

## NCS20210607 项目第三次模拟测试卷

### 理科数学

本试卷共 4 页, 23 小题, 满分 150 分. 考试时间 120 分钟.

注意事项:

- 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填涂在答题卡上, 并在相应位置贴好条形码.
- 作答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案信息涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案.
- 非选择题必须用黑色水笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上; 如需改动, 先划掉原来答案, 然后再写上新答案, 不准使用铅笔和涂改液. 不按以上要求作答无效.
- 考生必须保证答题卡整洁. 考试结束后, 将试卷和答题卡一并交回.

一. 选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集为  $\mathbb{R}$ , 已知集合  $A = \{x | \ln x < 0\}$ ,  $B = \{x | e^x < e\}$ , 则  $A \cup (C_{\mathbb{R}} B) =$

- A.  $\mathbb{R}$                       B.  $[1, +\infty)$                       C.  $[0, +\infty)$                       D.  $(0, +\infty)$

2. 若复数  $z$  满足  $(1+i)(z-2) = 2i$ , 则  $\bar{z} =$

- A.  $3+i$                       B.  $3-i$                       C.  $-3+i$                       D.  $-3-i$

3. 已知自由落体运动的速度  $v = gt$ , 则自由落体运动从  $t = 0\text{s}$  到  $t = 2\text{s}$  所走过的路程为

- A.  $g$                       B.  $2g$                       C.  $4g$                       D.  $8g$

4. 若函数  $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x > 0 \\ 4\sin x, & x \leq 0 \end{cases}$ , 则  $f(f(-\frac{5\pi}{4})) =$

- A.  $-\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{1}{2}$                       C. 1                      D.  $\frac{3}{2}$

5. 已知公差不为 0 的等差数列  $\{a_n\}$  满足  $a_5^2 + a_6^2 = a_7^2 + a_8^2$ , 则

- A.  $a_6 = 0$                       B.  $a_7 = 0$                       C.  $S_{12} = 0$                       D.  $S_{13} = 0$

6. 若变量  $x, y$  满足  $\begin{cases} x+y-2 \geq 0 \\ x-y+2 \leq 0 \\ y \leq 4 \end{cases}$ , 则目标函数  $z = |x| - 2y$  的最小值为

- A. -8                      B. -6                      C. -10                      D. -4

7. 随机变量  $X$  服从正态分布, 有下列四个命题:

- ①  $P(X \geq k) = 0.5$ ;                      ②  $P(X < k) = 0.5$ ;  
③  $P(X > k+1) < P(X < k-2)$ ;                      ④  $P(k-1 < X < k) > P(k+1 < X < k+2)$ .

若只有一个假命题, 则该假命题是

- A. ①                      B. ②                      C. ③                      D. ④

8. 将方程  $f(x) = f'(x)$  的实数根称为函数  $f(x)$  的“新驻点”. 记函数  $f(x) = e^x - x$ ,  $g(x) = \ln x$ ,

$h(x) = \sin x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  的“新驻点”分别为  $a, b, c$ , 则

- A.  $c < a < b$                       B.  $c < b < a$                       C.  $a < c < b$                       D.  $a < b < c$

9. 平安夜苹果创意礼品盒, 如图 1 所示, 它的形状可视为一个十面体, 其中上下底面为全等的正方形, 八个侧面是全等的等腰三角形. 如图 2, 底面正方形  $ABCD$  的边长为 2, 上底面  $EFGH$  与下底面  $ABCD$  之间的距离为  $\sqrt{2}+1$ , 则该几何体的侧面积为



图 1

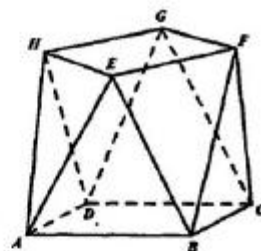
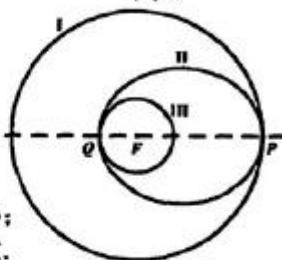


图 2

- A.  $6\sqrt{6}$                       B.  $8\sqrt{6}$   
C.  $16\sqrt{2}$                       D.  $12\sqrt{2}$

10. 如图所示, “嫦娥五号”月球探测器飞行到月球附近时, 首先在以月球球心  $F$  为圆心的圆形轨道 I 上绕月球飞行, 然后在  $P$  点处变轨进入以  $F$  为一个焦点的椭圆轨道 II 绕月球飞行, 最后在  $Q$  点处变轨进入以  $F$  为圆心的圆形轨道 III 绕月球飞行, 设圆形轨道 I 的半径为  $R$ , 圆形轨道 III 的半径为  $r$ , 则下列结论中正确的序号为



- ①轨道 II 的焦距为  $R-r$ ;    ②若  $R$  不变,  $r$  越大, 轨道 II 的短轴长越小;  
③轨道 II 的长轴长为  $R+r$ ;    ④若  $r$  不变,  $R$  越大, 轨道 II 的离心率越大.

- A. ①②③                      B. ①②④                      C. ①③④                      D. ②③④

11. 已知函数  $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$  与直线  $y = a$  ( $0 < a < 2$ ) 在第一象限的交点横坐标从小到大依次分别为  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , 则  $f(x_1 - 2x_2 - 3x_3) =$

- A. -1                      B. 0                      C. 1                      D.  $\sqrt{3}$

12. 已知直线  $l: x - y + 4 = 0$  与  $x$  轴相交于点  $A$ , 过直线  $l$  上的动点  $P$  作圆  $x^2 + y^2 = 4$  的两条切线, 切点分别为  $C, D$  两点, 记  $M$  是  $CD$  的中点, 则  $|AM|$  的最小值为

- A.  $2\sqrt{2}$                       B.  $3\sqrt{2}$                       C.  $\sqrt{17}$                       D. 3

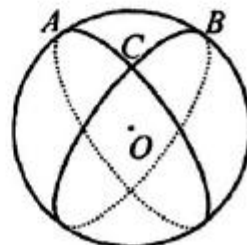
二. 填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知单位向量  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ , 若  $|\vec{e}_1 + \vec{e}_2| = 1$ , 则  $|\vec{e}_1 - \vec{e}_2| =$  \_\_\_\_\_.

14. 等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_6 = 9S_3, S_3 = \lambda a_3$ , 则  $\lambda =$  \_\_\_\_\_.

15. 设双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ , 圆  $(x-c)^2 + y^2 = 4c^2$  与双曲线  $C$  在第一象限的交点为  $A$ , 若  $AF_1$  与双曲线  $C$  的一条渐近线  $l$  垂直, 则  $l$  的方程为 \_\_\_\_\_.

16. 球面几何学是几何学的一个重要分支, 在航海、航空、卫星定位等方面都有广泛的应用, 如图,  $A, B, C$  是球面上不同的大圆 (大圆是过球心的平面与球面的交线) 上的三点, 经过这三个点中任意两点的大圆的劣弧分别为  $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$ , 由这三条劣弧围成的图形称为球面  $\triangle ABC$ . 已知地球半径为  $R$ , 北极为点  $N$ ,  $P, Q$  是地球表面上的两点. 若  $P, Q$  在赤道上, 且  $|PQ| = \sqrt{2}R$ , 则球面  $\triangle NPQ$  的面积为 \_\_\_\_\_;



若  $NP = PQ = QN = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$ , 则球面  $\triangle NPQ$  的面积为 \_\_\_\_\_.

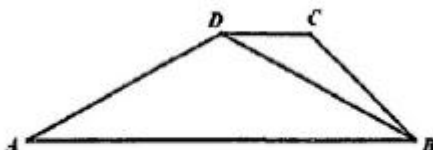
三. 解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17-21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答; 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分) 如图, 在梯形  $ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ ,  $\angle BCD = 135^\circ$ ,  $BD = \sqrt{5}CD = \sqrt{10}$ .

(I) 求  $\sin \angle CBD$  的值;

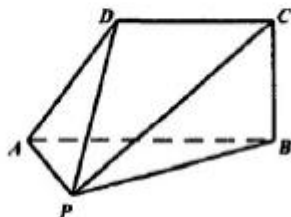
(II) 若  $\triangle ABD$  的面积为 4, 求  $AD$  的长.



18. (12 分) 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $BC \perp$  平面  $PAB$ ,  $AB \parallel CD$ , 若  $DC = DP = 2$ ,  $BC = \sqrt{2}$ ,  $AP = 1$ ,  $AB = 3$ .

(I) 求证:  $AP \perp AB$ ;

(II) 求直线  $PC$  与平面  $ADP$  所成的角的正弦值.

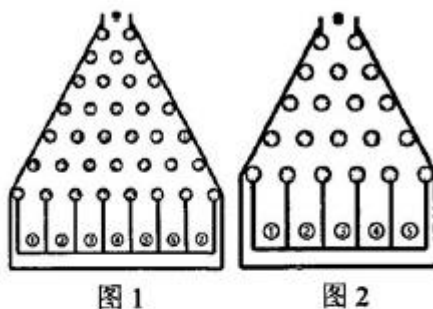


19. (12 分) 已知抛物线  $C: x^2 = 4y$ , 过点  $P(1, -2)$  作斜率为  $k (k > 0)$  的直线  $l$  与抛物线  $C$  相交于  $A, B$  两点.

(I) 求  $k$  的取值范围;

(II) 记  $P$  点关于  $x$  轴的对称点为  $Q$  点, 若  $\triangle QAB$  的面积为 16, 求直线  $l$  的方程.

20. (12 分) 高尔顿板是英国生物统计学家高尔顿设计用来研究随机现象的模型, 在一块木板上钉着若干排相互平行但相互错开的圆柱形小木块, 小木块之间留有适当的空隙作为通道, 前面挡有一块玻璃, 让一个小球从高尔顿板上方的通道口落下, 小球在下落的过程中与每层小木块碰撞, 且等可能向左或向右滚下, 最后掉入高尔顿板下方的某一个球槽内, 如图 1 所示的高尔顿板有 7 层小木块, 小球从通道口落下, 第一次与第 2 层中间的小木块碰撞, 以 0.5 的概率向左或向右滚下, 依次经过六次与小木块碰撞, 最后掉入编号为 1, 2, 3, ..., 7 的球槽内. 例如小球要掉入 3 号球槽内, 则在 6 次碰撞中有 2 次向右 4 次向左滚下.



(I) 如图 1, 进行一次高尔顿板试验, 求小球落入 5 号球槽内的概率;

(II) 小红、小明同学在研究了高尔顿板后, 利用高尔顿板来到社团文化节上进行盈利性“抽奖”活动, 小红使用图 1 所示的高尔顿板, 付费 6 元可以玩一次游戏, 小球掉入  $m$  号球槽得到的奖金为  $X$  元, 其中  $X = |16 - 4m|$ . 小明改进了高尔顿板, 如图 2, 首先将小木块减少成 5 层, 然后使小球在下落的过程中与小木块碰撞时, 有  $\frac{1}{3}$  的概率向左滚下, 有  $\frac{2}{3}$  的概率向右滚下, 最后掉入编号为 1, 2, 3, 4, 5 的球槽内. 改进高尔顿板只需要付费 4 元就可以玩一次游戏, 小球掉入  $n$  号球槽得到的奖金为  $Y$  元, 其中  $Y = (n - 4)^2$ . 两位同学的高尔顿板游戏火热进行. 很多同学参加了游戏, 你觉得小红和小明同学谁的盈利多? 请说明理由.

21. (12分) 已知定义在实数集  $\mathbb{R}$  上的偶函数  $f(x)$  的最小值为 3, 且当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = 3e^x + a$ , 其中  $e$  是自然对数的底数.

(I) 求函数  $f(x)$  的解析式;

(II) 求最大的整数  $m(m > 1)$ , 使得存在  $t \in \mathbb{R}$ , 只要  $x \in [1, m]$ , 就有  $f(x+t) \leq 3ex$ .

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (10分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C_1$  的参数方程为: 
$$\begin{cases} x = 1 + 2\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \end{cases} \quad (\alpha \text{ 为参数}),$$
 以坐标原点为极点,  $x$  轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C_2$  的极坐标方程为:  $\theta = \theta_0 (\theta_0 \in [0, \pi), \rho \in \mathbb{R})$ .

(I) 求曲线  $C_1$  的极坐标方程;

(II) 设  $A, B$  是曲线  $C_1, C_2$  的公共点, 若  $\frac{1}{|OA|} + \frac{1}{|OB|} = \frac{4}{3}$ , 求曲线  $C_2$  的直角坐标方程.

23. (10分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数  $f(x) = |x-3| + 2|x-1|$ .

(I) 求  $f(x)$  的最小值  $m$ ;

(II) 已知  $a > 0, b \geq 0$ , 若  $a + 2b = m$  时, 正常数  $t$  使得  $ta + ab$  的最大值为 2, 求  $t$  的值.



## NCS20210607 项目第三次模拟测试卷 理科数学参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	B	D	C	A	C	A	B	C	D	A

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分。

13.  $\sqrt{3}$                       14.  $\frac{7}{4}$                       15.  $4x+3y=0$                       16.  $\frac{1}{2}\pi R^2; \pi R^2$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17 题-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22 题、23 题为选考题，考生根据要求作答。

17. 【解析】(I) 在  $\triangle BCD$  中，由正弦定理知， $\frac{BD}{\sin \angle BCD} = \frac{CD}{\sin \angle CBD}$ ，.....2 分

所以  $BD \cdot \sin \angle CBD = CD \cdot \sin \angle BCD$ ，

因为  $\angle BCD = \frac{3\pi}{4}$ ， $BD = \sqrt{5}CD = \sqrt{10}$  .....3 分

即  $\sin \angle CBD = \frac{\sqrt{10}}{10}$ . .....5 分

(II) 因为  $\sin \angle CBD = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ，所以  $\cos \angle CBD = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ ， .....6 分

所以  $\sin \angle ABD = \sin(\frac{\pi}{4} - \angle CBD) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， .....8 分

所以  $\cos \angle ABD = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ， .....9 分

因为  $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot \sin \angle ABD = 4$ ，所以  $AB = 4\sqrt{2}$ ， .....10 分

所以  $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos \angle ABD = 10$ ，所以  $AD = \sqrt{10}$  .....12 分

18. 【解析】(I) 如图，过点  $D$  作  $AB$  的垂线，垂足为  $E$ ，  
因为  $BC \perp$  平面  $PAB$ ，所以  $BC \perp AB$ ， $BC \perp AP$ ， .....2 分

所以  $BC \parallel DE$ ，因为  $BC = \sqrt{2}$ ， $DC = 2$ ， $AB = 3$ ，

所以  $DE = \sqrt{2}$ ,  $AE = 1$ , 则  $AD = \sqrt{3}$ .

因为  $AP = 1$ ,  $DP = 2$ , 所以  $AD^2 + AP^2 = DP^2$ , .....4分

即  $AP \perp AD$ , 因为  $BC$  与  $AD$  相交,

所以  $AP \perp$  平面  $ABCD$ , 所以  $AP \perp AB$ ; .....6分

(II) 如图, 建立空间直角坐标系,

则  $A(0,0,0)$ ,  $P(1,0,0)$ ,  $D(0,1,\sqrt{2})$ ,  $C(0,3,\sqrt{2})$ ,

所以  $\overrightarrow{AP} = (1,0,0)$ ,  $\overrightarrow{AD} = (0,1,\sqrt{2})$ ,  $\overrightarrow{PC} = (-1,3,\sqrt{2})$ ,

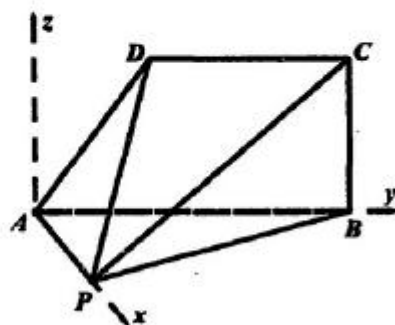
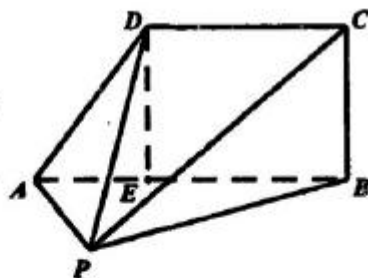
设平面  $ADP$  的法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ ,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} x = 0 \\ y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases},$$

令  $z = \sqrt{2}$ , 则  $\vec{n} = (0, -2, \sqrt{2})$ ,

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{PC} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{PC}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{PC}|} = \frac{-4}{\sqrt{6} \times 2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{3},$$

所以直线  $PC$  与平面  $ADP$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ . .....12分



19. 【解析】(I) 由题意设直线  $l$  的方程为  $y + 2 = k(x - 1)$ ,

$$\text{由 } \begin{cases} y + 2 = k(x - 1) \\ x^2 = 4y \end{cases}, \text{ 得到: } x^2 - 4kx + 4k + 8 = 0 \quad \dots\dots\dots 2\text{分}$$

由题意知  $\Delta > 0$ , 所以  $k^2 - k - 2 > 0$ , 即  $k < -1$  或  $k > 2$ , .....4分

因为  $k > 0$ , 所以  $k$  的取值范围为  $(2, +\infty)$ . .....5分

(II) 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 由 (I) 知  $x_1 + x_2 = 4k$ ,  $x_1 x_2 = 4k + 8$ , .....6分

$$\text{因为 } S_{\Delta OAB} = |S_{\Delta POA} - S_{\Delta POB}| = \frac{1}{2} |PQ| |x_1 - x_2| = 2\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}, \quad \dots\dots\dots 9\text{分}$$

所以  $2\sqrt{16k^2 - 4(4k + 8)} = 8\sqrt{k^2 - k - 2} = 16$ , 即  $k^2 - k - 6 = 0$ ,

所以  $k = 3$  或  $k = -2$ , 因为  $k > 2$ , 所以  $k = 3$ ,

则直线  $l$  的方程为  $3x - y - 5 = 0$ . .....12分

20. 【解析】(I) 设这个小球掉入5号球槽为事件  $A$ . 掉入5号球槽, 需要向右4次向左2次, 所以

$$P(A) = C_6^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{64}. \text{ 所以这个小球掉入5号球槽的概率为 } \frac{15}{64}. \quad \dots\dots\dots 4\text{分}$$

(II) 小红的收益计算如下: 每一次游戏中,  $X$  的可能取值为0, 4, 8, 12.

$$P(X = 0) = P(m = 4) = C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16},$$

$$P(X = 4) = P(m = 3) + P(m = 5) = C_6^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_6^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{32},$$

$$P(X=8) = P(m=2) + P(m=6) = C_6^1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_6^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16},$$

$$P(X=12) = P(m=1) + P(m=7) = C_6^0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + C_6^6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{32}.$$

$X$	0	4	8	12
$P$	$\frac{5}{16}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{32}$

$$\text{一次游戏付出的奖金 } EX = 0 \times \frac{5}{16} + 4 \times \frac{15}{32} + 8 \times \frac{3}{16} + 12 \times \frac{1}{32} = \frac{15}{4},$$

则小红的收益为  $6 - \frac{15}{4} = \frac{9}{4}$ . .....8分

小明的收益计算如下：每一次游戏中， $Y$ 的可能取值为0, 1, 4, 9.

$$P(Y=0) = P(n=4) = C_4^3 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81},$$

$$P(Y=1) = P(n=3) + P(n=5) = C_4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + C_4^1 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{40}{81},$$

$$P(Y=4) = P(n=2) = C_4^1 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{81},$$

$$P(Y=9) = P(n=1) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}.$$

$Y$	0	1	4	9
$P$	$\frac{32}{81}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

$$\text{一次游戏付出的奖金 } EY = 0 \times \frac{32}{81} + 1 \times \frac{40}{81} + 4 \times \frac{8}{81} + 9 \times \frac{1}{81} = 1, \text{ 则小明的收益为 } 4 - 1 = 3.$$

因为  $3 > \frac{9}{4}$ , 所以小明的盈利多. ....12分

21. 【解析】(I) 因为  $y = e^x$  是增函数, 所以当  $x \geq 0$  时,  $f(x)$  也是增函数,

又因为  $f(x)$  为偶函数, 所以  $f(x)_{\min} = f(0) = 3 + a = 3$ , 即  $a = 0$ , .....2分

当  $x \in (-\infty, 0)$  时,  $-x > 0$ , 所以  $f(x) = f(-x) = 3e^{-x}$ ,

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} 3e^x, & x \geq 0 \\ 3e^{-x}, & x < 0 \end{cases} \text{ .....5分}$$

(II) 因为  $x \in [1, m]$ , 都有  $f(x+t) \leq 3ex$ , 所以  $f(1+t) \leq 3e$ ,

当  $1+t \geq 0$  时,  $3e^{1+t} \leq 3e$ , 则  $0 \leq 1+t \leq 1$ , 即  $-1 \leq t \leq 0$ ,

当  $1+t < 0$  时, 同理可得  $-2 \leq t < -1$ ,

所以  $-2 \leq t \leq 0$ . .....7分

同样地, 由  $f(m+t) \leq 3em$  及  $m \geq 2$ , 得到  $e^t \leq \frac{em}{e^m}$ ,

当  $-2 \leq t \leq 0$ ,  $e^t$  存在的最小值为  $e^{-2}$ ,

由题意知,  $e^{-2} \leq \frac{em}{e^m}$ , 即  $e^m - e^3 m \leq 0$ , .....9分

令  $g(m) = e^m - e^3 m, m \in [2, +\infty)$ , 则  $g'(m) = e^m - e^3$ ,

当  $m \in [2, 3)$  时,  $g'(m) < 0$ , 所以  $g(m)$  在  $[2, 3)$  上单调递减,

当  $m \in (3, +\infty)$  时,  $g'(m) > 0$ , 所以  $g(m)$  在  $(3, +\infty)$  上单调递增,

因为  $g(2) = e^2(1-2e) < 0$ ,  $g(4) = e^3(e-4) < 0$ ,  $g(5) = e^3(e^2-5) > 0$ ,

所以存在  $m_0 \in (4, 5)$ , 使得  $g(m_0) = 0$ , 所以  $e^m - e^3 m \leq 0$  的解集为  $m \leq m_0$ ,

所以  $m$  的最大正整数为 4. ....12分

22. 【解析】(I) 曲线  $C_1$  的直角坐标方程为  $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ , .....2分

所以曲线  $C_1$  的极坐标方程为  $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 3 = 0$ . ....4分

(II) 因为曲线  $C_2$  的极坐标方程为  $\theta = \theta_0$ , 由  $\begin{cases} \rho^2 - 2\rho \cos \theta - 3 = 0 \\ \theta = \theta_0 \end{cases}$ ,

得到  $\rho^2 - 2\rho \cos \theta_0 - 3 = 0$ , .....6分

设  $|OA| = |\rho_A|$ ,  $|OB| = |\rho_B|$ , 则  $\rho_A + \rho_B = 2 \cos \theta_0$ ,  $\rho_A \cdot \rho_B = -3$ ,

则  $\rho_A, \rho_B$  异号, 不妨设  $\rho_A > 0, \rho_B < 0$ ,

则  $|OA| + |OB| = |\rho_A - \rho_B| = \sqrt{(\rho_A + \rho_B)^2 - 4\rho_A \rho_B} = \sqrt{4 \cos^2 \theta_0 + 12}$ . ....8分

所以  $\frac{1}{|OA|} + \frac{1}{|OB|} = \frac{|OA| + |OB|}{|OA||OB|} = \frac{\sqrt{4 \cos^2 \theta_0 + 12}}{|\rho_A \rho_B|} = \frac{\sqrt{4 \cos^2 \theta_0 + 12}}{3} = \frac{4}{3}$ ,

则  $\cos \theta_0 = \pm 1$ , 因为  $\theta_0 \in [0, \pi)$ , 所以  $\theta_0 = 0$ ,

所以曲线  $C_2$  的直角坐标方程为  $y = 0$ . ....10分

23. 【解析】(I) 因为  $f(x) = |x-3| + 2|x-1| = \begin{cases} 5-3x & x < 1 \\ x+1 & 1 \leq x \leq 3 \\ 3x-5 & x > 3 \end{cases}$ , .....3分

所以当  $x = 1$  时,  $f(x)_{\min} = m = 2$ . ....5分

(II) 因为  $m = 2$ , 所以  $a + 2b = 2$ , 则  $a + 2(b+t) = 2t + 2$ , .....6分

又因为  $a + 2(b+t) \geq 2\sqrt{2a(b+t)}$ , 所以  $2t + 2 \geq 2\sqrt{2a(b+t)}$ ,

则  $at + ab = a(b+t) \leq \frac{(t+1)^2}{2}$ , 所以  $\frac{(t+1)^2}{2} = 2$ , 则  $t = 1$  或  $t = -3$  (舍),

.....9分

当且仅当  $a = 2(b+1)$ , 即  $a = 2, b = 0$  时, 等号成立. ....10分



## 关于我们

**自主选拔在线**（原自主招生在线）创办于2014年，历史可追溯至2008年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超1亿量级。用户群体涵盖全国31省市，全国超95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承“专业、专注、有态度”的创办公念，不断探索“K12教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。



 微信搜一搜

 自主选拔在线