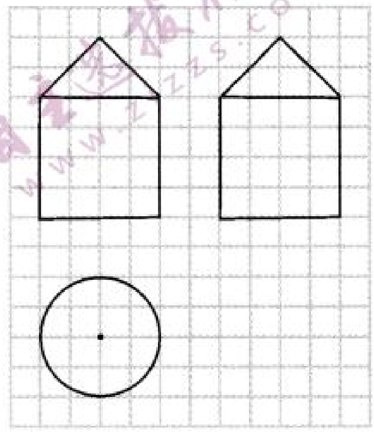
(C)分别记景区A,B这七年的空气质量优良天数的众数为 m_1,m_2,则 $m_1>m_2$

(D)分别记景区A,B这七年的空气质量优良天数的标准差为 s_1,s_2,则 $s_1>s_2$

5. 若实数 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} y \geqslant 0, \\ x-y+1 \geqslant 0, \\ x+2y-2 \leqslant 0. \end{cases}$ 则 $z=3x+5y$ 的最大值为

(A) 10　　(B) 8　　(C) 6　　(D) 5

6. 某几何体的三视图如图所示，已知网格纸上的小正方形边长为 1，则该几何体的表面积为



(A) $(20+8\sqrt{2})\pi$　　(B) $(20+4\sqrt{2})\pi$

(C) $(24+8\sqrt{2})\pi$　　(D) $(24+4\sqrt{2})\pi$

7. 已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{m}{x}(m\in\mathbf{R})$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线 l 的斜率为 2，则直线 l 在 y 轴上的截距为

(A) 3　　(B) -3

(C) 1　　(D) -1

8. 设向量 $\boldsymbol{a}=(x,x-1)$，$\boldsymbol{b}=(2,-1)$．若 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则实数 x 的值为

(A) $\dfrac{2}{3}$　　(B) $-\dfrac{5}{3}$　　(C) 10　　(D) -11

9. 命题 p：函数 $f(x)=a^{-x+1}$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的图象恒过定点 $(0,1)$；命题 q：当 $t\in(-2,2)$ 时，函数 $g(x)=x^2-3tx+1$ 在区间 $(-3,3)$ 上存在最小值．则下列命题为真命题的是

(A) $p\wedge q$　　(B) $p\vee(\neg q)$　　(C) $(\neg p)\vee q$　　(D) $(\neg p)\wedge(\neg q)$

10. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F_2，点 M，N 在双曲线的同一条渐近线上，O 为坐标原点．若直线 F_2M 平行于双曲线的另一条渐近线，且 $OF_2\perp F_2N$，$|F_2M|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}|F_2N|$，则该双曲线的渐近线方程为

(A) $y=\pm\dfrac{1}{4}x$　　(B) $y=\pm\dfrac{1}{2}x$　　(C) $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$　　(D) $y=\pm 2x$

11. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，已知 $PA=AB=AC=2$，$\angle PAB=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle BAC=\dfrac{2\pi}{3}$，$D$ 是线段 BC 上的点，$BD=2DC$，$AD\perp PB$．若三棱锥 $P-ABC$ 的各顶点都在球 O 的球面上，则球 O 的半径为

(A) 1　　(B) $\sqrt{2}$　　(C) $\sqrt{3}$　　(D) $\sqrt{5}$

12. 已知等边 $\triangle ABC$ 的三个顶点均在圆 $x^2+y^2=4$ 上，点 $P(\sqrt{3},\sqrt{6})$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最小值为

(A) 14　　(B) 10　　(C) 8　　(D) 2

第Ⅱ卷 （非选择题，共 90 分）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在答题卡上．

13. 计算 $8^{-\frac{1}{3}}+\frac{\lg 6}{\lg 2}-\log_2 3$ 的值为______．

14. 若 $(x+\frac{a}{x})^9$ 的展开式中 x^3 的系数为 $\frac{21}{2}$，则实数 a 的值为______．

15. 已知 F 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点，过点 F 且斜率为 1 的直线与抛物线相交于 A,B 两点．若 $|AF|-|BF|=\sqrt{6}$，则线段 AB 的长为______．

16. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,\varphi\in\mathbf{R})$ 在区间 $(\frac{7\pi}{12},\frac{5\pi}{6})$ 上单调，且满足 $f(\frac{7\pi}{12})=-f(\frac{3\pi}{4})$．

有下列结论：

① $f(\frac{2\pi}{3})=0$；

②若 $f(\frac{5\pi}{6}-x)=f(x)$，则函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π；

③关于 x 的方程 $f(x)=1$ 在区间 $[0,2\pi)$ 上最多有 4 个不相等的实数解；

④若函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{2\pi}{3},\frac{13\pi}{6})$ 上恰有 5 个零点，则 ω 的取值范围为 $(\frac{8}{3},3]$．

其中所有正确结论的编号为______．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（本小题满分 12 分）

《营造法式》是中国北宋时期官方颁布的一部建筑设计与施工的书籍，标志着我国古代建筑技术和工艺发展到了较高水平．中国近代建筑之父梁思成用现代语言和制图方法对该书进行了注释，著有《〈营造法式〉注释》．为了让建筑类学生了解古建筑设计与构造的原理，某建筑大学为大三和大四的学生开设了一门选修课程《营造法式及其注释》．为检测学生学习效果，要求所有选修该门课程的学生完成“应用营造法式独立制作一件古建筑模型”的作业．已知选修该门课程的大三与大四学生的人数之比为 3∶2，现用分层抽样的方法从所有作业中随机抽取 100 份（每位学生均上交一份作业），并评出成绩，得到如下频数分布表．

成绩（单位：分）	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100]
频数（不分年级）	4	x	20	38	30
频数（大三年级）	3	6	15	y	12

（Ⅰ）求 x,y 的值；并估计这 100 份作业中大三学生作业的平均成绩（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）；

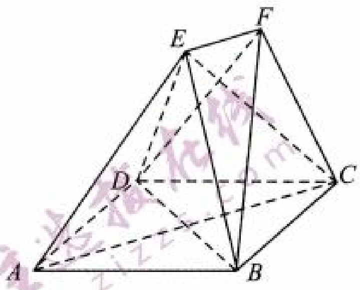
（Ⅱ）在这 100 份作业的样本中，从成绩在 [50,80) 的大四学生作业中随机抽取 2 份，记抽取的这 2 份作业中成绩在 [60,70) 的份数为 X，求 X 的分布列与数学期望．

18.（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1=1,a_2=3$，且满足 $a_{n+2}+3a_n=4a_{n+1}$．设 $b_n=a_{n+1}-a_n,n\in\mathbf{N}^*$．

（Ⅰ）求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）记 $c_n=\log_3(a_n+b_n)$，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求 S_{20}．



19. (本小题满分 12 分)

如图,在多面体 $ABCDEF$ 中,四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形,$\angle DAB=\frac{\pi}{3}$,$EB=ED$,$EF\ /\!/\ AC$.

(Ⅰ)求证:平面 $BDF\perp$ 平面 $ACFE$;

(Ⅱ)若 $EA=EC$,$EF=\frac{1}{4}AC$,多面体 $ABCDEF$ 的体积为$\frac{5}{2}$,求平面 ABE 与平面 BDF 所成锐二面角的余弦值.

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的四个顶点围成的四边形的面积为 $2\sqrt{5}$,右焦点 F_2 到直线 $x-y+2=0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程;

(Ⅱ)过点 $M(-3,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A,B 两点,过点 F_2 作直线 l 的垂线,垂足为 N(点 A,B 在点 M,N 之间).若△AF_2M 与△BF_2N 面积相等,求直线 l 的方程.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\cos x-ax^2$,其中 $a\in\mathbf{R}$,$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

(Ⅰ)当 $a=-\frac{1}{2}$ 时,求函数 $f(x)$ 的值域;

(Ⅱ)若函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上恰有两个极小值点 x_1,x_2,求 a 的取值范围;并判断是否存在实数 a,使得 $f(x_2-x_1)=1+\frac{1}{9}(x_2-x_1)^2$ 成立?若存在,求出 a 的值;若不存在,请说明理由.

请考生在第 22,23 题中任选择一题作答,如果多做,则按所做的第一题记分.作答时,用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22. (本小题满分 10 分)选修 4—4:坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=k^2,\\ y=\sqrt{2}k\end{cases}$($k$ 为参数).以坐标原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,直线 l 的极坐标方程为$\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=1$.

(Ⅰ)求曲线 C 与直线 l 的普通方程;

(Ⅱ)设直线 l 与曲线 C 相交于 P,Q 两点,点 $M(\sqrt{2},0)$,求 $|PM|^2+|QM|^2$ 的值.

23. (本小题满分 10 分)选修 4—5:不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x^2-4|+|x+2|-4$.

(Ⅰ)若关于 x 的方程 $f(x)=m$ 有唯一实数解,求实数 m 的值;

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的 m 值,若正实数 a,b 满足 $a+b+2m=0$,试比较 $\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+5}$ 与 $\frac{1}{4}$ 的大小,并说明理由.

成都市2018级高中毕业班第三次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷 (选择题,共60分)

一、选择题:(每小题5分,共60分)

1.C; 2.D; 3.A; 4.D; 5.C; 6.B; 7.B; 8.A; 9.C; 10.B; 11.D; 12.C.

第Ⅱ卷 (非选择题,共90分)

二、填空题:(每小题5分,共20分)

13. $\frac{3}{2}$; 14. $\frac{1}{2}$; 15. $2\sqrt{3}$; 16.①②④.

三、解答题:(共70分)

17.解:(Ⅰ)由题意,知 $4+x+20+38+30=100$. $\therefore x=8$. ……2分

在这100份作业中,因大三学生的作业共 $3+6+15+y+12=36+y$(份),

则大四学生的作业共 $64-y$(份).

$\because$ 选修该门课程的大三与大四学生的人数之比为 $3:2$,

$\therefore \frac{36+y}{64-y}=\frac{3}{2}$. 解得 $y=24$. ……4分

故这100份作业中大三学生作业共60份.

设大三学生作业的平均成绩为 $\overline{x}$.

则 $\overline{x}=\frac{3}{60}\times 55+\frac{6}{60}\times 65+\frac{15}{60}\times 75+\frac{24}{60}\times 85+\frac{12}{60}\times 95=81$.

$\therefore$ 估计这100份作业中大三学生作业的平均成绩为81分. ……6分

(Ⅱ)在这100份作业的样本中,成绩在 $[50,60)$, $[60,70)$, $[70,80)$ 的大四学生作业份数分别是1,2,5.

故成绩在 $[50,80)$ 的作业有8份,则 X 的所有可能取值为0,1,2. ……7分

$\because P(X=0)=\frac{C_2^0C_6^2}{C_8^2}=\frac{15}{28}$, $P(X=1)=\frac{C_2^1C_6^1}{C_8^2}=\frac{3}{7}$, $P(X=2)=\frac{C_2^2C_6^0}{C_8^2}=\frac{1}{28}$,

……10分

$\therefore$ 随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$

$\therefore$ 随机变量 X 的数学期望 $EX=0\times\frac{15}{28}+1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{1}{28}=\frac{1}{2}$. ……12分

18. 解:(Ⅰ)$\because a_{n+2}+3a_n=4a_{n+1}, n\in \mathbf{N}^*$,$\therefore a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$. ……1 分

$\because b_n=a_{n+1}-a_n$,$\therefore b_{n+1}=3b_n$. ……2 分

又 $b_1=a_2-a_1=2$,

∴数列 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项,3 为公比的等比数列. ……4 分

$\therefore b_n=2\times 3^{n-1}$. ……6 分

(Ⅱ)$\because b_n=a_{n+1}-a_n$,

$\therefore a_{n+1}=(a_{n+1}-a_n)+(a_n-a_{n-1})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$ ……7 分

$=b_n+b_{n-1}+\cdots+b_1+a_1=\dfrac{2(1-3^n)}{1-3}+1=3^n$. ……9 分

$\therefore c_n=\log_3(a_n+b_n)=\log_3 3^n=n$. ……10 分

$\therefore S_n=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. ……11 分

$\therefore S_{20}=\dfrac{20\times 21}{2}=210$. ……12 分

19. 解:(Ⅰ)如图,设 AC 与 BD 的交点为 O ,连接 EO .

∵四边形 $ABCD$ 是菱形,∴ $AC\perp BD$,且 O 为 BD,AC 的中点. ……1 分

$\because EB=ED$,$\therefore BD\perp EO$. ……2 分

$\because AC, EO\subset$ 平面 $ACFE$,$AC\cap EO=O$,

$\therefore BD\perp$ 平面 $ACFE$. ……4 分

又 $BD\subset$ 平面 BDF ,

∴ 平面 $BDF\perp$ 平面 $ACFE$. ……5 分

(Ⅱ)∵四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形,$\angle DAB=\dfrac{\pi}{3}$,则 $BD=2$.

$\therefore OB=OD=1$.

又 $AC=2AO=\sqrt{3}AB=2\sqrt{3}$,$EF=\dfrac{1}{4}AC$,$\therefore EF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ……6 分

$\because EF\,/\!/\,AC$,∴ 四边形 $ACFE$ 是梯形.

$\because O$ 为 AC 的中点,$EA=EC$,$\therefore EO\perp AC$.

∴ 梯形 $ACFE$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+2\sqrt{3})\cdot OE=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}\cdot OE$. ……7 分

又由(Ⅰ)知 $BD\perp$ 平面 $ACFE$.

$\therefore V_{ABCDEF}=V_{B-ACFE}+V_{D-ACFE}=2V_{B-ACFE}$

$$=2\times\frac{1}{3}S\cdot OB=2\times\frac{1}{3}\times\frac{5\sqrt{3}}{4}\cdot OE\times 1=\frac{5}{2}.$$

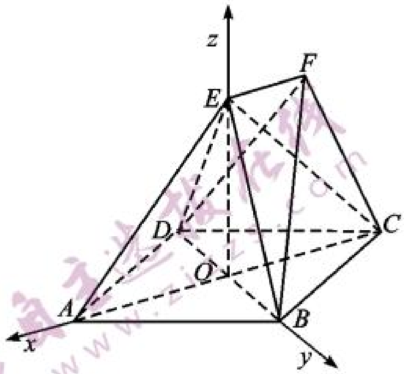
$\therefore OE=\sqrt{3}$. ……8 分

以 O 为坐标原点,向量 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OE}$ 的方向分别为 x 轴,y 轴,z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$.

则 $A(\sqrt{3},0,0)$,$B(0,1,0)$,$E(0,0,\sqrt{3})$,

$D(0,-1,0),F(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,\sqrt{3})$.

$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0),\overrightarrow{AE}=(-\sqrt{3},0,\sqrt{3})$，



$\overrightarrow{BD}=(0,-2,0),\overrightarrow{BF}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},-1,\sqrt{3})$.

……9 分

设平面 ABE，平面 BDF 的法向量分别为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$.

由 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}=0\\ \overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{m}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}-\sqrt{3}x_1+y_1=0\\ -\sqrt{3}x_1+\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$. 令 $x_1=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},1)$.

……10 分

由 $\begin{cases}\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{BF}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}-2y_2=0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x_2-y_2+\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$. 令 $x_2=2$，得 $\boldsymbol{n}=(2,0,1)$.

……11 分

$\because \cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2+1}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{3}{5}$，

$\therefore$ 平面 ABE 与平面 BDF 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{3}{5}$. ……12 分

20. 解：(Ⅰ) $\because$ 椭圆 C 的四个顶点围成的四边形的面积为 $2\sqrt{5}$，

$\therefore \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2b=2\sqrt{5}$，即 $ab=\sqrt{5}$. ……1 分

$\because$ 点 $F_2(c,0)(c>0)$ 到直线 $x-y+2=0$ 的距离为 $\frac{|c+2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，

$\therefore c=2$. ……2 分

又 $a^2=b^2+c^2$，$\therefore a^2=\frac{5}{a^2}+4$，即 $a^4-4a^2-5=0$.

解得 $a^2=5$ 或 $a^2=-1$(舍去). ……3 分

$\therefore b^2=1$.

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$. ……4 分

(Ⅱ)由题意，直线 l 的斜率存在且不为 0. 设直线 l 的方程为 $x=my-3$.

由 $\begin{cases}x=my-3\\ \frac{x^2}{5}+y^2=1\end{cases}$，消去 x，得 $(m^2+5)y^2-6my+4=0$. ……5 分

由 $\Delta=20(m^2-4)>0$，得 $m<-2$ 或 $m>2$. ……6 分

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),N(x_N,y_N)$.

则 $y_1+y_2=\frac{6m}{m^2+5},y_1y_2=\frac{4}{m^2+5}$. ……7 分

设过点 F_2 与直线 l 垂直的直线的方程为 $x=-\frac{1}{m}y+2$.

由 $\begin{cases}x=my-3,\\ x=-\frac{1}{m}y+2\end{cases}$，解得 $y_N=\frac{5m}{m^2+1}$. ……8 分

∵$\triangle AF_2M$ 与 $\triangle BF_2N$ 面积相等，∴ $\frac{1}{2}|MA|\cdot|F_2N|=\frac{1}{2}|BN|\cdot|F_2N|$，

∴ $|MA|=|BN|$，即 MA,BN 在 y 轴上的投影相等.

则 $|y_1-0|=|y_N-y_2|$. ……10 分

∵ 点 A,B 在点 M,N 之间，∴ $y_1+y_2=y_N$，即 $\frac{6m}{m^2+5}=\frac{5m}{m^2+1}$.

解得 $m=\pm\sqrt{19}$，满足 $m<-2$ 或 $m>2$. ……11 分

∴直线 l 的方程为 $x+\sqrt{19}y+3=0$ 或 $x-\sqrt{19}y+3=0$. ……12 分

21. 解：(Ⅰ)当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=\cos x+\frac{1}{2}x^2$，则 $f'(x)=-\sin x+x$. ……1 分

设 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=-\cos x+1$，$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. 显然 $g'(x)\geqslant 0$.

∴$g(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增. ……2 分

又 $g(0)=0$，∴当 $x\in[-\frac{\pi}{2},0)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$f'(x)>0$.

∴ $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},0)$ 上单调递减，在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增. ……3 分

∵ $f(0)=1$，$f(\frac{\pi}{2})=f(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{8}$，∴函数 $f(x)$ 的值域为 $[1,\frac{\pi^2}{8}]$. ……4 分

(Ⅱ)∵$f(-x)=\cos(-x)-a(-x)^2=\cos x-ax^2=f(x)$，

∴$f(x)$ 是 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上的偶函数.

∴“函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上恰有两个极小值点”等价于“函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上恰有一个极小值点”.

因 $f'(x)=-\sin x-2ax$，设 $h(x)=f'(x)$，则 $h'(x)=-\cos x-2a$. ……5 分

①当 $a\geqslant 0$ 时，$h'(x)\leqslant 0$，则 $h(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减. ∴$h(x)\leqslant h(0)=0$.

则 $f'(x)\leqslant 0$，此时 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减，无极小值. ……6 分

②当 $a\leqslant-\frac{1}{2}$ 时，$h'(x)\geqslant 0$，则 $h(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增. ∴$h(x)\geqslant h(0)=0$.

则 $f'(x)\geqslant 0$，此时 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，无极小值. ……7 分

③当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，存在 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使 $h'(x_0)=-\cos x_0-2a=0$

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in(x_0,\frac{\pi}{2})$ 时，$h'(x)>0$.

$\therefore h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增.

$\because h(0)=0$，$\therefore h(x_0)<0$.　又 $h(\frac{\pi}{2})=-1-a\pi$，

(ⅰ)当 $-1-a\pi\leqslant 0$，即 $-\frac{1}{\pi}\leqslant a<0$ 时，$h(\frac{\pi}{2})\leqslant 0$.

$\therefore f'(x)\leqslant 0$，此时 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减，无极小值.　……8 分

(ⅱ)当 $-1-a\pi>0$，即 $-\frac{1}{2}<a<-\frac{1}{\pi}$ 时，$h(\frac{\pi}{2})>0$.

则存在 $t\in(x_0,\frac{\pi}{2})$，使得 $h(t)=-\sin t-2at=0$.　…(＊)

当 $x\in(0,t)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(t,\frac{\pi}{2})$ 时，$f'(x)>0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0,t)$ 上单调递减，在 $(t,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增.　……9 分

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上恰有一个极小值点 $x_2=t$. 此时，$x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点.

$\therefore$ 当函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上恰有两个极小值点时，a 的取值范围为 $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{\pi})$.

……10 分

$\because x_1+x_2=0$，

若 $f(x_2-x_1)=1+\frac{1}{9}(x_2-x_1)^2$，则 $\cos 2x_2-4ax_2^2=1+\frac{4}{9}x_2^2$.

由(＊)式，知 $\sin x_2=-2ax_2$.　$\therefore 1-8a^2x_2^2-4ax_2^2=1+\frac{4}{9}x_2^2$.　……11 分

整理得 $x_2^2(3a+1)(6a+1)=0$.

$\because x_2\neq 0$，$a\in(-\frac{1}{2},-\frac{1}{\pi})$，$\therefore a=-\frac{1}{3}$.

$\therefore$ 存在 $a=-\frac{1}{3}$，使得 $f(x_2-x_1)=1+\frac{1}{9}(x_2-x_1)^2$ 成立.　……12 分

22. 解：(Ⅰ)消去曲线 C 的参数方程中的参数 k，得 $y^2=2x$.　……2 分

$\therefore$ 曲线 C 的普通方程为 $y^2=2x$.　……3 分

整理 $\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=1$，可得 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=\sqrt{2}$.　……4 分

$\because \rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$，$\therefore$ 直线 l 的普通方程为 $x+y-\sqrt{2}=0$.　……5 分

(Ⅱ)将直线 l 的普通方程化为参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数).　……6 分

代入 $y^2=2x$，整理可得 $t^2+2\sqrt{2}t-4\sqrt{2}=0$.　　…(*)

而 $\Delta=(2\sqrt{2})^2-4\times1\times(-4\sqrt{2})=8+16\sqrt{2}>0$.　　……7 分

设 t_1,t_2 是方程(*)的两个实数根.

则 $t_1+t_2=-2\sqrt{2}$，$t_1t_2=-4\sqrt{2}$.　　……8 分

$\therefore |PM|^2+|QM|^2=t_1^2+t_2^2=(t_1+t_2)^2-2t_1t_2=8+8\sqrt{2}$.　　……10 分

23. 解：(Ⅰ)①当 $x\leqslant-2$ 时，$f(x)=x^2-x-10$. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2]$ 上单调递减，此时函数 $f(x)$ 的值域为 $[-4,+\infty)$；　　……1 分

②当 $-2<x<2$ 时，$f(x)=-x^2+x+2$. 函数 $f(x)$ 在 $(-2,\frac{1}{2})$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{2},2)$ 上单调递减，此时函数 $f(x)$ 的值域为 $(-4,\frac{9}{4}]$；　　……2 分

③当 $x\geqslant2$ 时，$f(x)=x^2+x-6$. 函数 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增. 此时函数 $f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$；　　……3 分

由题意，及函数 $f(x)$ 的图象知 $m=-4$.　　……5 分

(Ⅱ) $\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+5}$ 与 $\frac{1}{4}$ 的大小关系为：$\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+5}\geqslant\frac{1}{4}$.

证明如下：由 $a+b+2m=0$ 及 $m=-4$，知 $a+b=8$.　　……6 分

$\because a>0,b>0$，

$\therefore \frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+5}=\frac{1}{16}[(a+3)+(b+5)](\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+5})$　　……8 分

$=\frac{1}{16}(2+\frac{b+5}{a+3}+\frac{a+3}{b+5})\geqslant\frac{1}{16}(2+2\sqrt{\frac{b+5}{a+3}\cdot\frac{a+3}{b+5}})=\frac{1}{4}$.

当且仅当 $\frac{b+5}{a+3}=\frac{a+3}{b+5}$，即 $a=5,b=3$ 时等号成立.　　……9 分

$\therefore \frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+5}\geqslant\frac{1}{4}$.　　……10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》