

- A. 18 B. 46 C. 54 D. 92

5. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点到双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线的距离是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则该双曲线的离心率为

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

6. 已知 m, n 为两条不同的直线, α, β 为两个不同的平面, 则下列命题中正确的是 ()

- A. $m \subset \alpha, n \subset \alpha, m \parallel \beta, n \parallel \beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta$
 B. $\alpha \parallel \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta \Rightarrow m \parallel n$
 C. $m \perp \alpha, m \perp n \Rightarrow n \perp \alpha$
 D. $n \parallel m, n \perp \alpha \Rightarrow m \perp \alpha$

7. 设 $a > 1$, 且 $m = \log_a(a^2 + 1), n = \log_a(a - 1), p = \log_a(2a)$, 则 m, n, p 的大小关系为

- A. $n > m > p$ B. $m > p > n$ C. $m > n > p$ D. $p > m > n$

8. 某班级有 50 名学生, 期末考试数学成绩服从正态分布 $N(120, \sigma^2)$, 已 $P(X > 140) = 0.2$, 则 $X \in [100, 140]$ 的学生人数为 ()

- A. 5 B. 10 C. 20 D. 30

9. 函数 $f(x) = \begin{cases} |x^2 + x|, & x \leq 0 \\ \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$, 关于 x 的方程 $f(x) - a(x+1) = 0$ 有 2 个不相等的实数根, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{e}, 1\right) \cup \{0\}$ B. $\left(-\infty, -\frac{1}{e}\right) \cup (1, e) \cup \{0\}$

C. $(-\infty, 0] \cup \left(\frac{1}{e}, 1\right)$

D. $(-\infty, 0] \cup (1, e)$

二、填空题：本大题共 6 个小题，每小题 5 分，共 30 分.

10. 已知 $(a-i)^2 = 2i$ ，其中 i 是虚数单位，那么实数 $a =$ _____ .

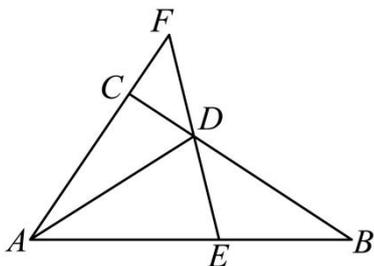
11. 某项选拔共有三轮考核，每轮设有一个问题，能正确回答问题者进入下一轮考试，否则即被淘汰. 已知某选手能正确回答第一、二、三轮的问题的概率分别为 $\frac{4}{5}$ ， $\frac{3}{5}$ ， $\frac{2}{5}$ ，且各轮问题能否正确回答互不影响，则该选手被淘汰的概率为 _____ .

12. $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$ 展开式中的常数项为 _____ .

13. 已知两圆 $x^2 + y^2 = 10$ 和 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$ 相交于 A, B 两点，则直线 AB 的方程是 _____ .

14. 已知 $x, y \in \mathbb{R}^+$ ，则 $\frac{y}{x} + \frac{4x}{x+y}$ 的最小值为 _____ .

15. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 为 BC 边上一点，且 $\overline{BD} = 2\overline{DC}$ ，过点 D 的直线 EF 与直线 AB 相交于 E 点，与直线 AC 相交于 F 点 (E, F 交两点不重合). 若 $\overline{AD} = m\overline{AB} + n\overline{AC}$ ，则 $mn =$ _____，若 $\overline{AE} = \lambda\overline{AB}$, $\overline{AF} = \mu\overline{AC}$ ，则 $\lambda + \mu$ 的最小值为 _____ .



三、解答题：本大题共 5 个小题，共 75 分. 解写出文字说明、证明过程或演算步骤.

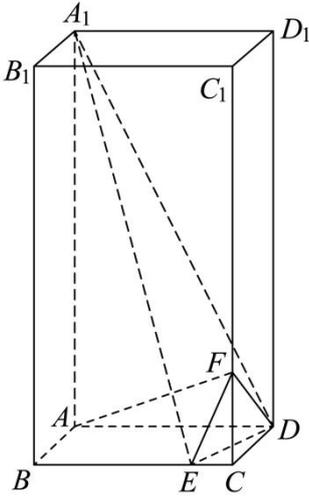
16. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c ，且 $a = 2\sqrt{2}, b = 5, c = \sqrt{13}$.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 求 $\sin A$ 的值;

(3) 求 $\sin\left(2A - \frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

17. 如图，在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E, E 分别是棱 BC, CC_1



上的点, $CF = AB = 2CE$, $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 4$

- (1) 求异面直线 EF 与 A_1D 所成角的余弦值;
- (2) 证明 $AF \perp$ 平面 A_1ED
- (3) 求二面角 $A_1 - ED - F$ 的正弦值.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列, 其前 8 项的和为 64. 数列 $\{b_n\}$ 是公比大于 0 的等比数列, $b_1 = 3$, $b_3 - b_2 = 18$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
- (2) 记 $c_n = (-1)^n a_n^2, n \in \mathbb{N}^*$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n} ;
- (3) 记 $d_n = \frac{a_{n+2} - 1}{a_n a_{n+1} b_n}, n \in \mathbb{N}^*$, 求数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率 $e = \frac{1}{2}$, 长轴为 4, 且过椭圆右

焦点 F_2 的直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点.

- (1) 求椭圆 C 的标准方程;
- (2) 若 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = -2$, 其中 O 为坐标原点, 求直线 l 的斜率;
- (3) 若 AB 是椭圆 C 经过原点 O 的弦, 且 $MN \parallel AB$, 判断 $\frac{|AB|^2}{|MN|}$ 是否为定值? 若是定值, 请求出, 若不

是定值, 请说明理由.

20. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} - k$.

(1) 当 $k=0$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围;

(3) 证明: $\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{1}{3} + \cdots + \ln \frac{1}{n} < \frac{1}{e} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) (n > 1, n \in \mathbf{N}^*)$.

