数学 · 答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. B　　2. C　　3. D　　4. C　　5. C　　6. A

7. A　　8. B

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. CD　　10. ABD　　11. ABC　　12. ABD

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 3　　14. $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

15. $\dfrac{1}{8}$　　16. $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right]$

四、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **解析**　(Ⅰ)由题意 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{4}ab\tan C$,

所以 $\dfrac{\sin C}{\tan C}=\cos C=\dfrac{1}{2}$, ………………………………（2 分）

因为 $C\in(0,\pi)$,所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$. ………………………………（4 分）

(Ⅱ)由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab$, ………………………………（5 分）

又 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{6}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ab$,所以 $ab=\dfrac{2}{3}$. ………………………………（7 分）

因为 D 为边 AB 的中点,所以 $\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$, ………………………………（8 分）

所以 $|\overrightarrow{CD}|^2=\dfrac{1}{4}\left(|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{CB}|^2+2|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cos\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{4}(b^2+a^2+ab)=\dfrac{1}{4}(c^2+2ab)=\dfrac{7}{12}$, ………（9 分）

则 $CD=\dfrac{\sqrt{21}}{6}$. ………………………………（10 分）

18. **解析**　(Ⅰ)如图,连接 B_1D_1.

因为 E,F,G,H 均为所在棱的中点,

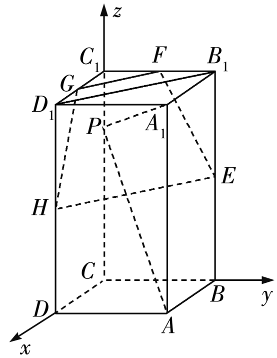
所以 $EB_1/\!/D_1H$ 且 $EB_1=D_1H$,即四边形 EB_1D_1H 为平行四边形, ………………………………（2 分）

故 $B_1D_1/\!/EH$. ………………………………（3 分）

又可得 $FG/\!/B_1D_1$,所以 $FG/\!/EH$, ………………………………（4 分）

所以 E,F,G,H 四点在同一个平面内. ………………………………（5 分）

(Ⅱ)在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,CB,CD,CC_1 两两互相垂直,故以 C 为坐标原点,$\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CC_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $Cxyz$. ………………………………（6 分）



由 $AB=2,AA_1=4$,可知 $A(2,2,0),E(0,2,2),F(0,1,4),A_1(2,2,4)$,则 $\overrightarrow{EF}=(0,-1,2)$,

设 $P(0,0,t)(0\leqslant t\leqslant 4)$,则 $\overrightarrow{PA_1}=(2,2,4-t)$. ……………………………………………………………… (7 分)

因为 $A_1P\perp$ 平面 $EFGH$,所以 $\overrightarrow{PA_1}\cdot\overrightarrow{EF}=0$,即 $-2+2(4-t)=0$,得 $t=3$. ………………………………… (8 分)

所以 $\overrightarrow{PA}=(2,2,-3)$. …………………………………………………………………………………………… (9 分)

易得平面 B_1BCC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$. …………………………………………………………………… (10 分)

设 AP 与平面 B_1BCC_1 所成的角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PA},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PA}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{17}\times 1}=\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$. ……………………………………………………… (12 分)

19. **解析** (Ⅰ)由已知得 $b_{n+1}=a_{2n+1}=\dfrac{1}{4}a_{2n}=\dfrac{1}{4}\times 2a_{2n-1}=\dfrac{1}{2}b_n$, ………………………………………………… (2 分)

所以$\{b_n\}$是首项为 $b_1=a_1=2$,公比为$\dfrac{1}{2}$的等比数列, ……………………………………………………… (3 分)

所以 $b_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$. ………………………………………………………………………………………… (5 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知 $c_n=\dfrac{(n+2)b_{n+1}}{n(n+1)}=\dfrac{n+2}{n(n+1)2^{n-1}}=\dfrac{1}{n\times 2^{n-2}}-\dfrac{1}{(n+1)2^{n-1}}$, …………………………… (8 分)

所以 $c_1=\dfrac{1}{1\times 2^{-1}}-\dfrac{1}{2\times 2^0},c_2=\dfrac{1}{2\times 2^0}-\dfrac{1}{3\times 2^1},\cdots,c_n=\dfrac{1}{n\times 2^{n-2}}-\dfrac{1}{(n+1)2^{n-1}}$, ……………………… (9 分)

所以 $c_1+c_2+\cdots+c_{n-1}+c_n=\dfrac{1}{1\times 2^{-1}}-\dfrac{1}{(n+1)2^{n-1}}=2-\dfrac{1}{(n+1)2^{n-1}}<2$. ……………………………… (12 分)

20. **解析** (Ⅰ)当 $a=\mathrm{e}$ 时,$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-2x,f(1)=-\dfrac{3}{2}$, ……………………………………………………… (1 分)

$f'(x)=\dfrac{1}{x}+x-2,f'(1)=0$, ………………………………………………………………………………………… (3 分)

所以切线方程为 $y-\left(-\dfrac{3}{2}\right)=0\times(x-1)$,即 $y=-\dfrac{3}{2}$. …………………………………………………………… (4 分)

(Ⅱ)$f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}+x-\dfrac{1+\ln a}{\ln a}=\dfrac{x^2\ln a-(1+\ln a)x+1}{x\ln a}=\dfrac{(x\ln a-1)(x-1)}{x\ln a},x>0$, ………………… (5 分)

令 $f'(x)=0$,则 $x=1$ 或 $x=\dfrac{1}{\ln a}$. ……………………………………………………………………………… (6 分)

①当 $1<a<\mathrm{e}$ 时,$\dfrac{1}{\ln a}>1$,

可知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增,在 $\left(1,\dfrac{1}{\ln a}\right)$ 单调递减,在 $\left(\dfrac{1}{\ln a},+\infty\right)$ 单调递增,

故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点,不符合条件; …………………………………………………………………… (8 分)

②当 $a=\mathrm{e}$ 时,$f'(x)\geqslant 0$,无极值点; ……………………………………………………………………………… (9 分)

③当 $a>\mathrm{e}$ 时,$\dfrac{1}{\ln a}<1$,

可知 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{\ln a}\right)$ 单调递增,在 $\left(\dfrac{1}{\ln a},1\right)$ 单调递减,在 $(1,+\infty)$ 单调递增,

故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点,符合条件. ……………………………………………………………………………… (11 分)

综上,a 的取值范围为 $(\mathrm{e},+\infty)$. ……………………………………………………………………………………… (12 分)

21. **解析** (Ⅰ)设小明第一轮答对的题数为 ξ,

由条件可知 $\xi\sim B\left(n,\dfrac{1}{3}\right)$,则 $E(\xi)=\dfrac{n}{3}$, …………………………………………………………………… (2 分)

因为 $X=5\xi$,所以 $E(X)=5E(\xi)=\dfrac{5n}{3}$,

因此,当 $n=30$ 时,$E(X)=50$. ……………………………………………………………………………………………… (4 分)

(Ⅱ)设小明第二轮答对的题数为 η,则 η 的所有可能取值为 $0,1,2,\cdots,n$,

且 $P(\eta=0)=\dfrac{1}{3}$,$P(\eta=1)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}$,$P(\eta=2)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}$,$\cdots$,$P(\eta=n-1)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\times\dfrac{1}{3}$,$P(\eta=n)=$

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, …… (6 分)

所以 $E(\eta)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{2}{3}+\cdots+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\times\dfrac{n-1}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\times n$,① ……………………………… (7 分)

$\dfrac{2}{3}E(\eta)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\dfrac{2}{3}+\cdots+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\times\dfrac{n-1}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\times n$,②

①－②得 $\dfrac{1}{3}E(\eta)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}+\cdots+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\times\dfrac{1}{3}$,

所以 $E(\eta)=\dfrac{2}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

$$=\frac{\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}}$$

$=2\left[1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$. ……………………………………………………………………………………………… (9 分)

因为 $Y=20\eta$,所以 $E(Y)=20E(\eta)=40\left[1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$. ……………………………………………………… (10 分)

当 $n\geqslant 24$ 时,$E(X)=\dfrac{5n}{3}\geqslant 40$,$E(Y)<40$,

即 $E(X)>E(Y)$ 得证. ……………………………………………………………………………………………………… (12 分)

22. **解析** (Ⅰ)由题意可知直线 AB 的方程为 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}y+\dfrac{p}{2}$, ……………………………………………… (1 分)

联立 $\begin{cases}y^2=2px,\\ x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}y+\dfrac{p}{2},\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-\dfrac{2\sqrt{3}p}{3}y-p^2=0$,

设点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,不妨设 A 在第一象限,则 $y_1=\sqrt{3}p$,$y_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}p$, ……………………… (2 分)

所以$|AB|=\frac{2}{\sqrt{3}}(y_1-y_2)=\frac{16}{3}$,即$\frac{8}{3}p=\frac{16}{3}$,得$p=2$, ……………………………………………………………… (4 分)

所以E的方程为$y^2=4x$. ……………………………………………………………………………………………… (5 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知圆$F:(x-1)^2+y^2=1$,设点$T(4a^2,4a)$,$P(4b^2,4b)$,$Q(4c^2,4c)$,

则直线PT的方程为$x-(a+b)y+4ab=0$,直线QT的方程为$x-(a+c)y+4ac=0$,直线PQ的方程为$x-(b+c)y+4bc=0$,

由PQ的方程可得$M(-4bc,0)$,$N\left(0,\frac{4bc}{b+c}\right)$,则$\triangle MON$的面积为$-\frac{8b^2c^2}{b+c}>0$,所以$b+c<0$. ………… (7 分)

因为PT与圆F相切,所以点F到直线PT的距离为$\frac{|1+4ab|}{\sqrt{(a+b)^2+1}}=1$, ……………………………………… (8 分)

整理得$(16a^2-1)b^2+6ab-a^2=0$,同理$(16a^2-1)c^2+6ac-a^2=0$,

所以$b+c=-\frac{6a}{16a^2-1}<0$,$bc=-\frac{a^2}{16a^2-1}<0$,得$a>\frac{1}{4}$, ……………………………………………………… (9 分)

$\triangle MON$的面积化为$\frac{4a^3}{3(16a^2-1)}$. ……………………………………………………………………………… (10 分)

设$f(a)=\frac{4a^3}{3(16a^2-1)}$,则$f'(a)=\frac{4a^2(16a^2-3)}{3(16a^2-1)^2}$,

令$f'(a)=0$,得$a=\frac{\sqrt{3}}{4}$,所以$f(a)$在$\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$单调递减,在$\left(\frac{\sqrt{3}}{4},+\infty\right)$单调递增, …………………… (11 分)

故$\triangle MON$面积的最小值为$f\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{32}$. …………………………………………………………… (12 分)