

2023 年 7 月济南市高二期末学情检测

数学试题参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	B	C	C	D	B	A	D

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	BD	BC	ACD	BCD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 66; 14. 0.8; 15. -1; 16. $\frac{1}{4}$.

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 【解析】

(1)

	喜欢天宫课堂	不喜欢天宫课堂	合计
男生	75	25	100
女生	55	45	100
合计	130	70	200

(2) 零假设为 H_0 ：是否喜欢天宫课堂与性别之间无关联。

$$\chi^2 = \frac{200(75 \cdot 45 - 55 \cdot 25)^2}{100 \cdot 100 \cdot 130 \cdot 70} \approx 8.791 > 6.635$$

根据小概率值 $\alpha = 0.010$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为该校学生是否喜欢天宫课堂与性别有关，此推断犯错误的概率不大于 0.010。

18. 【解析】

(1) 因为 $2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + 2^3 C_n^3 + \dots + 2^n C_n^n$

$$= C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + 2^3 C_n^3 + \cdots + 2^n C_n^n - 1 = (1+2)^n - 1 = 3^n - 1 = 728, \text{ 所以, } n=6.$$

(2) 由 (1) 知, $n=6$

所以 $(x + \frac{1}{2\sqrt{x}})^n$ 的通项公式为 $T_{k+1} = C_6^k x^{6-k} (\frac{1}{2\sqrt{x}})^k = (\frac{1}{2})^k C_6^k x^{6-\frac{3}{2}k}$,

令 $6 - \frac{3}{2}k = 0$, 得: $k=4$, 所以展开式中的常数项为 $T_5 = (\frac{1}{2})^4 C_6^4 = \frac{15}{16}$.

19. 【解析】

(1) 因为 $f'(x) = x - (a+1) + \frac{a}{x}$, 由题意得: $f'(2) = 2 - (a+1) + \frac{a}{2} = 0$, 解得: $a=2$,

经检验, 符合题意.

(2) 函数定义域为 $(0, +\infty)$, 因为 $f'(x) = x - (a+1) + \frac{a}{x} = \frac{(x-a)(x-1)}{x}$,

所以, 当 $a \leq 0$ 时, 若 $0 < x < 1$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 递减,

若 $x > 1$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 递增;

当 $0 < a < 1$ 时, 若 $a < x < 1$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(a, 1)$ 单调递减,

若 $0 < x < a$ 或 $x > 1$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, a)$ 和 $(1, +\infty)$ 递增;

当 $a=1$ 时 $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增;

当 $a > 1$ 时, 若 $1 < x < a$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(1, a)$ 单调递减,

若 $0 < x < 1$ 或 $x > a$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 和 $(a, +\infty)$ 单调递增;

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增;

当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $(a, 1)$ 单调递减, 在 $(0, a)$ 和 $(1, +\infty)$ 单调递增;

当 $a=1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增;

当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 在 $(1, a)$ 单调递减, 在 $(0, 1)$ 和 $(a, +\infty)$ 单调递增.

20. 【解析】

(1) 设 A_i : 第 i 次通过第一关, B_i : 第 i 次通过第二关, 甲可以进入第三关的概率为 p ,

由题意知 $P = (P(A_1) + P(\overline{A_1}A_2)) \cdot (P(B_1) + P(\overline{B_1}B_2))$

$$= \left(\frac{4}{5} + \left(1 - \frac{4}{5} \right) \times \frac{4}{5} \right) \times \left(\frac{3}{4} + \left(1 - \frac{3}{4} \right) \times \frac{3}{4} \right) = \frac{24}{25} \cdot \frac{15}{16} = \frac{9}{10}.$$

(2) 因为选手得分 $X \sim N(212, \sigma^2)$, 所以 $\mu = 212$,

因为 $\frac{317}{2000} = 0.1585$, 且 $P(X > \mu + \sigma) = \frac{1 - P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)}{2} = \frac{1 - 0.683}{2} \approx 0.1585$,

而 $\frac{46}{2000} = 0.023$, 且 $P(X > \mu + 2\sigma) = \frac{1 - P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)}{2} = \frac{1 - 0.954}{2} \approx 0.023$,

所以 $\mu + 2\sigma = 270$, 则 $\sigma = \frac{270 - 212}{2} = 29$;

所以前 317 名参赛者的最低得分高于 $\mu + \sigma = 241$, 而乙的得分为 231 分, 所以乙无法获得奖励.

21. 【解析】

(1) 随机变量 X 的取值分别为 2, 3, 4, 5

$$\therefore P(X=2) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15},$$

$$P(X=3) = \frac{C_2^1 C_4^1}{C_6^2} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{15},$$

$$P(X=4) = \frac{C_2^1 C_4^2}{C_6^3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{C_4^4}{C_6^4} = \frac{4}{15},$$

$$P(X=5) = \frac{C_4^3 C_2^1}{C_6^4} = \frac{8}{15},$$

$\therefore$ 随机变量 X 的分布列为:

X	2	3	4	5
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{15}$

$\therefore$ 随机变量 X 的期望为: $E(X) = 2 \times \frac{1}{15} + 3 \times \frac{2}{15} + 4 \times \frac{4}{15} + 5 \times \frac{8}{15} = \frac{64}{15}$.

(2) 因为各个产品的生产互不影响, 所以 $f(p) = C_{50}^2 p^2 (1-p)^{48} (0 < p < 1)$,

所以 $f'(p) = C_{50}^2 [2p(1-p)^{48} - 48p^2(1-p)^{47}] = C_{50}^2 p(1-p)^{47} (2 - 50p)$.

令 $f'(p) = 0$, 得 $p = \frac{1}{25}$,

所以, 当 $0 < p < \frac{1}{25}$ 时, $f'(p) > 0$, $f(p)$ 为单调增函数;

当 $\frac{1}{25} < p < 1$ 时, $f'(p) < 0$, $f(p)$ 为单调减函数,

所以, 当 $p = \frac{1}{25}$ 时, $f(p)$ 取得最大值.

22. 【解析】

(1) 由题意知, $f'(x) = e^x + 2ax$, $f''(x) = e^x + 2a$.

当 $a > 0$ 时, $f''(x) > 0$, 故 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单增, 又 $f'(-\frac{1}{a}) < 0$, $f'(0) = 1 > 0$, 故 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在唯一变号零点, $f(x)$ 存在唯一的极值点, 符合题意;

当 $a = 0$ 时, $f(x) = e^x - 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单增, 即 $f(x)$ 无极值点, 不合题意;

当 $a < 0$ 时, 由 $f''(x) = 0$ 得 $x = \ln(-2a)$, 又 $f''(x)$ 是增函数, 所以, $f'(x)$ 在 $(-\infty, \ln(-2a))$ 上单调递减, 在 $(\ln(-2a), +\infty)$ 上单调递增, 又 $f'(\ln(-2a)) = -2a(1 - \ln(-2a))$,

① 当 $-\frac{e}{2} \leq a < 0$ 时, $\ln(-2a) \leq 1$, 所以, $f'(\ln(-2a)) \geq 0$, 所以 $f'(x) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单增, 即 $f(x)$ 无极值点, 不合题意;

② 当 $a < -\frac{e}{2}$ 时, $\ln(-2a) > 1$, 所以 $f'(\ln(-2a)) < 0$, 又 $f'(0) = 1 > 0$,

$$f'(-2a) = e^{-2a} - 4a^2 = (e^{-a} - 2a)(e^{-a} + 2a) > (e^{-a} - 2a)(e^{-a} - 2a) = -a(e^{-a} - 2a)(e - 2) > 0,$$

所以 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在两个变号零点, 即 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在两个极值点, 不合题意.

综上, $a > 0$.

(2) 证明: 因为 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 由 (1) 知, $a < -\frac{e}{2}$, 且 x_1, x_2 均为正数,

$$\text{所以 } 2a + e < 0, \quad \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} > \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2, \quad \text{即 } x_1^2 + x_2^2 > \frac{(x_1 + x_2)^2}{2}.$$

所以, 欲证 $x_1^2 + x_2^2 > 2(a+1) + e$, 只需证 $\frac{(x_1 + x_2)^2}{2} > 2$, 只需证 $x_1 + x_2 > 2$.

又由题意, $f'(x_1) = e^{x_1} + 2ax_1 = 0$, $f'(x_2) = e^{x_2} + 2ax_2 = 0$, 所以 $\frac{e^{x_1}}{x_1} = \frac{e^{x_2}}{x_2}$,

所以, $\ln \frac{e^{x_1}}{x_1} = \ln \frac{e^{x_2}}{x_2}$, 即 $x_1 - \ln x_1 = x_2 - \ln x_2$, 所以 $\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} = 1$.

下面先证明 $\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2}$. 不妨设 $x_1 < x_2$, 记 $t = \frac{x_2}{x_1}$, 则 $t > 1$.

$$\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} \Leftrightarrow \frac{1+t}{2} > \frac{1-t}{-\ln t} \Leftrightarrow \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1},$$

令 $g(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}$, $t > 1$, $g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0$, 所以 $g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单增.

所以, 由 $t > 1$ 得, $g(t) > g(1) = 0$.

所以 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$, $t > 1$, 即 $\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2}$ 得证.

所以, $\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} = 1$, 即 $x_1 + x_2 > 2$.

所以 $x_1^2 + x_2^2 > 2(a+1) + e$, 证毕.