

第 40 届全国中学生物理竞赛决赛理论考试参考答案

(2023.10 试用版)

一、(40 分) 雨后天晴, 空气内悬浮着大量小水滴, 若阳光从背后以低角度照射, 观察者便可能观察到彩虹 (图 1a)。有时会同时出现两条彩虹, 内层彩虹称为主虹 (1 级虹), 它来自阳光进入水滴后的一次反射; 在主虹外边较暗的虹称为副虹或霓 (2 级虹), 它来自阳光在水滴内的两次反射。光线在水滴内还可能发生三次及以上的反射, 并产生相应级次的虹。在自然界中通常只能观察到 1 级和 2 级虹, 更高级次的虹可以在实验室环境下呈现。



图 1a 大自然中的彩虹

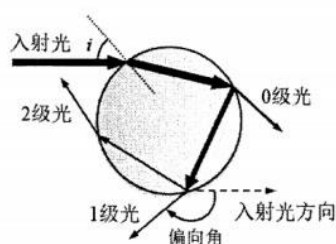


图 1b 一根光线经过水滴的折射、反射和出射

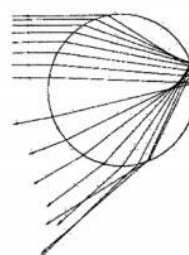


图 1c 平行光照射到水滴后的 1 级光

考虑一个球形水滴, 直径为 $10^2 \mu\text{m}$ 量级。如图 1b, 一根入射光线与球心确定一个平面, 该平面与球形水滴表面相交形成一个圆 (大圆), 进入水滴的光线经折射、反射后的出射光都在此平面内。把光线在水滴内经过 k ($k=0, 1, 2, \dots$) 次反射后的出射光称为 k 级光, 出射光相对入射光方向偏转的角度称为偏向角 (见图 1b)。

(1) 已知入射光线在水滴外表面上的入射角为 i , 空气和水的折射率分别为 1 和 n 。试求 k 级光的偏向角 θ_k 的表达式。

(2) 当一束单色平行光照射水滴时, 不同入射位置对应不同入射角 (见图 1c)。当入射角 i 变化时, k 级光的偏向角 θ_k 有一极小值 θ_{km} , 试求 θ_{km} 及其对应的入射角 i_k 的表达式。

(3) 由于色散, 不同波长的光在水中的折射率 n 不同。对于确定的入射角 i , 试求 k 级光偏向角 θ_k 对折射率 n 的变化率 $\frac{d\theta_k}{dn}$ 与入射角 i 的关系式, 并求当 i 取第 (2) 问中的 i_k 时 $\left. \frac{d\theta_k}{dn} \right|_{i=i_k}$ 的表达式。

(4) 图 1c 是单色平行光照射到水滴后出射的 1 级光示意图, 在 1 级光偏向角极小值 θ_{1m} 附近出射的光线较为集中, 即光强较大, 此处出现 1 级虹, 相应偏向角的极小值 θ_{1m} 为 1 级虹的偏向角, 类似地 θ_{km} 为 k 级虹的偏向角。当白光平行入射时, 取红光和紫光在水中的折射率分别为 $n_{\text{红}} = 1.329$ 和 $n_{\text{紫}} = 1.344$, 试分别计算 $k=1$ 和 $k=2$ 级虹的偏向角 $\theta_{km}^{\text{红}}$ 和 $\theta_{km}^{\text{紫}}$ 以及虹的角宽度 δ_k ($\delta_k = |\theta_{km}^{\text{紫}} - \theta_{km}^{\text{红}}|$), 并分别指出它们从内到外颜色排列的次序。角度的计算结果以度 ($^\circ$) 为单位, 精确到 0.01° 。

(5) 透过偏振片观察彩虹, 可发现彩虹的光是偏振光。设入射到水滴的光为单色自然光, 出射光中 s 偏振 (偏振方向垂直于入射面) 的光强为 I_s , p 偏振 (偏振方向平行于入射面) 的光强为 I_p , 光的偏振度定义为 $P = \frac{|I_s - I_p|}{I_s + I_p}$ 。当入射光为红光 ($n_{\text{水}} = 1.329$) 时, 试分别计算 $k=1$ 和 $k=2$ 级虹出射光的偏振度 P_k 。

提示: 当光从折射率为 n_1 的介质射向折射率为 n_2 的介质, 入射角和折射角分别为 φ_1 和 φ_2 , 对于 s 偏振, 反射光和折射光的电场振幅与入射光的电场振幅之比分别为

$$r_s = \frac{n_1 \cos \varphi_1 - n_2 \cos \varphi_2}{n_1 \cos \varphi_1 + n_2 \cos \varphi_2}, \quad t_s = \frac{2n_1 \cos \varphi_1}{n_1 \cos \varphi_1 + n_2 \cos \varphi_2}$$

对于 p 偏振, 反射光和折射光的电场振幅与入射光的电场振幅之比分别为

$$r_p = \frac{n_2 \cos \varphi_1 - n_1 \cos \varphi_2}{n_2 \cos \varphi_1 + n_1 \cos \varphi_2}, \quad t_p = \frac{2n_1 \cos \varphi_1}{n_2 \cos \varphi_1 + n_1 \cos \varphi_2}$$

(6) 在某些条件下可观察到紧靠虹的边缘出现额外的彩色条纹, 该现象称为“附属虹”, 如图 1d 所示。试定性解释附属虹产生的原因。



图 1d

参考解答:

(1) 入射角为 i , 设折射角为 r , 由折射定律

$$\sin i = n \sin r \quad \text{①}$$

光线每经过一次折射偏转的角度为 $(i-r)$, 每经过一次反射偏转的角度为 $(\pi-2r)$, 所以 k 级出射光的偏向角为

$$\theta_k = 2(i-r) + k(\pi-2r) = k\pi + 2i - 2(k+1)r \quad \text{②}$$

将①式代入得

$$\theta_k = k\pi + 2i - 2(k+1) \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin i\right) \quad \text{③}$$

(2) 由②式, θ_k 取极小值要求

$$\frac{d\theta_k}{di} = 2 - 2(k+1) \frac{dr}{di} = 0 \quad \text{④}$$

由①式可得

$$\frac{dr}{di} = \frac{\cos i}{n \cos r} = \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \quad \text{⑤}$$

代入④式得

$$2 - 2(k+1) \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = 0 \quad \text{⑥}$$

【或: 利用求导公式 $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 直接由③式得

$$\frac{d\theta_k}{di} = 2 - 2(k+1) \frac{\cos i/n}{\sqrt{1-(\sin i/n)^2}} = 2 - 2(k+1) \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = 0, \quad \text{⑥'}$$

】
解得

$$i_k = \arccos \sqrt{\frac{n^2-1}{k(k+2)}} = \arcsin \sqrt{1 - \frac{n^2-1}{k(k+2)}} \quad (7)$$

代入③式得

$$\theta_{km} = k\pi + 2 \arccos \sqrt{\frac{n^2-1}{k(k+2)}} - 2(k+1) \arcsin \left(\frac{1}{n} \sqrt{1 - \frac{n^2-1}{k(k+2)}} \right) \quad (8)$$

(3) 由②式, θ_k 对折射率 n 的变化率

$$\frac{d\theta_k}{dn} = -2(k+1) \frac{dr}{dn} \quad (9)$$

由①式可得

$$\frac{dr}{dn} = -\frac{\sin r}{n \cos r} = -\frac{\sin i}{n \sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \quad (10)$$

代入⑨式得

$$\frac{d\theta_k}{dn} = \frac{2(k+1)}{n} \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \quad (11)$$

【或：利用求导公式 $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 直接由③式得

$$\frac{d\theta_k}{dn} = -2(k+1) \frac{(-1/n^2) \sin i}{\sqrt{1 - (\sin i/n)^2}} = \frac{2(k+1)}{n} \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \quad (11')$$

】

当 $i = i_k$ 时, 将⑦式代入得

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\theta_k}{dn} \right|_{i=i_k} &= \frac{2(k+1)}{n} \sqrt{\frac{1 - \frac{n^2-1}{k(k+2)}}{n^2 - 1 + \frac{n^2-1}{k(k+2)}}} = \frac{2(k+1)}{n} \sqrt{\frac{k(k+2) + 1 - n^2}{[k(k+2) + 1](n^2 - 1)}} \\ &= \frac{2}{n} \sqrt{\frac{(k+1)^2 - n^2}{n^2 - 1}} \end{aligned} \quad (12)$$

(4) 对于 $k=1$ 级 (虹), 由⑧式得

$$\theta_{1m}^{\text{红}} = 137.34^\circ, \quad \theta_{1m}^{\text{紫}} = 139.50^\circ \quad (13)$$

角宽度

$$\delta_1 = |\theta_{1m}^{\text{紫}} - \theta_{1m}^{\text{红}}| = 2.16^\circ \quad (14)$$

红色虹与紫色虹对观察者的张角分别为 $\pi - \theta_{1m}^{\text{红}} = 42.66^\circ$ 和 $\pi - \theta_{1m}^{\text{紫}} = 40.50^\circ$, 所以

紫色在内, 红色在外 (15)

对于 $k=2$ 级 (霓), 由⑧式得

$$\theta_{2m}^{\text{红}} = 229.84^\circ, \quad \theta_{2m}^{\text{紫}} = 233.73^\circ \quad (16)$$

角宽度

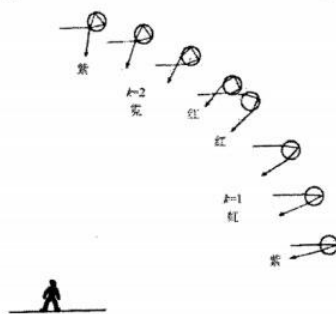
$$\delta_2 = |\theta_{2m}^{\text{紫}} - \theta_{2m}^{\text{红}}| = 3.89^\circ \quad (17)$$

红色霓与紫色霓对观察者的张角分别为

$\theta_{2m}^{\text{红}} - \pi = 49.84^\circ$ 和 $\theta_{2m}^{\text{紫}} - \pi = 53.73^\circ$, 所以

红色在内, 紫色在外 (18)

附: 虹和霓的示意图如图



(5) 设入射光的 s 偏振和 p 偏振的电场振幅均为 E_0 ，对于 k 级虹，入射角为 i_k 、折射角为 r_k ，光经过从空气到水的折射、水中的 k 次反射和从水到空气的折射后，由菲涅尔公式，s 偏振和 p 偏振的电场振幅分别为

$$E_{sk} = \frac{2 \cos i_k}{\cos i_k + n \cos r_k} \left| \frac{n \cos r_k - \cos i_k}{n \cos r_k + \cos i_k} \right|^k \frac{2n \cos r_k}{n \cos r_k + \cos i_k} E_0 \quad (19)$$

$$E_{pk} = \frac{2 \cos i_k}{n \cos i_k + \cos r_k} \left| \frac{\cos r_k - n \cos i_k}{\cos r_k + n \cos i_k} \right|^k \frac{2n \cos r_k}{\cos r_k + n \cos i_k} E_0 \quad (20)$$

对于 $k=1$ 级（虹）， $i_1 = 59.64^\circ$ 、 $r_1 = 40.49^\circ$ ，代入⑬⑭式得

$$E_{1s} = 0.2963E_0, \quad E_{1p} = 0.0618E_0 \quad (21)$$

考虑到光强正比于电场振幅的平方

$$\frac{I_{s1}}{I_{p1}} = \frac{E_{s1}^2}{E_{p1}^2} = \frac{0.2963^2 E_0^2}{0.0618^2 E_0^2} = \frac{0.08779}{0.00382} \quad (22)$$

偏振度

$$P_1 = \frac{I_{s1} - I_{p1}}{I_{s1} + I_{p1}} = 91.65\% \quad (23)$$

对于 $k=2$ 级（霓）， $i_2 = 71.97^\circ$ 、 $r_2 = 45.68^\circ$ ，代入⑮⑯式得

$$E_{2s} = 0.1875E_0, \quad E_{2p} = 0.0625E_0, \quad (24)$$

考虑到光强正比于电场振幅的平方

$$\frac{I_{s2}}{I_{p2}} = \frac{E_{s2}^2}{E_{p2}^2} = \frac{0.1875^2 E_0^2}{0.0625^2 E_0^2} = \frac{0.03516}{0.00391} \quad (25)$$

偏振度

$$P_2 = \frac{I_{s2} - I_{p2}}{I_{s2} + I_{p2}} = 79.99\% \quad (26)$$

(6) 主虹附近出射光的波前，和入射光不同，它不再是一个平面波而是发生了扭曲，这个额外的光程差导致出射光线发生干涉，从而产生“附属虹”。

评分参考： 本题 40 分。

第 (1) 问 3 分，①②③式各 1 分；

第 (2) 问 6 分，④⑤式各 1 分，⑦⑧式各 2 分；

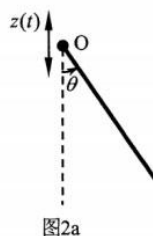
第 (3) 问 6 分，⑨⑩式各 1 分，⑪⑫式各 2 分；

第 (4) 问 10 分，⑬⑭式各 2 分，⑮⑯式各 1 分，⑰⑱式各 2 分；

第 (5) 问 12 分，⑲⑳㉑㉒㉓㉔式各 2 分；

第 (6) 问 3 分。

二、(50分)如图2a,一根长度为 l 、质量为 m 的匀质刚性细杆可绕过其一端的水平轴 O 转动。只考虑杆在垂直于转轴 O 的竖直平面内的运动,用杆与竖直向下方向之间的夹角 θ ($-\pi < \theta \leq \pi$,以逆时针方向为正)作为描述杆位置的坐标。忽略空气阻力和转轴的摩擦阻力。重力加速度大小为 g 。



已知杆的转轴 O 在竖直方向上作小振幅高频简谐振动,振动方程为 $z(t) = A \cos \omega t$,振幅 $A \ll l$,圆频率 $\omega \gg \sqrt{\frac{g}{l}}$ 。在随转轴 O 同步运动的平动参考系中讨论杆的运动。

(1) 试写出 $\theta(t)$ 满足的动力学方程。

(2) $\theta(t)$ 可表示为 $\varphi(t)$ 和 $\delta(t)$ 之和,其中 $\varphi(t)$ 表示平稳运动, $\delta(t)$ 表示圆频率为 ω 的高频小幅简谐振动。考虑到 $\omega \gg \sqrt{\frac{g}{l}}$ (即 $\varphi(t)$ 和 $\delta(t)$ 的特征频率相差若干个量级),在 $\delta(t)$ 变化的一个周期内, $\varphi(t)$ 可视为不变;高频运动对平稳运动的影响可以由其在在一个高频运动周期内的平均效果表示。在以上条件和近似下,导出 $\varphi(t)$ 满足的动力学方程。

(3) 由 $\varphi(t)$ 满足的动力学方程可知,杆的平稳运动等效于杆在一保守场中运动,试求相应的有效势能 $V_{\text{eff}}(\varphi)$ (取 $\varphi = 0$ 处势能为零)。

(4) 根据有效势能 $V_{\text{eff}}(\varphi)$,试确定杆的平衡位置 φ_0 ,并讨论各平衡位置的稳定性(不考虑参数取临界值时的情况);试求杆在各稳定平衡位置附近做小幅振动的频率。

(5) 初始时,杆位于转轴 O 的正下方,其初角速度 $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$ ($\omega_0 > 0$)。要使杆能运动至转轴 O 的正上方, ω_0 应大于一个临界值 ω_c ,试求 ω_c ;当 $\omega_0 < \omega_c$ 时,求杆能运动到的最大角度 φ_{max} 。

参考解答:

(1) 在转轴 O 平动非惯性系中,引入平动惯性力(以竖直向上为正)

$$F_{\text{in}} = -m\ddot{z} = m\omega^2 A \cos \omega t \quad ①$$

此平动惯性力等效作用于匀质杆质心,对杆有转动定理

$$-(mg - F_{\text{in}}) \frac{l}{2} \sin \theta = \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\theta} \quad ②$$

将①式代入得 $\theta(t)$ 的动力学方程

$$-(mg - m\omega^2 A \cos \omega t) \frac{l}{2} \sin \theta = \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\theta} \quad ③$$

(2) 将 $\theta = \varphi + \delta$ ($\delta \ll 1$)代入③式并展开至 δ 的一阶项,得

$$-(mg - m\omega^2 A \cos \omega t) \frac{l}{2} (\sin \varphi + \cos \varphi \cdot \delta) = \frac{1}{3} ml^2 (\ddot{\varphi} + \ddot{\delta}) \quad ④$$

即

$$-mg \frac{l}{2} \sin \varphi - mg \frac{l}{2} \cos \varphi \cdot \delta + m\omega^2 A \cos \omega t \frac{l}{2} \sin \varphi + m\omega^2 A \cos \omega t \frac{l}{2} \cos \varphi \cdot \delta = \frac{1}{3} ml^2 (\ddot{\varphi} + \ddot{\delta})$$

【解法一】

考虑到 $\delta(t)$ 是圆频率为 $\omega \gg \sqrt{g/l}$ 的高频小幅振动,某物理量 x 在一个高频振动周期

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ 内的时间平均为

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x(t') dt'$$

将④式在 $\delta(t)$ 的一个周期内对时间取平均, φ 、 $\ddot{\varphi}$ 视为不变, 得

$$\begin{aligned} & -mg \frac{l}{2} \sin \varphi - mg \frac{l}{2} \cos \varphi \langle \delta \rangle + m\omega^2 A \frac{l}{2} \sin \varphi \langle \cos \omega t \rangle \\ & + m\omega^2 A \frac{l}{2} \cos \varphi \langle \delta \cdot \cos \omega t \rangle = \frac{1}{3} ml^2 (\ddot{\varphi} + \langle \ddot{\delta} \rangle) \end{aligned}$$

考虑到

$$\langle \delta \rangle = 0, \quad \langle \cos \omega t \rangle = 0, \quad \langle \delta \cdot \cos \omega t \rangle \text{ 待定}, \quad \langle \ddot{\delta} \rangle = 0$$

得

$$-mg \frac{l}{2} \sin \varphi + m\omega^2 A \frac{l}{2} \cos \varphi \langle \delta \cdot \cos \omega t \rangle = \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi} \quad (5)$$

为了定出 $\langle \delta \cdot \cos \omega t \rangle$, 将④式左右两边同乘 $\cos \omega t$ 得

$$\begin{aligned} & -mg \frac{l}{2} \sin \varphi \cos \omega t - mg \frac{l}{2} \cos \varphi \delta \cdot \cos \omega t + m\omega^2 A \frac{l}{2} \sin \varphi \cos^2 \omega t \\ & + m\omega^2 A \frac{l}{2} \cos \varphi \delta \cdot \cos^2 \omega t = \frac{1}{3} ml^2 (\ddot{\varphi} \cos \omega t + \ddot{\delta} \cos \omega t) \end{aligned} \quad (6)$$

考虑到

$$\ddot{\delta} = -\omega^2 \delta \quad (7)$$

代入⑥式后, 将⑥式在 $\delta(t)$ 的一个周期内对时间取平均, φ 、 $\ddot{\varphi}$ 视为不变, 得

$$\begin{aligned} & -mg \frac{l}{2} \sin \varphi \langle \cos \omega t \rangle - mg \frac{l}{2} \cos \varphi \langle \delta \cdot \cos \omega t \rangle + m\omega^2 A \frac{l}{2} \sin \varphi \langle \cos^2 \omega t \rangle \\ & + m\omega^2 A \frac{l}{2} \cos \varphi \langle \delta \cdot \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{3} ml^2 (\ddot{\varphi} \langle \cos \omega t \rangle - \omega^2 \langle \delta \cdot \cos \omega t \rangle) \end{aligned} \quad (8)$$

考虑到

$$\langle \cos \omega t \rangle = 0, \quad \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle \delta \cdot \cos^2 \omega t \rangle = 0$$

得

$$-mg \frac{l}{2} \cos \varphi \langle \delta \cdot \cos \omega t \rangle + m\omega^2 A \frac{l}{2} \sin \varphi \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} ml^2 \omega^2 \langle \delta \cdot \cos \omega t \rangle \quad (9)$$

解得

$$\langle \delta \cdot \cos \omega t \rangle = \frac{-\frac{3}{4} \omega^2 A \sin \varphi}{\omega^2 l - \frac{3}{2} g \cos \varphi} \approx -\frac{3}{4} \frac{A}{l} \sin \varphi \quad (\text{考虑到 } \omega^2 \gg g/l) \quad (10)$$

代入⑤式得 $\varphi(t)$ 的动力学方程

$$-mg \frac{l}{2} \sin \varphi - \frac{3}{8} m\omega^2 A^2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi} \quad (11)$$

【解法二】

考虑到 $\delta(t)$ 是圆频率为 $\omega \gg \sqrt{g/l}$ 的高频小幅振动, 设

$$\delta(t) = \delta_0 \cos \omega t, \quad \ddot{\delta} = -\omega^2 \delta_0 \cos \omega t \quad (5')$$

代入④式得

$$\begin{aligned} & -mg \frac{l}{2} \sin \varphi - mg \frac{l}{2} \cos \varphi \delta_0 \cos \omega t + m\omega^2 A \cos \omega t \frac{l}{2} \sin \varphi \\ & + m\omega^2 A \frac{l}{2} \cos \varphi \delta_0 \cos^2 \omega t = \frac{1}{3} ml^2 (\ddot{\varphi} + \ddot{\delta}) \end{aligned} \quad (6')$$

将⑥式在 $\delta(t)$ 的一个周期内对时间取平均, φ 、 $\ddot{\varphi}$ 视为不变, 考虑到

$$\langle \cos \omega t \rangle = 0, \quad \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$$

得

$$-mg \frac{l}{2} \sin \varphi + m\omega^2 A \frac{l}{2} \cos \varphi \frac{\delta_0}{2} = \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi} \quad (7')$$

为确定 δ_0 , 将⑤式代入④式并在左右两边同乘 $\cos \omega t$ 得

$$\begin{aligned} & -mg \frac{l}{2} \sin \varphi \cos \omega t - mg \frac{l}{2} \cos \varphi \delta_0 \cos^2 \omega t + m\omega^2 A \frac{l}{2} \sin \varphi \cos^2 \omega t \\ & + m\omega^2 A \frac{l}{2} \cos \varphi \delta_0 \cos^3 \omega t = \frac{1}{3} ml^2 (\ddot{\varphi} \cos \omega t - \omega^2 \delta_0 \cos^2 \omega t) \end{aligned} \quad (8')$$

将⑧式在 $\delta(t)$ 的一个周期内对时间取平均, φ 、 $\ddot{\varphi}$ 视为不变, 考虑到

$$\langle \cos \omega t \rangle = \langle \cos^3 \omega t \rangle = 0, \quad \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$$

可得

$$-mg \frac{l}{2} \cos \varphi \frac{\delta_0}{2} + m\omega^2 A \frac{l}{2} \sin \varphi \frac{1}{2} = \frac{1}{3} ml^2 (-\omega^2 \frac{\delta_0}{2}) \quad (9')$$

解得

$$\delta_0 = \frac{-\frac{3}{2} \omega^2 A \sin \varphi}{\omega^2 l - \frac{3}{2} g \cos \varphi} \approx -\frac{3}{2} \frac{A}{l} \sin \varphi \quad (\text{考虑到 } \omega^2 \gg g/l) \quad (10')$$

将⑩式代入⑦式得 $\varphi(t)$ 的动力学方程

$$-mg \frac{l}{2} \sin \varphi - \frac{3}{8} m\omega^2 A^2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi} \quad (11')$$

【解法三】

考虑到 $\delta(t)$ 是圆频率为 $\omega \gg \sqrt{g/l}$ 的高频小幅振动, $\delta \propto A$ 是小量, $\delta \propto \omega^2 A$ 并非小量, 上式等号左侧第一项与高频微振动无关, 第二、第四项含 δ 均为小量, 第三项为决定 δ 的项, 即

$$m\omega^2 A \frac{l}{2} \sin \varphi \cos \omega t = \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\delta} \quad (5'')$$

考虑到 $\delta(t)$ 是稳定微振动, 可得 $\delta(t)$ 的表达式

$$\delta(t) = -\frac{3}{2} \frac{A}{l} \sin \varphi \cos \omega t \quad (6'')$$

将 $\delta(t)$ 带回原方程 (即④式) 得

$$\begin{aligned} & -mg \frac{l}{2} \sin \varphi - mg \frac{l}{2} \cos \varphi \cdot \delta + m\omega^2 A \cos \omega t \frac{l}{2} \cos \varphi \cdot \delta \\ & - \frac{3}{4} m\omega^2 A^2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot \cos^2 \omega t = \frac{1}{3} ml^2 (\ddot{\varphi} + \ddot{\delta}) \end{aligned} \quad (7'')$$

将⑦式在 $\delta(t)$ 的一个周期内对时间取平均, φ 、 $\ddot{\varphi}$ 视为不变, 考虑到

$$\langle \delta \rangle = 0, \quad \langle \ddot{\delta} \rangle = 0, \quad \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$$

可得 $\varphi(t)$ 的动力学方程

$$-mg \frac{l}{2} \sin \varphi - \frac{3}{8} m\omega^2 A^2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi} \quad (8'')$$

(3) ⑩式左侧可视为保守力矩, 与势能的关系为

$$M(\varphi) = -mg\frac{l}{2}\sin\varphi - \frac{3}{8}m\omega^2 A^2 \sin\varphi \cos\varphi = -\frac{dV_{\text{eff}}(\varphi)}{d\varphi} \quad (12)$$

结合 $V_{\text{eff}}(\varphi=0)=0$ 可得

$$V_{\text{eff}}(\varphi) = \int_{\varphi}^0 M(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}mgl(1-\cos\varphi) + \frac{3}{16}m\omega^2 A^2(1-\cos^2\varphi) \quad (13)$$

(4) 平衡位置 φ_0 处应为 $V_{\text{eff}}(\varphi)$ 的极值, 满足的条件为

$$V'_{\text{eff}}(\varphi_0) = -M(\varphi_0) = \left(\frac{1}{2}mgl + \frac{3}{8}m\omega^2 A^2 \cos\varphi_0\right) \sin\varphi_0 = 0 \quad (14)$$

解得

$$\sin\varphi_0 = 0 \text{ 或 } \cos\varphi_0 = -\frac{4gl}{3\omega^2 A^2} \quad (\text{要求 } \omega^2 > \frac{4gl}{3A^2}) \quad (15)$$

平衡位置分别为

$$\varphi_0 = 0 \quad (16-1)$$

$$\varphi_0 = \pi \quad (16-2)$$

$$\varphi_0 = \pm \arccos\left(-\frac{4gl}{3\omega^2 A^2}\right) = \pm\left(\pi - \arccos\frac{4gl}{3\omega^2 A^2}\right) \quad (\text{要求 } \omega^2 > \frac{4gl}{3A^2}) \quad (16-3)$$

当杆在平衡位置 φ_0 附近偏离小角 φ' ($\varphi' \ll \varphi_0$) 时, 杆的能量可表示为

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}'^2 + V_{\text{eff}}(\varphi = \varphi_0 + \varphi') = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}'^2 + V_{\text{eff}}(\varphi_0) + \frac{1}{2}V''_{\text{eff}}(\varphi_0)\varphi'^2 \quad (17)$$

其中

$$V''_{\text{eff}}(\varphi_0) = \frac{1}{2}mgl \cos\varphi_0 + \frac{3}{8}m\omega^2 A^2(2\cos^2\varphi_0 - 1) \quad (18)$$

稳定平衡位置处应为 $V_{\text{eff}}(\varphi)$ 的极小值, $V''_{\text{eff}}(\varphi_0) > 0$; 不稳定平衡位置处应为 $V_{\text{eff}}(\varphi)$ 的极大值, $V''_{\text{eff}}(\varphi_0) < 0$ 。

① 对于 $\varphi_0 = 0$: 由⑬式得

$$V''_{\text{eff}}(\varphi_0 = 0) = \frac{1}{2}mgl + \frac{3}{8}m\omega^2 A^2 > 0 \quad (19)$$

所以

$$\varphi_0 = 0 \text{ 是稳定平衡位置} \quad (20)$$

由⑰式, 杆受微扰后平稳小幅振动的频率

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{V''_{\text{eff}}(\varphi_0 = 0)}{ml^2/3}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3}{l} \left(\frac{g}{4} + \frac{3}{4} \omega^2 A^2\right)} \quad (21)$$

② 对于 $\varphi_0 = \pi$: 由⑬式得

$$V''_{\text{eff}}(\varphi_0 = \pi) = -\frac{1}{2}mgl + \frac{3}{8}m\omega^2 A^2 \begin{cases} < 0 & \omega^2 < \frac{4gl}{3A^2} \\ > 0 & \omega^2 > \frac{4gl}{3A^2} \end{cases} \quad (22)$$

所以

$$\text{当 } \omega^2 < \frac{4gl}{3A^2} \text{ 时, } \varphi_0 = \pi \text{ 是不稳定平衡位置} \quad (23-1)$$

$$\text{当 } \omega^2 > \frac{4gl}{3A^2} \text{ 时, } \varphi_0 = \pi \text{ 是稳定平衡位置} \quad (23-2)$$

(可以看出, 原本杆在转轴正上方是不稳定平衡, 由于转轴作高频振动, 此时杆可以在此位置保持稳定平衡, 即平衡的稳定性发生了变化)

当 $\omega^2 > \frac{4gl}{3A^2}$ 时, 由⑰式, 杆受微扰后平稳小幅振动的频率

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{V_{\text{eff}}''(\varphi_0 = \pi)}{ml^2/3}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3(3\omega^2 A^2 - g)}{4l^2}} \quad (24)$$

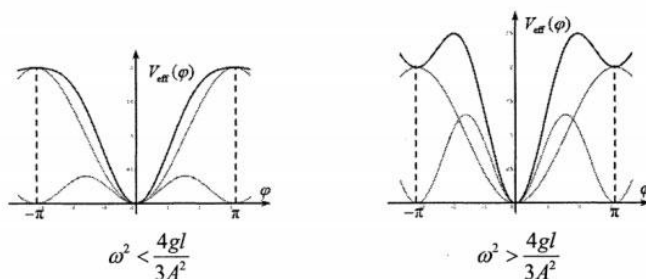
③对于 $\varphi_0 = \pm \arccos\left(-\frac{4gl}{3\omega^2 A^2}\right) = \pm\left(\pi - \arccos\frac{4gl}{3\omega^2 A^2}\right)$ (要求 $\omega^2 > \frac{4gl}{3A^2}$): 由⑱式得

$$V_{\text{eff}}'(\varphi_0) = \frac{1}{2}mgl \cos \varphi_0 + \frac{3}{8}m\omega^2 A^2(2\cos^2 \varphi_0 - 1) = \frac{2mg^2 l^2}{3\omega^2 A^2} - \frac{3}{8}m\omega^2 A^2 < 0 \quad (25)$$

所以

$$\varphi_0 = \pm \arccos\left(-\frac{4gl}{3\omega^2 A^2}\right) = \pm\left(\pi - \arccos\frac{4gl}{3\omega^2 A^2}\right) \text{ 是不稳定平衡位置} \quad (26)$$

(5) $\omega^2 < \frac{4gl}{3A^2}$ 和 $\omega^2 > \frac{4gl}{3A^2}$ 时的势能曲线 $V_{\text{eff}}(\varphi)$ 分别如下图所示。



①当 $\omega^2 < \frac{4gl}{3A^2}$ 时: $\varphi=0$ 处是 $V_{\text{eff}}(\varphi)$ 的极小值、 $\varphi=\pi$ 处是 $V_{\text{eff}}(\varphi)$ 的极大值, $V_{\text{eff}}(\varphi)$ 在 $0 \leq \varphi \leq \pi$ 内单调增大, 所以要使杆能运动至 $\varphi=\pi$, 初角速度 ω_0 应满足

$$\frac{11}{23}ml^2\omega_0^2 > V_{\text{eff}}(\varphi=\pi) = mgl \quad (27)$$

解得

$$\omega_0 > \sqrt{\frac{6g}{l}} = \omega_c \quad (28)$$

②当 $\omega^2 > \frac{4gl}{3A^2}$ 时: $\varphi=0$ 和 $\varphi=\pi$ 处是 $V_{\text{eff}}(\varphi)$ 的极小值, $\varphi=\pi - \arccos\frac{4gl}{3\omega^2 A^2}$ 处是 $V_{\text{eff}}(\varphi)$ 的极大值, 此处是 $0 \leq \varphi \leq \pi$ 内的势垒, 所以要使杆能运动至 $\varphi=\pi$ 应越过此势垒, 初角速度 ω_0 应满足

$$\frac{11}{23}ml^2\omega_0^2 > V_{\text{eff}}(\varphi=\pi - \arccos\frac{4gl}{3\omega^2 A^2}) = \frac{1}{2}mgl + \frac{3}{16}m\omega^2 A^2 + \frac{mg^2 l^2}{3\omega^2 A^2} \quad (29)$$

解得

$$\omega_0 > \sqrt{\frac{3g}{l} + \frac{9\omega^2 A^2}{8l^2} + \frac{2g^2}{\omega^2 A^2}} = \omega_c \quad (30)$$

综上, 临界角速度

$$\omega_c = \begin{cases} \sqrt{\frac{6g}{l}} & \omega^2 < \frac{4gl}{3A^2} \\ \sqrt{\frac{3g}{l} + \frac{9\omega^2 A^2}{8l^2} + \frac{2g^2}{\omega^2 A^2}} & \omega^2 > \frac{4gl}{3A^2} \end{cases}$$

当 $\omega_0 < \omega_c$ 时, 杆能到达的最大角度 φ_{\max} 满足

$$\frac{1}{2} \frac{1}{3} m l^2 \omega_0^2 = V_{\text{eff}}(\varphi_{\max}) = \frac{1}{2} m g l (1 - \cos \varphi_{\max}) + \frac{3}{16} m \omega^2 A^2 (1 - \cos^2 \varphi_{\max}) \quad (31)$$

即

$$\cos^2 \varphi_{\max} + \frac{8 g l}{3 \omega^2 A^2} \cos \varphi_{\max} + \frac{8 \omega_0^2 l^2}{9 \omega^2 A^2} - \frac{8 g l}{3 \omega^2 A^2} - 1 = 0 \quad (32)$$

解得

$$\cos \varphi_{\max} = \frac{1}{2} \left[-\frac{8 g l}{3 \omega^2 A^2} \pm \sqrt{\left(\frac{8 g l}{3 \omega^2 A^2}\right)^2 - 4 \left(\frac{8 \omega_0^2 l^2}{9 \omega^2 A^2} - \frac{8 g l}{3 \omega^2 A^2} - 1\right)} \right]$$

注意, 此处应取较小的 φ 解, 应取 “+” 号

$$\varphi_{\max} = \arccos \frac{1}{2} \left[-\frac{8 g l}{3 \omega^2 A^2} + \sqrt{\left(\frac{8 g l}{3 \omega^2 A^2}\right)^2 - 4 \left(\frac{8 \omega_0^2 l^2}{9 \omega^2 A^2} - \frac{8 g l}{3 \omega^2 A^2} - 1\right)} \right] \quad (33)$$

评分参考: 本题 50 分。

第 (1) 问 3 分, ①式 1 分, ③式 2 分;

第 (2) 问 12 分, ④式 1 分, 【解法一】⑤⑥⑨式各 2 分, ⑩式 1 分, ⑪式 4 分;

【解法二】⑦⑧⑨式各 2 分, ⑩式 1 分, ⑪式 4 分;

【解法三】⑤式 6 分, ⑥式 1 分, ⑧式 4 分;

第 (3) 问 4 分, ⑫⑬式各 2 分;

第 (4) 问 18 分, ⑭式 1 分, ⑮-1、⑮-2、⑮-3 式各 1 分, ⑰式 2 分, ⑱式 1 分, ⑲⑳式各 2 分, ㉑-1、㉑-2 式各 1 分, ㉒㉓式各 2 分, ㉔式 1 分;

第 (5) 问 13 分, ㉕㉖式各 1 分, ㉗式 4 分, ㉘㉙式各 2 分, ㉚式 3 分。



三、(40 分) 卢瑟福 α 粒子散射实验揭示了原子的核式结构。利用粒子散射实验可确定材料靶原子的种类、浓度及其深度分布等信息。典型的实验装置示意图如图 3a 所示, 一束 α 粒子入射到待测材料靶(例如金箔)上, 测量不同角度 θ 方向上散射 α 粒子的数目。

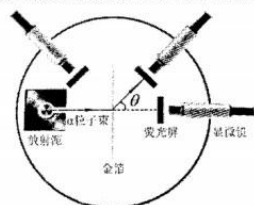


图 3a

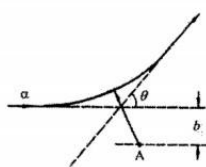


图 3b

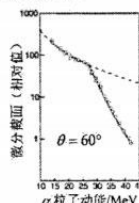


图 3c

(1) α 粒子可以通过放射性元素的衰变获得。静止的 $^{210}_{84}\text{Po}$ (钋) 衰变到 Pb (铅), 同时放出动能为 5.31 MeV 的 α 粒子。试写出此衰变过程的反应式, 并计算衰变末态粒子的总动能(单位取 MeV, 保留两位有效数字)。

(2) 如图 3b, 质量为 m 、电荷为 $2e$ ($e > 0$)、动能为 E 的 α 粒子从远处沿某直线入射, 该直线与靶核 A 的距离为 b (瞄准距离)。该 α 粒子被核电荷数为 Z 的原子核 A 散射后, 其在远处的运动方向与远处入射方向之间的夹角为 θ (散射角)。靶核 A 可视为始终静止不动, 求 b 与 θ 之间的关系 $b(\theta)$ 。

(3) 在 α 粒子散射实验中, 入射的实际上是一束 α 粒子流, 其束流强度为 I (单位时间内、单位横截面积上入射的粒子数)。散射粒子的角分布相对于过 A 且与 α 粒子远处入射方向平行的直线是轴对称的, 在以靶核 A 为中心的环带立体角元 $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ 内, 单位时间出射的粒子数 $\frac{dN}{dt}$ 正比于 $I d\Omega$

$$\frac{dN}{dt} = \sigma(\theta) I d\Omega$$

其中 $\sigma(\theta)$ 具有面积量纲, 称为微分散射截面。求 $\sigma(\theta)$ 的表达式 (其中不可含有参量 b)。

(4) 实验上利用加速器获得动能不同的 α 粒子与金原子核发生散射。在散射角 $\theta = 60^\circ$ 时测得的微分散射截面(相对值)与入射 α 粒子动能的关系如图 3c 所示, 实验数据在 α 粒子动能为 25 MeV 处出现拐点。试解释该拐点出现的原因, 并计算该情形下 α 粒子到金原子核的最小距离。已知 $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1.44 \text{ fm} \cdot \text{MeV}$, 金原子的核电荷数为 79。金原子核可视为始终静止不动。

(5) 在图 3a 所示的 α 粒子散射实验中, 由于 α 粒子源或探测器(荧光屏和显微镜)的遮挡, 无法实现散射角为 180° 左右的测量。试提出一个方案, 以实现散射角为 180° 的测量, 并画出实验方案示意图。

参考解答:

(1) $^{210}_{84}\text{Po}$ 的 α 衰变的反应式为



由于衰变前母核是静止的, 设衰变后 α 粒子和子核 $^{206}_{82}\text{Pb}$ 的运动速度分别为 v 和 V 。由动量守恒得

$$0 = M_{\text{Pb}} V + m_{\alpha} v \quad \text{②}$$

式中 m 和 M 分别为 α 粒子和 $^{206}_{82}\text{Pb}$ 核的质量。衰变末态粒子的总动能

$$E_d = \frac{1}{2}M_{\text{Pb}}V^2 + \frac{1}{2}m_\alpha v^2 \quad (3)$$

由②③式解得

$$E_d = E_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{M_{\text{Pb}}}\right) \approx \frac{A}{A-4} E_\alpha \quad (4)$$

式中 A 为 Po 核的质量数, E_α 为 α 粒子的动能

$$E_\alpha = \frac{1}{2}m_\alpha v^2 = 5.31 \text{ MeV}$$

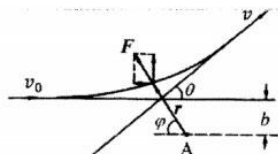
由④式和题给数据得

$$E_d = 5.41 \text{ MeV} \quad (5)$$

(2)

【解法一】

如解题图 3a, 质量为 M 、带正电荷 Ze (e 是基本电荷) 的原子核 A 位于原点, 而质量为 m 、能量为 E 、电荷为 $+2e$ 的 α 粒子以速度 v_0 入射, 瞄准距离为 b ; 由于 α 粒子受到原子核库仑斥力 F 的作用改变方向, 以偏转角 θ 射出。在散射过程中, 由于电子的质量远小于 α 粒子的质量, 忽略核外电子与 α 粒子的作用; 由于靶原子的质量通常远大于 α 粒子的质量, 近似认为原子核静止不动。



解题图 3a

α 粒子与原子核的散射为弹性过程, 散射后 α 粒子在无穷远处的速率仍为 v_0 。因此, 散射后无穷远处的 α 粒子在垂直方向的速度为:

$$v_{\perp\infty} = v_0 \sin \theta \quad (6)$$

在散射过程中, α 粒子在垂直方向上所受的力与 α 粒子和原子核之间的距离有关, 为:

$$F_{\perp} = F \sin \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r^2} \sin \varphi \quad (7)$$

考虑到动量的变化等于冲量, 因此有:

$$dv_{\perp} = \frac{F_{\perp}}{m} dt = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \varphi}{mr^2} dt \quad (8)$$

库仑力为有心力, α 粒子散射过程中角动量守恒, 有:

$$L = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = mv_0 b \quad (9)$$

由⑧⑨可得:

$$dv_{\perp} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v_0 b} \sin \varphi d\varphi \quad (10)$$

α 粒子在入射的时候, 其在垂直方向上的速度为零; 考虑到其在无穷远处的渐进行为, 可知入射时 $\varphi = 0$, 散射到无穷远处时 $\varphi = \pi - \theta$ 。

因此, 对⑩式进行积分, 可得:

$$v_{\perp\infty} = \int_0^{\pi-\theta} \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v_0 b} \sin\varphi d\varphi = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v_0 b} (1 + \cos\theta) \quad (11)$$

由⑥⑪可得:

$$b = \frac{D}{2} \cot \frac{\theta}{2} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E} \cot \frac{\theta}{2} \quad (12)$$

$$\text{式中 } D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{\frac{1}{2} m v_0^2} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E}$$

【解法二】

由能量和角动量守恒定律得

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Ze)(2e)}{r} + \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (6')$$

$$L = m r^2 \dot{\varphi} = m v_0 b \quad (7')$$

式中 r 是 α 粒子到原子核 A (原点) 的距离。

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi}$$

由⑥'⑦'式得

$$\frac{2mE}{L^2} = \frac{4Ze^2 m}{4\pi\epsilon_0 L^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \quad (8')$$

首先可以看出, 将⑧'式右端微分项的系数函数 $\frac{1}{r^4}$ 收入微分内, 即

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \left(-\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} \right)^2 = \left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} \right)^2$$

这提示我们, 引入新变量

$$\rho = \frac{1}{r}$$

方程⑧'成为

$$\frac{d^2 \rho}{d\varphi^2} + \rho = C \quad (9')$$

$$\text{式中 } C = \frac{-2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v_0^2 b^2}$$

求解微分方程⑩'式, 可得

$$\frac{1}{r} = C(1 + \cos\varphi) + \frac{1}{b} \sin\varphi \quad (10')$$

在 α 粒子以 θ 角散射情况下, 当 α 粒子出射到无限远时,

$$\frac{1}{r} \rightarrow 0, \quad \varphi = \pi - \theta$$

$$\text{代入⑩'式, 可得散射角 } \theta \text{ 满足: } \cot \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{Cb}, \quad (11')$$

把 $C = \frac{-2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v_0^2 b^2}$ 代入⑪', 可得

$$b = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E} \cot \frac{\theta}{2} \quad (12')$$

【解法三】

以图 3b 中 A 为极点，近心点方向为极轴方向，建立极坐标系 (r, ϕ) ，则 α 粒子轨道方程为

$$r = \frac{-p}{1 - q \cos \phi} \quad (6'')$$

其中

$$p = \left(\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^{-1} \frac{L^2}{m}$$

$$q = \sqrt{1 + \left(\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^{-2} \frac{2EL^2}{m}} \quad (7'')$$

其中轨道角动量为

$$L = mv_0 b = \sqrt{2mEb} \quad (8'')$$

因为 $r > 0$ ，由 (6)'' 式可知

$$\cos \phi > \frac{1}{q} = \cos \phi_0$$

故有 $\phi \in (-\phi_0, \phi_0)$ ，相应散射角

$$\theta = \pi - 2\phi_0 \quad (9'')$$

故有

$$\cot \frac{\theta}{2} = \tan \phi_0 = \sqrt{q^2 - 1} \quad (10'')$$

将 (7)'' 式代入 (10)'' 式得

$$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{4\pi\epsilon_0 Eb}{Ze^2} \quad (11'')$$

即有

$$b = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E} \cot \frac{\theta}{2} \quad (12'')$$

【解法四】(利用隆格-楞次矢量)

设 α 粒子速度为 v ，角动量为 L ，并设参量 $\beta = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$ ，则有

$$F = \frac{\beta}{r^2} \hat{r} = \frac{d(mv)}{dt} \quad (6''')$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \omega \times \hat{r} = \frac{L}{mr^2} \times \hat{r} \quad (7''')$$

定义 α 粒子的隆格-楞次矢量为

$$B = mv \times L + m\beta \hat{r} \quad (8''')$$

利用 (6)''' (7)''' 式可得

$$\frac{dB}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} \times L + m\beta \frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{\beta}{r^2} \hat{r} \times L + m\beta \frac{L}{mr^2} \times \hat{r} = 0 \quad (9''')$$

故隆格-楞次矢量守恒。

如图设置 x, y, z 坐标轴正向, 则 $\mathbf{L} = -L\hat{z}$, α 粒子初速度 $\mathbf{v}_0 = v_0\hat{x}$ 。利用⑧'''式计算初末态隆格-楞次矢量得

$$\mathbf{B}_{\text{初}} = mv_0L\hat{y} - m\beta\hat{x} \quad \text{⑩''''}$$

$$\mathbf{B}_{\text{末}} = mv_0L(-\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}) + m\beta(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}) \quad \text{⑪''''}$$

其中

$$L = mv_0b = \sqrt{2mEb} \quad \text{⑫''''}$$

利用隆格-楞次矢量守恒得

$$mv_0L = mv_0L\cos\theta - m\beta\sin\theta$$

便有

$$\cot\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{v_0L}{\beta} = \frac{4\pi\epsilon_0Eb}{Ze^2} \quad \text{⑬''''}$$

即有

$$b = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0E} \cot\frac{\theta}{2} \quad \text{⑭''''}$$

【解法五】

在散射过程中, α 粒子受到原子核的库仑排斥作用, 其运动轨迹为双曲线, 设半长轴为 a , α 粒子到原子核的距离为 c 。

$$E = k\frac{2Ze^2}{2a} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0a} \quad \text{⑯''''}$$

式中 $a = k\frac{2Ze^2}{2E} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0E}$

散射角 θ 满足:

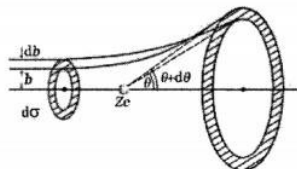
$$\tan\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) = \frac{b}{a} = \frac{Eb}{kZe^2} \quad \text{⑰''''}$$

$$\theta = 2\text{arccot}\left(\frac{Eb}{kZe^2}\right) = 2\text{arccot}\left(\frac{4\pi\epsilon_0Eb}{Ze^2}\right) \quad \text{⑱''''}$$

可得

$$b = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0E} \cot\frac{\theta}{2} \quad \text{⑲'''' } \quad \text{】}$$

(3)由⑫式可知, b 和 θ 之间存在一一对应关系。考虑瞄准距离在 b 到 $b+db$ 之间的 α 粒子, 经散射后它们从 θ 到 $\theta+d\theta$ 之间的角度射出。因此, 凡通过以 b 为内半径、以 $b+db$ 为外半径的环形面积 $d\sigma$ 的 α 粒子, 必定散射到角度在 θ 到 $\theta+d\theta$ 之间的一个空心圆锥体内, 如解图 3b 所示。



解图 3b

环形面积 $d\sigma$ 为

$$d\sigma = 2\pi b |db| = \frac{\pi D^2 \cos \frac{\theta}{2}}{4 \sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta \quad (13)$$

推导中利用了(12)式。角度在 θ 到 $\theta + d\theta$ 之间的一个空心圆锥体的立体角元为

$$d\Omega = \frac{2\pi r \sin \theta r d\theta}{r^2} = 2\pi \sin \theta d\theta \quad (14)$$

一个 α 粒子被一个原子核散射到 θ 方向上单位立体角元中的概率，称为微分散射截面，为

$$\sigma(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{D^2}{16} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} = \left(\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E} \right)^2 \frac{1}{16 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (15)$$

由(15)式可知，在固定的散射方向上（当散射角 $\theta = 60^\circ$ 时），微分散射截面与 α 粒子动能 E 的平方成反比关系，即随着 E^2 的增大而减小。

(4) 实验测量的 α 粒子散射截面结果显示在 α 粒子能量为 25 MeV 时出现拐点，即截面突然急剧减小，这表明 α 粒子逼近了原子核区域，强的核力起了作用，从而导致散射截面与 α 粒子动能 E 的关系发生突变。 (16)

【解法一】

由(12)式也可以看出，固定 θ 角， E 越大 b 越小。当 b 小到一定程度， α 粒子会进入原子核，散射关系发生突变（强核力起作用）。突变点的 α 粒子正好掠过原子核表面，最近距离 r 近似为原子核半径。设 α 粒子距离原子核的最近距离为 r_{\min} ，此时其速度为 v' ，由角动量守恒和能量守恒得

$$mv_0 b = mv' r_{\min} \quad (17)$$

$$\frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} mv'^2 + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}} \quad (18)$$

$$r_{\min} = \frac{D}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \right) = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E} \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \right) \quad (19)$$

由(19)式和题给数据 ($E = 25 \text{ MeV}$, $\theta = 60^\circ$, $Z = 79$) 得

$$r_{\min} \approx 1.365 \times 10^{-14} \text{ m} = 13.65 \text{ fm} \quad (20)$$

【解法二】

在散射过程中， α 粒子受到原子核的库仑排斥作用，其运动轨迹为双曲线。设半长轴为 a ， α 粒子到原子核的距离为 c 。

$$a = k \frac{2Ze^2}{2E} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E} \quad (17')$$

$$c = k \frac{a}{\cos(\frac{\pi - \theta}{2})} = 2a \quad (18')$$

(或者 $b = a \tan(\frac{\pi - \theta}{2}) = \sqrt{3}a$, $c = \sqrt{b^2 + a^2} = 2a$)

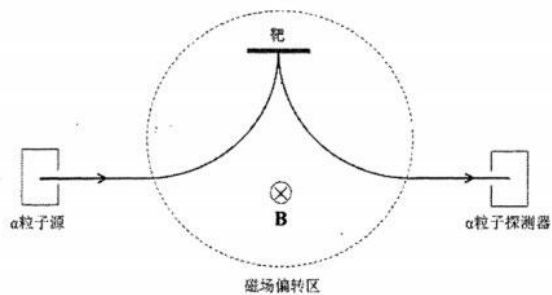
$$r_{\min} = c + a \quad (19')$$

$$r_{\min} = 3a = 13.65 \text{ fm} \quad (20')$$

(5) 在通常的卢瑟福 α 粒子散射实验中，由于 α 粒子源或探测器的遮挡，无法实现散射角为 180° 的测量。考虑到 α 粒子带正电荷，可在 α 粒子飞行的路径加上一个静磁场来改变其运动

方向。(若有同学写：加交变电场，也算对。) ⑲

实验方案如解题图 3c 所示：从 α 粒子源射出的一束 α 粒子经静磁场偏转 90° 射到靶粒子上，
散射角为 180° 的粒子射出后经静磁场偏转 90° 进入 α 粒子探测器加以测量。⑳



解题图 3c

评分参考：本题 40 分。

第 (1) 问 8 分，①④式各 3 分，⑤式各 2 分；

第 (2) 问 12 分，【解法一】⑦⑧⑨⑩⑪⑫式各 2 分；

【解法二】⑧'⑦'⑧'⑩'⑪'⑫'式各 2 分

【解法三】⑥''⑦''式各 3 分，⑧''⑩''⑫''式各 2 分

【解法四】⑦'''⑨'''⑩'''⑪'''⑫'''⑭'''式各 2 分

【解法五】⑥''''⑦''''式各 4 分、⑧''''⑨''''式各 2 分

第 (3) 问 5 分，⑬式 3 分，⑮式 2 分；

第 (4) 问 10 分，【解法一】⑯⑰⑱⑲⑳式各 2 分；

【解法二】⑯'⑰'⑱'⑲'⑳'式各 2 分

第 (5) 问 5 分，㉑式 2 分，㉒式 3 分。



四、(50分) 当两个原子之间的距离较小时, 两者之间的相互作用表现为强的排斥; 距离较大时, 其相互作用表现为弱的吸引。大量原子可通过此相互作用结合成晶体。温度趋于 0 K 时, 原子排列为周期性的空间点阵, 处于力平衡状态; 温度高于 0 K 时, 原子将在平衡位置附近做小幅振动。考虑由质量为 M 的同种原子组成的立方晶体, 试用如下模型讨论原子如何结合成晶体以及晶体中原子振动对其热学性质的影响。

(1) 距离为 R 的两个原子之间的相互作用势能 $V(R)$ 可以近似表示为伦纳德-琼斯势

$$V(R) = \epsilon \left[\left(\frac{r_0}{R} \right)^{12} - \left(\frac{r_0}{R} \right)^6 \right]$$

其中 $\epsilon > 0$ 表征相互作用强度, r_0 表征力程。假设平衡时原子排列在立方点阵的顶点上, 即原子的平衡位置为

$$\mathbf{R}_{l_x, l_y, l_z} = (l_x a, l_y a, l_z a), \quad l_x, l_y, l_z = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

其中 a 是晶格常数。为简单起见, 假设伦纳德-琼斯势的形式在晶体熔化前一直成立, 参量 ϵ 和 r_0 也视为不变。试导出晶格常数 a 的表达式。计算结果中可包含如下常数:

$$A_n = \sum_{l_x, l_y, l_z} (l_x^2 + l_y^2 + l_z^2)^{-n/2}$$

其中 n 是任意正整数, $\sum_{l_x, l_y, l_z} \dots$ 表示对所有不全为零的 l_x, l_y, l_z 求和。

(2) 试计算近邻原子、次近邻原子和次次近邻原子分别对 A_6 值的贡献。

(3) 严格求解晶体中原子在平衡位置 $\mathbf{R}_{l_x, l_y, l_z}$ 附近的小幅振动是非常复杂的。为简化起见, 爱因斯坦假设原子的运动互不干扰, 即考虑任意一个原子的振动时, 假设其它原子都静止于各自的平衡位置处。在此模型下, 求上述晶体中每个原子的小幅振动的圆频率 ω_E (结果可包含 a 和 A_n)。

以下假设爱因斯坦模型(包括上述关于圆频率 ω_E 的结果)仍然可适用于大振幅的情形:

(4) 原子按振动状态的分布为玻尔兹曼分布: 当绝对温度为 T 时, 原子的动量大小在 $[p, p + dp]$ 内、相对于平衡位置的位移大小在 $[u, u + du]$ 内的概率正比于

$$e^{-\frac{E}{k_B T}} p^2 dp u^2 du$$

其中 E 是动量大小为 p 、位移大小为 u 时原子的能量, k_B 是玻尔兹曼常量。已知阿伏伽德罗常数为 N_A , 试计算上述晶体的定容摩尔热容 (须有必要的推导过程)。

(5) 原子振动的振幅随温度升高而增大。按照林德曼判据, 当偏离平衡位置的距离的平均值大于 $C_L a$ 时, 晶体就会熔化, 其中 C_L 为常数 (量级为 0.1)。试导出晶体熔点的表达式 (结果可包含 a 和 ω_E)。

$$\text{提示: } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^3 dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^4 dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}$$

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x)g(y) dx dy = \int_0^{+\infty} f(x) dx \cdot \int_0^{+\infty} g(y) dy$$

参考解答:

(1) 由于这些原子都相同, 只考虑处于原点的原子即可。处于原点的原子与其它原子的相互作用势能为

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \sum_{l_x, l_y, l_z} \varepsilon \left[\left(\frac{r_0}{R_{l_x, l_y, l_z}} \right)^{12} - \left(\frac{r_0}{R_{l_x, l_y, l_z}} \right)^6 \right] \\
 &= \varepsilon \sum_{l_x, l_y, l_z} \frac{r_0^{12}}{(l_x^2 a^2 + l_y^2 a^2 + l_z^2 a^2)^6} - \varepsilon \sum_{l_x, l_y, l_z} \frac{r_0^6}{(l_x^2 a^2 + l_y^2 a^2 + l_z^2 a^2)^3} \\
 &= \varepsilon \left(\frac{r_0}{a} \right)^{12} \sum_{l_x, l_y, l_z} \frac{1}{(l_x^2 + l_y^2 + l_z^2)^6} - \varepsilon \left(\frac{r_0}{a} \right)^6 \sum_{l_x, l_y, l_z} \frac{1}{(l_x^2 + l_y^2 + l_z^2)^3} \\
 &= \varepsilon \left[\left(\frac{r_0}{a} \right)^{12} A_{12} - \left(\frac{r_0}{a} \right)^6 A_6 \right]
 \end{aligned} \tag{1}$$

达到平衡后, 势能极小, 因此

$$0 = \frac{dV_0}{da} = \varepsilon \left[-12 A_{12} \frac{r_0^{12}}{a^{13}} + 6 A_6 \frac{r_0^6}{a^7} \right] \tag{2}$$

于是

$$-12 A_{12} \frac{r_0^{12}}{a^{13}} + 6 A_6 \frac{r_0^6}{a^7} = 0$$

可解得晶格常数 a 为

$$a = \left(\frac{2 A_{12}}{A_6} \right)^{1/6} r_0 \tag{3}$$

(2) 处于原点的原子共有 6 个近邻原子, 其平衡位置为

$$(l_x, l_y, l_z) = (-1, 0, 0), (+1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, +1, 0), (0, 0, -1), (0, 0, +1)$$

根据 A_n 的定义可知它们对常数 A_6 的贡献为

$$A_6' = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 \tag{4}$$

类似地有 12 个次近邻原子, 其平衡位置为

$$\begin{aligned}
 (l_x, l_y, l_z) &= (-1, -1, 0), (-1, +1, 0), (+1, -1, 0), (+1, +1, 0), (-1, 0, -1), (-1, 0, +1), (+1, 0, -1), \\
 & (+1, 0, +1), (0, -1, -1), (0, -1, +1), (0, +1, -1), (0, +1, +1)
 \end{aligned}$$

它们对常数 A_6 的贡献为

$$A_6'' = 12 \times 2^{-3} = \frac{3}{2} \tag{5}$$

处于原点的原子共有 8 个次次近邻原子, 其平衡位置为

$$\begin{aligned}
 (l_x, l_y, l_z) &= (-1, -1, -1), (-1, -1, +1), (-1, +1, -1), (-1, +1, +1), (+1, -1, -1), \\
 & (+1, -1, +1), (+1, +1, -1), (+1, +1, +1)
 \end{aligned}$$

它们对常数 A_6 的贡献为

$$A_6''' = 8 \times 3^{-3} = \frac{8}{27} \tag{6}$$

可见远离该原子的其他原子对常数 A_6 贡献较小。

(3) 由于所有原子都相同, 只需考虑平衡位置为原点的原子即可。按照爱因斯坦的假设, 其它原子仍然位于 R_{l_x, l_y, l_z} 处, 因此当处于原点的原子偏离平衡位置的位移为 \mathbf{u} 时, 它与其他原子的相互作用势能为

$$V = \sum_{l_x, l_y, l_z} \varepsilon \left[\left(\frac{r_0}{|R_{l_x, l_y, l_z} - \mathbf{u}|} \right)^{12} - \left(\frac{r_0}{|R_{l_x, l_y, l_z} - \mathbf{u}|} \right)^6 \right] \tag{7}$$

当 \mathbf{u} 较小时, 可以把上式对小量 \mathbf{u} 做级数展开。利用以下公式

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{R}-\mathbf{u}|^{-n} &= |R^2-2\mathbf{R}\cdot\mathbf{u}+u^2|^{-\frac{n}{2}}=R^{-n}\left(1-2\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{u}}{R^2}+\frac{u^2}{R^2}\right)^{-\frac{n}{2}} \\
 &=R^{-n}\left[1-\frac{n}{2}\left(-2\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{u}}{R^2}+\frac{u^2}{R^2}\right)+\frac{1-n}{2}\left(\frac{-n}{2}-1\right)\left(-2\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{u}}{R^2}+\frac{u^2}{R^2}\right)^2+\dots\right] \quad (8) \\
 &=R^{-n}\left[1+n\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{u}}{R^2}-\frac{n}{2}\frac{u^2}{R^2}+\frac{n(n+2)}{2}\left(\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{u}}{R^2}\right)^2+\dots\right]
 \end{aligned}$$

保留到 u^2 项可得

$$\sum_{l_x, l_y, l_z} |\mathbf{R}_{l_x l_y l_z} - \mathbf{u}|^{-n} = \sum_{l_x, l_y, l_z} R_{l_x l_y l_z}^{-n} + n \sum_{l_x, l_y, l_z} \frac{\mathbf{R}_{l_x l_y l_z} \cdot \mathbf{u}}{R_{l_x l_y l_z}^{n+2}} - \frac{n}{2} \sum_{l_x, l_y, l_z} \frac{u^2}{R_{l_x l_y l_z}^{n+4}} + \frac{n(n+2)}{2} \sum_{l_x, l_y, l_z} \frac{(\mathbf{R}_{l_x l_y l_z} \cdot \mathbf{u})^2}{R_{l_x l_y l_z}^{n+4}} \quad (9)$$

利用 (l_x, l_y, l_z) 与 $(-l_x, -l_y, -l_z)$ 成对出现的对称性有

$$\sum_{l_x, l_y, l_z} \frac{l_x}{(l_x^2 + l_y^2 + l_z^2)^{n/2}} = \sum_{l_x, l_y, l_z} \frac{l_y}{(l_x^2 + l_y^2 + l_z^2)^{n/2}} = \sum_{l_x, l_y, l_z} \frac{l_z}{(l_x^2 + l_y^2 + l_z^2)^{n/2}} = 0 \quad (10)$$

$$\sum_{l_x, l_y, l_z} \frac{l_x l_y}{(l_x^2 + l_y^2 + l_z^2)^{n/2}} = \sum_{l_x, l_y, l_z} \frac{l_y l_x}{(l_x^2 + l_y^2 + l_z^2)^{n/2}} = \sum_{l_x, l_y, l_z} \frac{l_z l_x}{(l_x^2 + l_y^2 + l_z^2)^{n/2}} = 0 \quad (11)$$

同理利用 $l_x \leftrightarrow l_y \leftrightarrow l_z$ 的对称性可得,

$$\begin{aligned}
 \sum_{l_x, l_y, l_z} \frac{l_x^2}{(l_x^2 + l_y^2 + l_z^2)^{n/2}} &= \sum_{l_x, l_y, l_z} \frac{l_y^2}{(l_x^2 + l_y^2 + l_z^2)^{n/2}} = \sum_{l_x, l_y, l_z} \frac{l_z^2}{(l_x^2 + l_y^2 + l_z^2)^{n/2}} \\
 &= \frac{1}{3} \sum_{l_x, l_y, l_z} \frac{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}{(l_x^2 + l_y^2 + l_z^2)^{n/2}} = \frac{1}{3} \sum_{l_x, l_y, l_z} (l_x^2 + l_y^2 + l_z^2)^{-\frac{n-2}{2}} = \frac{1}{3} A_{n-2}
 \end{aligned} \quad (12)$$

于是有

$$\sum_{l_x, l_y, l_z} \frac{\mathbf{R}_{l_x l_y l_z} \cdot \mathbf{u}}{R_{l_x l_y l_z}^{n+2}} = \frac{1}{a^{n+1}} \sum_{l_x, l_y, l_z} \frac{u_x l_x + u_y l_y + u_z l_z}{(l_x^2 + l_y^2 + l_z^2)^{(n+2)/2}} = 0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{l_x, l_y, l_z} \frac{(\mathbf{R}_{l_x l_y l_z} \cdot \mathbf{u})^2}{R_{l_x l_y l_z}^{n+4}} &= \frac{1}{a^{n+2}} \sum_{l_x, l_y, l_z} \frac{u_x^2 l_x^2 + u_y^2 l_y^2 + u_z^2 l_z^2 + 2u_x u_y l_x l_y + 2u_x u_z l_x l_z + 2u_y u_z l_y l_z}{(l_x^2 + l_y^2 + l_z^2)^{(n+4)/2}} \\
 &= \frac{1}{a^{n+2}} \sum_{l_x, l_y, l_z} \frac{u_x^2 l_x^2 + u_y^2 l_y^2 + u_z^2 l_z^2}{(l_x^2 + l_y^2 + l_z^2)^{(n+4)/2}} = \frac{u^2}{3a^{n+2}} \sum_{l_x, l_y, l_z} (l_x^2 + l_y^2 + l_z^2)^{-\frac{n+2}{2}} = \frac{u^2}{3a^{n+2}} A_{n+2}
 \end{aligned} \quad (14)$$

利用以上这些结果可得

$$\begin{aligned}
 \sum_{l_x, l_y, l_z} |\mathbf{R}_{l_x l_y l_z} - \mathbf{u}|^{-n} &= A_n a^{-n} - \frac{n}{2} A_{n+2} a^{-(n+2)} u^2 + \frac{n(n+2)}{6} A_{n+2} a^{-(n+2)} u^2 \\
 &= A_n a^{-n} + \frac{n(n-1)}{6} A_{n+2} a^{-(n+2)} u^2
 \end{aligned} \quad (15)$$

所以原点处的原子偏离平衡位置的位移为 \mathbf{u} 时系统能量为

$$\begin{aligned}
 V &= \varepsilon \sum_{l_x, l_y, l_z} \left(r_0^{12} |\mathbf{R}_{l_x l_y l_z} - \mathbf{u}|^{-12} - r_0^6 |\mathbf{R}_{l_x l_y l_z} - \mathbf{u}|^{-6} \right) \\
 &= \varepsilon r_0^{12} \left(A_{12} a^{-12} + \frac{12 \times 11}{6} A_{14} a^{-14} u^2 \right) - \varepsilon r_0^6 \left(A_6 a^{-6} + \frac{6 \times 5}{6} A_8 a^{-8} u^2 \right) \\
 &= \varepsilon \left[A_{12} \left(\frac{r_0}{a} \right)^{12} - A_6 \left(\frac{r_0}{a} \right)^6 \right] + \varepsilon \left(22 A_{14} \frac{r_0^{12}}{a^{14}} - 5 A_8 \frac{r_0^6}{a^8} \right) u^2 \\
 &= V_0 + \frac{1}{2} M \omega_E^2 u^2
 \end{aligned} \quad (16)$$

这里 $V_0 = \varepsilon \left[A_{12} \left(\frac{r_0}{a} \right)^{12} - A_6 \left(\frac{r_0}{a} \right)^6 \right]$, 由此可以得到爱因斯坦频率为

$$\omega_E = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{M} \left(22A_{12} \frac{r_0^{12}}{a^{14}} - 5A_6 \frac{r_0^6}{a^8} \right)} \quad (17)$$

(4) 动量大小为 p 、位移大小为 u 时原子的能量 E 为

$$E(p, u) = V_0 + \frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2} M \omega_E^2 u^2 \quad (18)$$

每个原子的平均能量为

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} E e^{-\frac{E}{k_B T}} p^2 dp u^2 du}{\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{E}{k_B T}} p^2 dp u^2 du} = \frac{\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(V_0 + \frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2} M \omega_E^2 u^2 \right) e^{-\frac{V_0}{k_B T}} e^{-\frac{p^2}{2Mk_B T}} e^{-\frac{M\omega_E^2 u^2}{2k_B T}} p^2 dp u^2 du}{\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{V_0}{k_B T}} e^{-\frac{p^2}{2Mk_B T}} e^{-\frac{M\omega_E^2 u^2}{2k_B T}} p^2 dp u^2 du} \\ &= V_0 + \frac{1}{2M} \frac{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{p^2}{2Mk_B T}} p^4 dp \int_0^{+\infty} e^{-\frac{M\omega_E^2 u^2}{2k_B T}} u^2 du}{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{p^2}{2Mk_B T}} p^2 dp \int_0^{+\infty} e^{-\frac{M\omega_E^2 u^2}{2k_B T}} u^2 du} + \frac{1}{2} M \omega_E^2 \frac{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{p^2}{2Mk_B T}} p^2 dp \int_0^{+\infty} e^{-\frac{M\omega_E^2 u^2}{2k_B T}} u^4 du}{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{p^2}{2Mk_B T}} p^2 dp \int_0^{+\infty} e^{-\frac{M\omega_E^2 u^2}{2k_B T}} u^2 du} \\ &= V_0 + \frac{1}{2M} \frac{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{p^2}{2Mk_B T}} p^4 dp}{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{p^2}{2Mk_B T}} p^2 dp} + \frac{1}{2} M \omega_E^2 \frac{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{M\omega_E^2 u^2}{2k_B T}} u^4 du}{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{M\omega_E^2 u^2}{2k_B T}} u^2 du} \\ &= V_0 + 2k_B T \frac{\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^4 dx}{\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^2 dx} \end{aligned} \quad (19)$$

由于

$$\frac{de^{-x^2}}{dx} = -2xe^{-x^2}$$

利用分部积分可得

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^2 dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} e dx e^{-x^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad (20)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^4 dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^3 de^{-x^2} = \frac{3}{2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \quad (21)$$

把上面两个积分代入平均能量的表达式, 可得每个原子的平均能量为

$$\bar{E} = V_0 + 3k_B T \quad (22)$$

1 mol 晶体包含 N_A (阿伏伽德罗常数) 个原子。因此, 在爱因斯坦模型下, 1 mol 晶体的内能为

$$U = N_A \bar{E} = N_A V_0 + 3N_A k_B T \quad (23)$$

所以定容摩尔热容为

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 3N_A k_B \quad (24)$$

(5) 原子偏离平衡位置的距离的平均值为

$$\bar{u} = \frac{\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} u e^{-\frac{E}{k_B T}} p^2 dp u^2 du}{\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{E}{k_B T}} p^2 dp u^2 du} = \frac{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{M\omega_E^2 u^2}{2k_B T}} u^3 du}{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{M\omega_E^2 u^2}{2k_B T}} u^2 du} = \frac{\sqrt{\frac{2k_B T}{M\omega_E^2}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^3 dx}{\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^2 dx} \quad (25)$$

利用分部积分和变量替换 $x^2 = t$, 得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^3 dx = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^2 de^{-x^2} = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t de^{-t} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \quad (26)$$

由此得到

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{2k_B T}{M\omega_E^2}} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{\pi}}{4}} = 2\sqrt{\frac{2k_B T}{\pi M\omega_E^2}} \quad (27)$$

当温度等于熔点时 $T = T_M$, 按照林德曼判据有

$$\bar{u}_M = C_L a$$

此即

$$\sqrt{\frac{8k_B T_M}{\pi M\omega_E^2}} = C_L a$$

因此

$$T_M = \frac{\pi M a^2 \omega_E^2 C_L^2}{8k_B} \quad (28)$$

评分参考: 本题 50 分。

第 (1) 问 8 分, ①式 4 分, ②③式各 2 分;

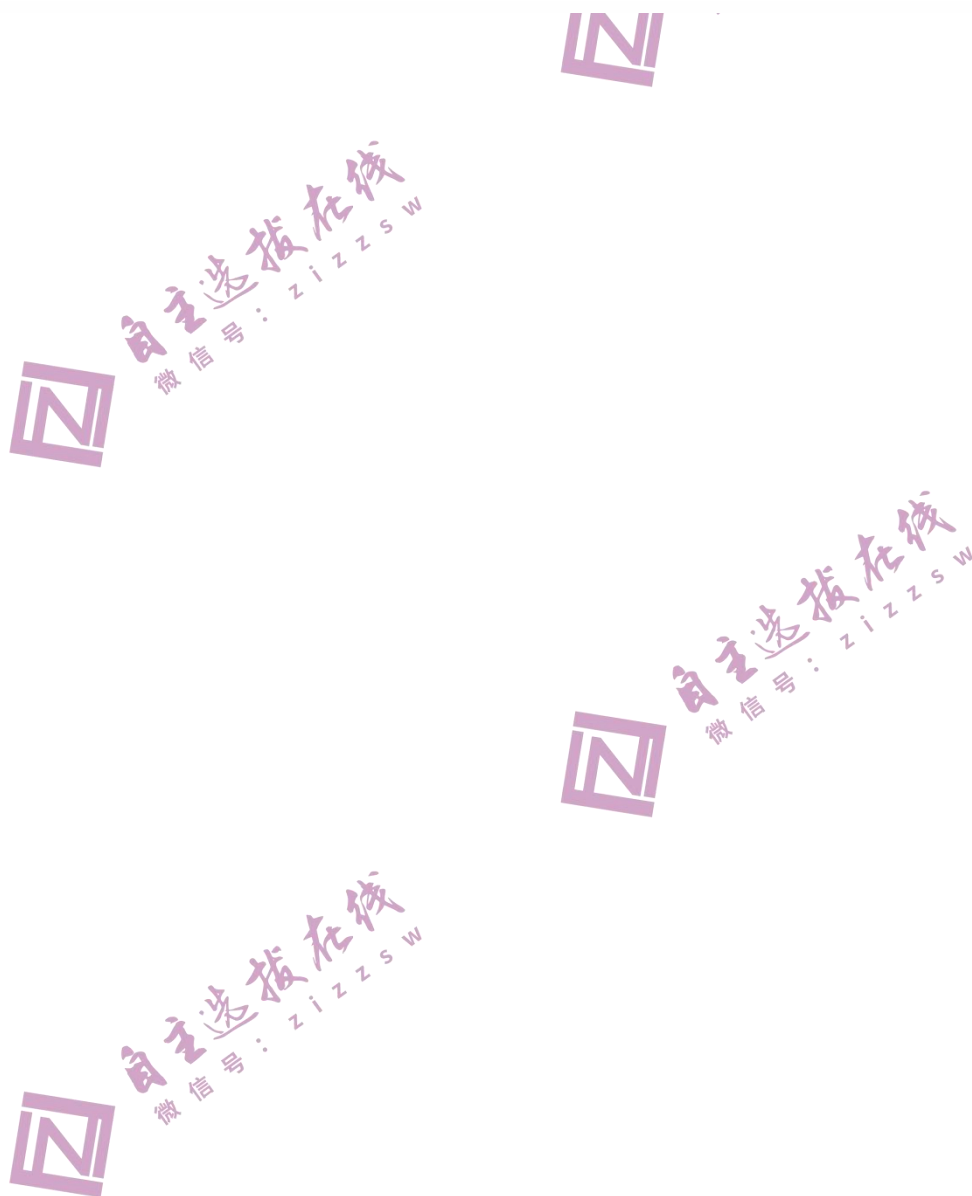
第 (2) 问 6 分, ④⑤⑥式各 2 分;

第 (3) 问 17 分, ⑦式 4 分, ⑧式 3 分, ⑨式 2 分, ⑮式 2 分, ⑯式 4 分, ⑰式 2 分;

第 (4) 问 11 分, ⑱式 2 分, ⑲式 5 分, ㉒㉓式各 1 分, ㉔式 2 分,

第 (5) 问 8 分, ㉕式 3 分, ㉖式 2 分, ㉗式 3 分。





五、(40分) 黑洞是广义相对论预言的奇异天体, 其宏观性质由质量 M 、角动量 J 和电荷 Q 完全决定。对于一个 $J=0$ 、 $Q=0$ 、质量为 M 的球对称简单黑洞(施瓦西黑洞), 可以定义一个以黑洞中心为球心、半径为 r 的球面(称为视界)。按照经典理论, 视界以内所有物质都无法逃离黑洞。

(1) 按照牛顿力学, 如果一个粒子在质量为 M 的球对称天体表面的逃逸速度恰好等于真空中的光速 c , 此天体即为黑洞。试导出该天体半径 r 的表达式。已知太阳质量约为 2×10^{30} kg, 引力常量 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$, 真空中的光速 $c = 3 \times 10^8$ m/s, 试问太阳半径至少收缩到多少时它将成为黑洞?

(2) 以上由牛顿力学得到的 r 恰好与广义相对论给出的同质量黑洞的视界半径结果一致。按照贝肯斯坦和霍金的理论, 黑洞的熵 S 正比于其视界面积 A , 即

$$S = \frac{k_B c^3}{4G\hbar} A$$

其中 \hbar 是约化普朗克常量, k_B 是玻尔兹曼常量。当两个质量均为 M 的简单黑洞塌缩成一个质量为 M' ($M' < 2M$) 的简单黑洞时, 求黑洞系统的熵的改变量(结果不含 A)。

(3) 对于一个绝对温度为 T 、质量为 M 的简单黑洞, 其内能 U 和熵 S 满足基本热力学关系 $dU = TdS$ 。按照相对论, 黑洞的内能由爱因斯坦质能关系 $U = Mc^2$ 给出。试由此导出黑洞温度 T 与其质量 M 之间的关系式, 并计算此黑洞的热容。

(4) 假设有一可逆热机工作在初始质量分别为 M_{10} 和 M_{20} 的两个简单黑洞之间, 已知 $M_{20} > M_{10}$, 求该热机从开始至最终的全过程对外所做的总功。

(5) 按照量子力学, 霍金提出黑洞表面(即黑洞视界)可以向外辐射电磁波, 且此辐射可以等价为与之同温度的黑体辐射, 称为霍金辐射。求霍金辐射功率 P 与黑洞质量 M 之间的关系 $P(M)$ 。已知斯特藩-玻尔兹曼常量 $\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2}$ 。

(6) 由于发生霍金辐射, 黑洞能量将减少, 从而其质量随时间变小。令黑洞的初始质量为 M_0 , 不考虑其它因素, 求该黑洞由于霍金辐射而最终消失所需要的时间。

参考解答:

(1) 选取无穷远处为势能零点, 该天体和质量为 m 的试探粒子之间的引力势能为

$$V(d) = -\frac{GMm}{d} \quad (1)$$

这里 d 是试探粒子到黑洞中心的距离。天体的半径为 r , 由机械能守恒可得逃逸速度 v_e 满足方程

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GMm}{r} = 0 \quad (2)$$

可得逃逸速度大小

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (3)$$

当逃逸速度 $v_e = c$ 时, 可得天体的半径满足

$$r = \frac{2GM}{c^2} \quad (4)$$

若使得太阳成为黑洞, 将太阳质量 $M = 2 \times 10^{30}$ kg 代入④式可得太阳的半径需至少缩小为

$$r = \frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}}{9 \times 10^{16}} \approx 2964 \text{ m} \approx 3 \text{ km} \quad (5)$$

(2) 由题意可知黑洞熵与质量的关系为

$$S = \frac{k_B c^3}{4G\hbar} A = \frac{k_B c^3}{4G\hbar} 4\pi r^2 = \frac{\pi k_B c^3}{G\hbar} \left(\frac{2GM}{c^2} \right)^2 = \frac{4\pi k_B GM^2}{c\hbar} \quad (6)$$

所以当两个质量均为 M 的球形黑洞塌缩成一个质量为 M' 的黑洞时, 系统熵的变化为

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{4\pi k_B G}{c\hbar} [M'^2 - 2M^2] \quad (7)$$

(3) 利用热力学公式

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dU}$$

以及爱因斯坦关系

$$U = Mc^2$$

可得

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dU} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dM} \left(\frac{4\pi k_B GM^2}{c\hbar} \right) = \frac{8\pi k_B GM}{c^3 \hbar} \quad (8)$$

所以黑洞的温度为

$$T = \frac{c^3 \hbar}{8\pi k_B GM} \quad (9)$$

可知黑洞的温度与质量成反比, 质量越小、温度越高。根据热容量的定义可知黑洞的热容量为

$$C = T \frac{dS}{dT} = T \frac{dS}{dM} \frac{dM}{dT} = T \frac{8\pi k_B GM}{c\hbar} \frac{-c^3 \hbar}{8\pi k_B GT^2} = -\frac{c^2 M}{T} = -\frac{8\pi k_B GM^2}{c\hbar} \quad (10)$$

可见黑洞的热容量始终是负的, 这意味着黑洞在热力学上是不稳定的。

(4) 【解法一】

在热机工作过程中, 设两个黑洞的质量分别为 M_1 和 M_2 。由题意知, 热机循环过程是可逆过程。故完成若干次完整循环后系统的熵不变。由⑧式可知, 熵不变给出

$$M_1^2 + M_2^2 = M_{10}^2 + M_{20}^2 \quad (11)$$

因为 $M_{20} > M_{10}$, 由⑨式可知: 小质量黑洞为高温热源, 大质量黑洞为低温热源。在热机循环过程中, 热机从高温热源(小黑洞)吸取热量、向低温热源(大黑洞)放出热量, 所以小黑洞质量不断减少, 直到最终消失、热机循环终止, 即

$$M_1 = 0 \quad (12)$$

代入上式得

$$M_2 = \sqrt{M_{10}^2 + M_{20}^2} \quad (13)$$

根据能量守恒, 可得热机最终对外所做的总功为

$$W = (M_{10} + M_{20} - \sqrt{M_{10}^2 + M_{20}^2})c^2 \quad (14)$$

【解法二】

小质量的黑洞是高温热源, 大质量黑洞是低温热源。热机从高温热源(小黑洞)吸取热量 dQ_1 、向低温热源(大黑洞)放出热量 dQ_2 , 所以小黑洞质量不断减少, 最终消失。由卡诺定理可知,

$$\frac{dQ_2}{dQ_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad (15)$$

根据爱因斯坦质能关系和热力学第一定律可得,

$$dQ_1 = -d(M_1 c^2), \quad dQ_2 = d(M_2 c^2) \quad (16)$$

进一步黑洞温度与其质量成反比

$$T \propto \frac{1}{M},$$

由上面两式可知,

$$\frac{dM_2}{dM_1} = -\frac{T_2}{T_1} = -\frac{M_1}{M_2} \quad (17)$$

所以有

$$M_1 dM_1 + M_2 dM_2 = 0 \quad (18)$$

对上式两边同时积分可得

$$M_1^2 + M_2^2 = M_{10}^2 + M_{20}^2 \quad (19)$$

所以在热机循环过程中, 大黑洞的质量不断增加并满足

$$M_2 = \sqrt{M_{10}^2 + M_{20}^2 - M_1^2} \quad (20)$$

最终小黑洞的质量消耗殆尽, 热机循环终止, 即末态为

$$M_1 = 0 \quad (21)$$

可逆热机的效率只取决于高温热源和低温热源的温度,

$$\eta = \frac{dW}{dQ_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (22)$$

所以热机最终对外所做的总功为

$$\begin{aligned} W &= \int \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) dQ_1 = - \int_{M_{10}}^0 \left(1 - \frac{M_1}{M_2}\right) c^2 dM_1 \\ &= - \int_{M_{10}}^0 \left(1 - \frac{M_1}{\sqrt{M_{10}^2 + M_{20}^2 - M_1^2}}\right) c^2 dM_1 \\ &= (M_{10} + M_{20} - \sqrt{M_{10}^2 + M_{20}^2}) c^2 \end{aligned} \quad (23)$$

(5) 根据斯特藩-玻尔兹曼定律可知, 单位时间黑洞向外辐射的能量 (即霍金辐射功率) 为

$$\begin{aligned} P &= \sigma T^4 A = 4\pi\sigma r^2 T^4 = 4\pi\sigma \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2 \left(\frac{c^3\hbar}{8\pi k_B GM}\right)^4 \\ &= \sigma \frac{c^8 \hbar^4}{256\pi^3 k_B^4 G^2 M^2} = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2} \frac{c^8 \hbar^4}{256\pi^3 k_B^4 G^2 M^2} \\ &= \frac{c^6 \hbar}{15360\pi G^2 M^2} \end{aligned} \quad (24)$$

(6) 由于霍金辐射, 黑洞能量的减小值等于辐射的能量, 即

$$-c^2 \frac{dM}{dt} = P = \frac{c^6 \hbar}{15360\pi G^2 M^2} \quad (25)$$

可得

$$-M^2 dM = \frac{c^4 \hbar}{15360\pi G^2} dt \quad (26)$$

两边同时积分可得

$$-\int_{M_0}^0 M^2 dM = \int_0^{t_f} \frac{c^4 \hbar}{15360\pi G^2} dt \quad (27)$$

所以黑洞由于霍金辐射而消失所需要的时间为

$$t_f = \frac{5120\pi G^2 M_0^3}{c^4 \hbar} \quad (28)$$

评分参考：本题 40 分。

第 (1) 问 5 分，①②③④⑤式各 1 分；

第 (2) 问 4 分，⑥式 3 分，⑦式 1 分；

第 (3) 问 8 分，⑧式各 3 分，⑨式 1 分，⑩式 4 分；

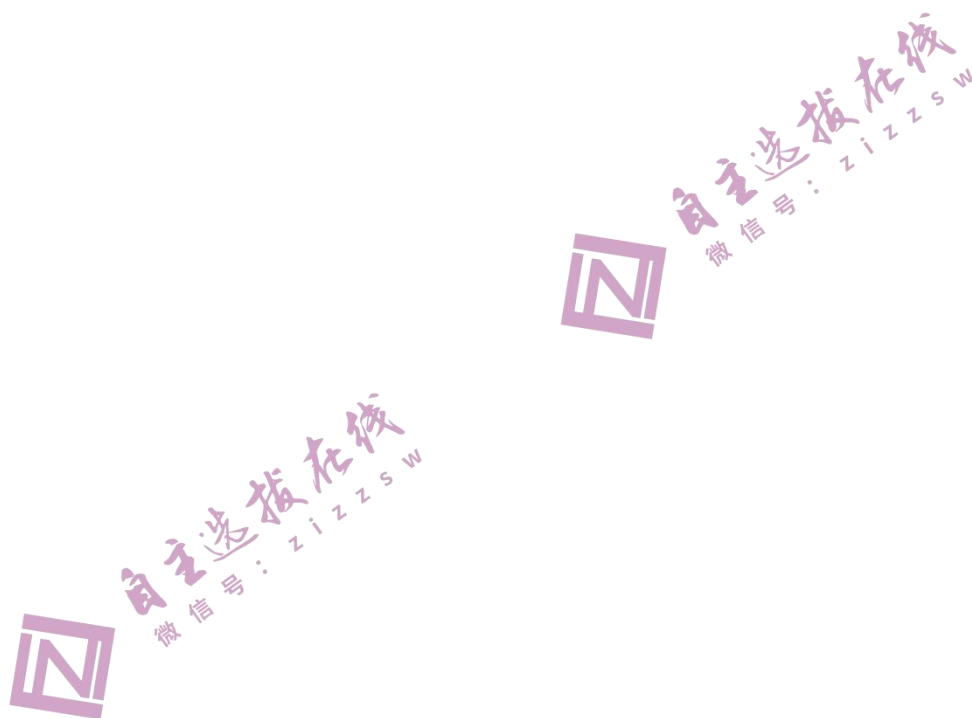
第 (4) 问 10 分，【解法一】⑪式 3 分，⑫⑬式各 2 分，⑭式 3 分；

【解法二】⑮⑯⑰⑱⑲⑳㉑㉒㉓式各 1 分，㉔式 2 分；

第 (5) 问 5 分，㉕式 5 分；

第 (6) 问 8 分，㉖式 3 分，㉗式 1 分，㉘㉙式各 2 分。





六、(50分) 在制作玻璃时通过掺入熔融的金属(如金、银、铜等), 可以制成彩色的玻璃。这些金属颗粒中的电子在光的电场驱动下, 对入射白光中的特定频率成分产生共振吸收, 导致光在此频率附近的成分转化为热, 从而使透过玻璃的光呈现出颜色。这种共振称为等离激元共振。

(1) 考虑真空中一个半径为 R 、相对介电常数为 ϵ_r 的均匀介质球, 将其置于匀强外电场 E_0 中。试求稳定后球内的电场强度 E_m 和球的电偶极矩 p 。已知均匀介质球在均匀外场中是均匀极化的, 真空介电常量为 ϵ_0 。

(2) 考虑一块均匀金属导体, 其导电电子密度为 n 、质量为 m 、电荷量为 $-e$ ($e > 0$), 电子在外场作用下定向漂移速度为 v 时, 被晶格散射的平均作用等效为一阻力 $f = -\gamma mv$, γ 为阻力系数。不考虑电子间的相互作用。

(i) 若此金属导体中有匀强恒定电场 E , 试求稳定后金属内的电流密度 j , 以及此金属的电导率 σ_0 。

(ii) 若此金属导体中有振幅为 E_m 、圆频率为 ω 的匀强交变电场 $E(t) = E_m \cos \omega t$, 电子将会运动形成电流。若稳定后金属内的电流密度表示为 $j(t) = j_m \cos(\omega t + \varphi_j)$, 记 $\sigma = \frac{j_m}{E_m}$,

可类比交流电的复数表示引入复电导率 $\tilde{\sigma} = \sigma e^{i\varphi_j}$, 在复数形式下金属内复电流密度 $\tilde{j} = j_m e^{i(\omega t + \varphi_j)}$ 和复电场强度 $\tilde{E} = E_m e^{i\omega t}$ 的关系可表述为 $\tilde{j} = \tilde{\sigma} \tilde{E}$ 。求此金属的复电导率 $\tilde{\sigma} = \text{Re} \tilde{\sigma} + i \text{Im} \tilde{\sigma}$ 的表达式(用 ω 、 γ 、 ϵ_0 和参量 $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}}$ 表示)。

(iii) 在上述匀强交变电场中, 电子将会整体同步地运动, 可类比电介质定义金属导体中的极化强度。在复数形式下金属内复极化强度 \tilde{P} 和复电场强度 \tilde{E} 的关系可表述为 $\tilde{P} = \tilde{\chi} \epsilon_0 \tilde{E}$, 其中 $\tilde{\chi}$ 为复极化率。进而可引入复电位移矢量 $\tilde{D} = \epsilon_0 \tilde{E} + \tilde{P} = \tilde{\epsilon}_r \epsilon_0 \tilde{E}$ 和复相对介电常数 $\tilde{\epsilon}_r$ 。求此金属的复相对介电常数 $\tilde{\epsilon}_r(\omega) = \text{Re} \tilde{\epsilon}_r(\omega) + i \text{Im} \tilde{\epsilon}_r(\omega)$ 的表达式(用 ω 、 γ 和参量 $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}}$ 表示)。

(3) 用上述金属导体制成半径为 R 的纳米球形颗粒, 放入圆频率为 ω ($\omega < \omega_p$) 的平面简谐电磁波中, 其电场振幅大小为 E_0 , 波长远大于 R 。只考虑金属颗粒在电场中的极化, 且在复数形式下可与第(1)问中介质球的极化类比。已知 $\gamma \ll \omega_p$, 不考虑电磁辐射。

(i) 试求稳定后金属纳米颗粒内的电场振幅大小 $E_m(\omega)$; 当 $\omega = \omega_r$ 时 E_m 达到最大, 发生等离激元共振, 试求共振圆频率 ω_r (为简单起见, 求 ω_r 时可取 $\gamma = 0$)。

(ii) 试求共振时该颗粒内的电场振幅大小 $E_r = E_m(\omega_r)$, 以及共振时该颗粒内的平均发热功率 P_r 。(考虑到 $\gamma \ll \omega_p$, 略去 γ 的高阶小量)

参考解答:

(1) 均匀介质球在均匀外场中是均匀极化的, 设极化强度为 P , 介质球表面的极化电荷密度分布为

$$\sigma'(\theta) = P \cdot n = P \cos \theta \quad ①$$

此为球面余弦分布电荷, 极化电荷在球内产生的退极化场是匀强电场

$$E' = -\frac{P}{3\epsilon_0} \quad ②$$

球求内的总电场强度

$$E_{in} = E_0 + E' \quad (3)$$

介质的极化规律

$$P = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 E_{in} \quad (4)$$

联立②③④式解得

$$P = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} 3\epsilon_0 E_0 \quad (5)$$

⑤式和②式代入③式得

$$E_{in} = \frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0 \quad (6)$$

介质球的电偶极矩

$$p = P \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0 \quad (7)$$

(2)

(i) 恒定电场 E 中电子的动力学方程

$$-eE - \gamma n\dot{v} = m\dot{v} \quad (8)$$

稳态时有 $\dot{v} = 0$, 代入⑧式得漂移速度

$$v = -\frac{e}{\gamma m} E \quad (9)$$

导体内的电流密度

$$j = n(-e)v = \frac{ne^2}{\gamma m} E = \sigma_0 E \quad (10)$$

所以导体的电导率

$$\sigma_0 = \frac{ne^2}{\gamma m} \quad (11)$$

(ii) 交变电场 $E(t) = E_m \cos \omega t$ 中电子的动力学方程

$$-eE_m \cos \omega t - \gamma m\dot{v} = m\dot{v} \quad (12)$$

可以写成复数形式

$$-eE_m e^{i\omega t} - \gamma m\dot{v} = m\dot{v} \quad (13)$$

稳态时, 设电子速度的稳态解为

$$\tilde{v}(t) = \tilde{v}_m e^{i\omega t} \quad (14)$$

则 $\dot{v} = i\omega\tilde{v}$, 代入⑬式得

$$-eE_m e^{i\omega t} - \gamma m\tilde{v} = i\omega m\tilde{v} \quad (15)$$

解得

$$\tilde{v} = \frac{-e/m}{\gamma + i\omega} E_m e^{i\omega t} = \frac{-e/m}{\gamma + i\omega} \tilde{E} \quad (16)$$

电流密度

$$\tilde{j} = n(-e)\tilde{v} = \frac{ne^2/m}{\gamma + i\omega} \tilde{E} = \tilde{\sigma} \tilde{E} \quad (17)$$

复电导率

$$\tilde{\sigma} = \frac{ne^2/m}{\gamma + i\omega} = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\gamma + i\omega} = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2 \gamma}{\gamma^2 + \omega^2} - i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2 \omega}{\gamma^2 + \omega^2} \quad (18)$$

【注：当 $\omega=0$ 时， $\bar{\sigma} = \frac{ne^2}{m\gamma} = \sigma_0$ 退回为静态时的结果】

(iii) 由电子运动的速度 \bar{v} 可得位置

$$\bar{x} = \frac{\bar{v}}{i\omega} = \frac{e/m}{\omega^2 - i\gamma\omega} E_m e^{i\omega t} = \frac{e/m}{\omega^2 - i\gamma\omega} \bar{E} \quad (19)$$

【或：交变电场 $E(t) = E_m \cos \omega t$ 中电子的动力学方程

$$-eE_m \cos \omega t - \gamma m \dot{x} = m \ddot{x}$$

可以写成复数形式

$$-eE_m e^{i\omega t} - \gamma m \dot{x} = m \ddot{x}$$

稳态时，设电子位置的稳态解为

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_m e^{i\omega t}$$

则 $\dot{x} = i\omega \bar{x}$ ， $\ddot{x} = -\omega^2 \bar{x}$ ，代入得

$$-eE_m e^{i\omega t} - i\omega \gamma m \bar{x} = -m\omega^2 \bar{x}$$

解得

$$\bar{x} = \frac{e/m}{\omega^2 - i\gamma\omega} E_m e^{i\omega t} = \frac{e/m}{\omega^2 - i\gamma\omega} \bar{E}$$

】

极化强度

$$\bar{P} = n(-e)\bar{x} = -\frac{ne^2/m}{\omega^2 - i\gamma\omega} \bar{E} = \tilde{\chi} \epsilon_0 \bar{E} \quad (20)$$

复极化率

$$\tilde{\chi} = -\frac{ne^2/m\epsilon_0}{\omega^2 - i\gamma\omega} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\gamma\omega} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} - i\frac{\gamma}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} \quad (21)$$

复相对介电常数

$$\tilde{\epsilon}_r(\omega) = 1 + \tilde{\chi} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\gamma\omega} = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2}\right) + i\left(-\frac{\gamma}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2}\right) \quad (22)$$

【注：复电导率 $\bar{\sigma}$ 和复相对介电常数 $\tilde{\epsilon}_r(\omega)$ 间满足 $\tilde{\epsilon}_r(\omega) = 1 + \frac{\bar{\sigma}}{i\omega\epsilon_0}$ 】

(3)

(i) 复数形式下金属球在交变电场中的极化可类比介质球在静电场中的极化，由②式，球内电场复振幅

$$\bar{E}_m(\omega) = \frac{3}{2 + \tilde{\epsilon}_r(\omega)} E_0 \quad (23)$$

将②式代入，电场振幅大小为

$$E_m(\omega) = |\bar{E}_m(\omega)| = \frac{3}{|2 + \tilde{\epsilon}_r(\omega)|} E_0 = \frac{3}{\sqrt{\left(3 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2}\right)^2}} E_0 \quad (24)$$

在共振区附近，取 $\gamma \approx 0$

$$\tilde{\epsilon}_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (25)$$

此时电场振幅为

$$E_{in}(\omega) \approx \frac{3}{3 - \omega_p^2/\omega^2} E_0 \quad (26)$$

当 $3 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \rightarrow 0$ 时 E_{in} 最大, 发生共振, 共振圆频率

$$\omega_r = \frac{\omega_p}{\sqrt{3}} (= \sqrt{\frac{ne^2}{3\epsilon_0 m}}) \quad (27)$$

【注: 由 $\frac{dE_{in}(\omega)}{d\omega} = 0$ (即 $\frac{d}{d\omega} \left[\left(3 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} \right)^2 \right] = 0$) 得

$$\frac{12\omega_p^2\omega^4 - 4\omega_p^4\omega^2 - 2\omega_p^4\gamma^2}{\omega^3(\gamma^2 + \omega^2)^2} = 0$$

解得

$$\omega_r = \sqrt{\frac{\omega_p^2 + \sqrt{\omega_p^2(\omega_p^2 + 6\gamma^2)}}{6}} \approx \frac{\omega_p}{\sqrt{3}}$$

结果一致】

(ii) 考虑到 $\gamma \ll \omega_p$, 当 $\omega = \omega_r = \frac{\omega_p}{\sqrt{3}}$ 时

$$\tilde{\epsilon}_r(\omega_r) \approx -2 - i3\sqrt{3} \frac{\gamma}{\omega_p} \quad (28)$$

共振时电场复振幅

$$\tilde{E}_{in}(\omega_r) = \frac{3}{\tilde{\epsilon}_r(\omega_r) + 2} E_0 \approx i \frac{\omega_p}{\sqrt{3}\gamma} E_0 \quad (29)$$

电场振幅大小

$$E_r = \frac{\omega_p}{\sqrt{3}\gamma} E_0 \gg E_0 \quad (30)$$

由⑰⑱式, 球内电流密度复振幅

$$\vec{j} = \tilde{\sigma} E_r = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\gamma + i\omega} E_r = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\gamma^2 + \omega^2} (\gamma - i\omega) E_r = j e^{i\varphi_j} \quad (31)$$

其中

$$j = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2}} E_r, \quad \cos \varphi_j = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2}} \quad (32)$$

平均热功率密度

$$\bar{P}_r = \overline{j(t)E_r(t)} = \overline{j \cos(\omega t + \varphi_j) \cdot E_r \cos \omega t} = \frac{1}{2} j E_r \cos \varphi_j \quad (33)$$

将⑳式和 $\omega = \omega_r = \frac{\omega_p}{\sqrt{3}}$ 、 $E_r = \frac{\omega_p}{\sqrt{3}\gamma} E_0$ 代入, 考虑到 $\gamma \ll \omega_p$, 得

$$\bar{P}_r = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \omega_p^2 \gamma}{\gamma^2 + \omega^2} E_r^2 \approx \frac{\epsilon_0 \omega_p^2 E_0^2}{2\gamma} \quad (34)$$

平均发热功率

$$\bar{P}_r = \bar{P}_r \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2\pi \epsilon_0 \omega_p^2 E_0^2 R^3}{3\gamma} \quad (35)$$

评分参考：本题 50 分。

第 (1) 问 10 分，①③④⑤式各 1 分，②⑥⑦式各 2 分；

第 (2) 问 20 分，

第 (i) 问 4 分，⑧⑨⑩⑪式各 1 分；

第 (ii) 问 8 分，⑫式 2 分，⑬式 4 分，⑭式 2 分；

第 (iii) 问 8 分，⑮式 4 分，⑯⑰式各 1 分，⑱式 2 分；

第 (3) 问 20 分，

第 (i) 问 6 分，⑲式 2 分，⑳㉑式各 1 分，㉒式 2 分；

第 (ii) 问 14 分，㉓⑳㉔㉕㉖㉗式各 2 分。





七、(50分) 假设磁单极子(点磁荷) g 的磁场满足所谓的磁荷库仑定律, 即

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 g}{4\pi r^3} \mathbf{r}$$

其中 μ_0 为真空磁导率, \mathbf{r} 是场点相对于该磁荷所在处的位矢。通常的电磁学理论认为磁单极子不存在, 且迄今为止实验上也没有发现磁单极子。1931年, 狄拉克提出了一个模型, 该模型构造了一根由无数个首尾相接的(磁荷)磁偶极子组成的弦(即狄拉克弦), 该弦从一个端点延伸至无限远, 如图 7a 左图所示。若将每一个小磁偶极子等效为一个小电流环, 则整个狄拉克弦等效为截面相同、均匀密绕的半无限长极细通电螺线管, 如图 7a 右图所示。这种等效意味着狄拉克弦上的微元磁偶极矩 $g d\mathbf{l}$ 与螺线管轴线上相应线元 $d\mathbf{l}$ 的微元磁矩 $d\mathbf{m}$ 相等, 即 $d\mathbf{m} = g d\mathbf{l}$ (见图 7a)。在这种图像下, 螺线管端点处也等效存在一个“磁单极子”, 这样引入的磁单极子遵循通常的电磁学规律。以下引入矢势来讨论狄拉克弦及相关问题。

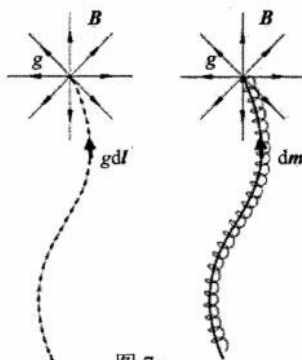


图 7a

按通常的电磁学理论, 磁感应强度 \mathbf{B} 的通量可表示为矢势 \mathbf{A} 的环量, 即

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

其中 L 为曲面 S 的边界环路。磁矩为 \mathbf{m} 的小电流环所激发的矢势为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

其中 \mathbf{r} 是场点相对于电流环所在处的位矢。

(1) 如图 7b, 与狄拉克弦等效的极细通电螺线管端点的磁荷为 g , 从原点沿负 z 轴伸向无穷远。

(i) 导出此螺线管在位置 (r, θ, φ) 处 ($0 \leq \theta < \pi$) 的矢势 \mathbf{A} 的表达式。

提示: $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2+a^2}} + \text{任意常数}$ 。

(ii) 对于图中以 z 轴为轴线、球坐标 r, θ ($0 \leq \theta < \pi$) 固定的有向圆环 L , 请先计算矢势 \mathbf{A} 的环量 Γ_L , 再按磁荷库仑定律计算点磁荷 g 的磁场通过以圆环 L 为边界的圆面的通量 Φ_L (面元法向沿 z 轴正向, 且与环路绕向成右手螺旋关系。不考虑 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 情形), 并比较 Γ_L 与 Φ_L 的异同 (如有差异, 请分析差异的来源)。

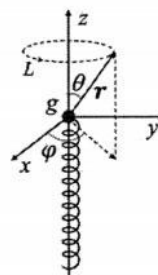


图 7b

(2) 从原点沿负 z 轴延伸的、与狄拉克弦等效的极细通电螺线管中, 其电流 $I(t) = I_0 \cos \omega t$ 为低频交变电流, 已知螺线管的横截面积为 S , 单位长度匝数为 n 。

(i) 求原点处的等效磁荷 $g(t)$ 。

(ii) 将一单位长度电阻为 R_0 的导线弯成正三角形回路, 其边长为 a 。该

三角形位于 $z = -\frac{\sqrt{6}}{12}a$ 的平面上, 螺线管穿过其中心, 如图 7c 所示。求此

三角形回路的平均热功率。不考虑辐射以及三角形回路的自感。

提示: 可考虑正三角形对 g 所张的立体角。

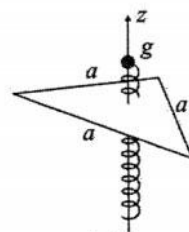


图 7c

(3) 阿哈罗诺夫-玻姆效应(即 A-B 效应)的实验证明:即使在磁感应强度为零的区域,也可能会因为 $A \neq 0$ 出现磁效应。它揭示了磁矢势 A 的物理意义。用自由电子双缝干涉实验可验证 A-B 效应。在该实验中,双缝(缝宽很小)与屏之间的距离为 D ,双缝间距为 d ($d \ll D$);一根无限长的极细直螺线管垂直放置于电子经过双缝后的路径之间,其单位长度匝数为 n ,横截面积为 S ,如图 7d 所示。电子源发出的自由电子的动量大小为 p 、电荷为 $-e$ ($e > 0$)。若螺线管中的电流从 0 变化到 I ,求中心亮条纹在屏上移动的距离。已知动量为 p 的电子在矢势场 A 中的波矢为 $k = \frac{1}{\hbar}(p - eA)$,其中 \hbar 为约化普朗克常量。

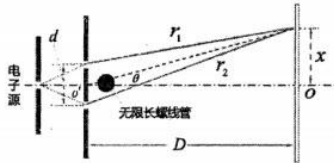


图 7d

参考解答:

(1) (i) 如题解图 7a, 按照题给条件有 $d\mathbf{m} = -g d\mathbf{r}'$, 其中 $\mathbf{r}' = z\mathbf{e}_z$ ($z \in (0, -\infty]$)。

狄拉克弦在空间 \mathbf{r} 处产生的矢量势,可认为是尾(S极)首(N极)相连的无穷多个小磁矩 $d\mathbf{m}$ 在题解图 7a 中 \mathbf{r} 处产生的矢量势叠加,于是有

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0 g}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad ①$$

其中

$$d\mathbf{r}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{-r \sin \theta}{(r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta)^{3/2}} dz e_\phi \quad ②$$

将②式代入①式并化简得

$$A = \frac{\mu_0 g r}{4\pi} \sin \theta e_\phi \int_0^\infty \frac{-dz'}{\sqrt{[(z' - r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta]^3}} \quad ③$$

利用题给不定积分公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} + \text{任意常数}$$

对③式积分得

$$\begin{aligned} A &= \frac{\mu_0 g r}{4\pi} \sin \theta e_\phi \left. \frac{z' - r \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta \sqrt{(z' - r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta}} \right|_{z'=-\infty}^{z'=0} \\ &= \frac{\mu_0 g r}{4\pi} \sin \theta e_\phi \left[\frac{-r \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta \sqrt{(r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta}} - \frac{-1}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \quad ④ \\ &= \frac{\mu_0 g}{4\pi r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} e_\phi \end{aligned}$$

其等价形式有

$$A = \frac{\mu_0 g}{4\pi r} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} e_\phi = \frac{\mu_0 g}{4\pi r} \tan \frac{\theta}{2} e_\phi = \frac{\mu_0 g}{4\pi r} \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r}{1 + \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r}$$

附注:如上 A 的表达式在 $\theta = \pi$ 时无定义。

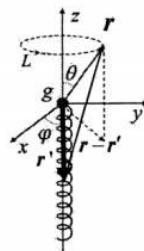
(ii)

1. 关于环量 Γ_L 的求解:

在题解图 7a 的有向圆形环路 L 上取线元

$$d\mathbf{l} = dl e_\phi = r \sin \theta d\phi e_\phi \quad ⑤$$

利用④⑤式,可得



题解图 7a

$$A \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 g}{4\pi r} \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} \times r \sin\theta d\varphi = \frac{\mu_0 g}{4\pi} (1 - \cos\theta) d\varphi \quad (6)$$

故 A 的环量为

$$\Gamma_L = \oint_L A \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 g}{4\pi} (1 - \cos\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 g}{2} (1 - \cos\theta) \quad (7)$$

2. 关于通量 Φ_L 的求解:

【解法一】将圆面划分为半径为 ρ ($\rho < r \sin\theta$) 的环带, 其面元为

$$dS = 2\pi\rho d\rho e_z$$

按磁荷库仑定律, 磁荷 g 的磁场通过面元 dS 的通量微元为

$$d\Phi = 2\pi\rho d\rho \times \frac{\mu_0 g}{4\pi |\xi|^3} \xi \cdot e_z = \frac{\mu_0 g}{2} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + r^2 \cos^2\theta)^{3/2}} r \sin\theta \quad (8)$$

其中 ξ 矢量为面元上某点相对于磁荷所在处的位矢, $|\xi| = \sqrt{\rho^2 + r^2 \cos^2\theta}$ 。

当 $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ 时, 通量

$$\begin{aligned} \Phi_L &= \frac{\mu_0 g}{2} r \cos\theta \int_0^{r \sin\theta} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + r^2 \cos^2\theta)^{3/2}} \\ &= -\frac{\mu_0 g}{2} r \cos\theta \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + r^2 \cos^2\theta}} \Big|_0^{r \sin\theta} \\ &= \frac{\mu_0 g}{2} \left(\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|} - \cos\theta \right) \end{aligned} \quad (9)$$

故有

$$\Phi_L = \begin{cases} \frac{\mu_0 g}{2} (1 - \cos\theta) & \text{当 } \theta < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\mu_0 g}{2} (1 + \cos\theta) & \text{当 } \theta > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (10)$$

【解法二】以有向环路 L 为边界、穿过正 z 轴的曲面 (可以是球面的一部分) 对磁荷所在处所张的立体角为

$$\Omega(\theta) = 2\pi \int_0^\theta \sin\theta' d\theta' = 2\pi(1 - \cos\theta) \quad (8')$$

当 $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ 时, 根据磁荷库仑定律所对应的“高斯定理”及磁荷激发磁场的球对称性, 磁荷 g 的磁场通过圆面的通量

$$\Phi_L = \mu_0 g \frac{\Omega_L}{4\pi} \quad (9')$$

其中圆面对磁荷所在处所张的立体角为

$$\Omega_L = \begin{cases} \Omega(\theta) & \text{当 } \theta < \frac{\pi}{2} \\ \Omega(\theta) - 4\pi & \text{当 } \theta > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

将⑧'代入上式, 并进一步代入⑨'式, 得

$$\Phi_L = \begin{cases} \frac{\mu_0 g}{2} (1 - \cos\theta) & \text{当 } \theta < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\mu_0 g}{2} (1 + \cos\theta) & \text{当 } \theta > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (10')$$

3. 关于 Γ_L 与 Φ_L 的比较:

比较⑦和⑩式可知:

$$\text{当 } \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \Gamma_L = \Phi_L$$

$$\text{当 } \theta > \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \Gamma_L \neq \Phi_L \quad (11)$$

计算 $\theta > \frac{\pi}{2}$ 时两者之差得

$$\Gamma_L - \Phi_L = \mu_0 g \quad (12)$$

⑫式中的差值对应于

圆面所穿过的螺线管内部贡献的磁通

$$\Phi_0 = \mu_0 \frac{dm}{dl} = \mu_0 g \quad (13)$$

其中 dl 是螺线管沿轴线的一段线元, dm 是 dl 上 (沿 e_z 方向) 的微元磁矩。

附注:

1) 设螺线管单位长度匝数为 n 、横截面积为 S 、电流为 I , 则

$$dm = Sdl = nISdl$$

而螺线管内磁场为 $B = \mu_0 nI$, 因此有螺线管内磁通

$$\Phi_0 = \mu_0 \frac{dm}{dl}$$

2) ④式计算的 A 是按照通常的电磁学理论得到的半无限长螺线管的磁矢势, 故 Γ_L 对应于半无限长螺线管磁场对圆环所包围的平面的磁通, 而等效磁荷按照磁荷库仑定律所激发的场仅适用于螺线管外部, 其在 (极细) 螺线管内部贡献的磁通为零, 故当 $\theta > \frac{\pi}{2}$ 时

$$\Gamma_L = \Phi_L + \Phi_0$$

(2) (i) 由⑬式得 (或由 $g = \frac{dm}{dl}$)

$$g = \frac{\Phi_0}{\mu_0} = nIS = nSI_0 \cos \omega t \quad (14)$$

(ii) 可以判断 g 的位置正好为以正三角形为底面的正四面体的中心。

以 g 到三角形顶点距离为半径, g 为球心, 作球面, 即正四面体的外接球, 通过球面的磁通量即通过正三棱锥的磁通量, 若取沿 z 轴向上的磁通为正, 由对称性可知通过该三角面的磁通为

$$\phi'_z = -\frac{1}{4} \mu_0 g = -\frac{1}{4} \mu_0 nSI_0 \cos \omega t \quad (15)$$

因为狄拉克弦穿过三角平面, 通过三角平面的磁通不仅有磁荷 g 的磁通 ϕ'_z , 而且还包含了螺线管部分的磁通 ϕ'_L , 即

$$\phi' = \phi'_L + \phi'_z = \mu_0 g - \frac{1}{4} \mu_0 g = \frac{3}{4} \mu_0 nSI_0 \cos \omega t \quad (16)$$

感应电动势为

$$\varepsilon = -\frac{d\phi'}{dt} = \frac{3}{4} \mu_0 nSI_0 \omega \sin \omega t \quad (17)$$

感应电流为

$$I = \frac{\varepsilon}{3aR_0} = \frac{\mu_0 nSI_0 \omega}{4aR_0} \sin \omega t \quad (18)$$

利用⑰⑱式，一个周期内的平均热功率为

$$W_R = \frac{1}{T} \int_0^T I \varepsilon dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\mu_0 n S I_0 \omega}{4 \rho a} \sin \omega t \right) \left(\frac{3}{4} \mu_0 n S I_0 \omega \sin \omega t \right) dt$$

$$= \frac{3 \mu_0^2 n^2 S^2 I_0^2 \omega^2}{16 a R_0 T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{3 \mu_0^2 n^2 S^2 I_0^2 \omega^2 T}{16 a R_0 T} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \mu_0^2 n^2 S^2 I_0^2 \omega^2}{32 a R_0} \quad (19)$$

(3) 动量为 p 的电子在矢势场 A 中的波矢为

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\hbar} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) = \mathbf{k}_0 - \frac{e}{\hbar} \mathbf{A}$$

两束电子波函数分别经过路径 C_1, C_2 到达屏上某点的位相差为:

$$\Delta\phi = \int_{C_1} \mathbf{k} \cdot d\mathbf{l} - \int_{C_2} \mathbf{k} \cdot d\mathbf{l} = \left(\int_{C_1} \mathbf{k}_0 \cdot d\mathbf{l} - \int_{C_2} \mathbf{k}_0 \cdot d\mathbf{l} \right) - \frac{e}{\hbar} \left(\int_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \int_{-C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right)$$

$$= \Delta\phi_0 - \frac{e}{\hbar} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (20)$$

其中 C 为 $C_1, -C_2$ 所围成的回路。

螺线管通电后出现 A 导致的位相差变化为:

$$\Delta\phi = \Delta\phi_1 - \Delta\phi_0 = -\frac{e}{\hbar} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{e}{\hbar} \Phi = -\frac{e}{\hbar} \mu_0 n I S \quad (21)$$

未接通电流时，电子从双缝形成的两束波在屏上亮条纹位置满足相干增强条件

$$\Delta\phi_0 = k_0 d \sin \theta = 2l\pi \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (22)$$

设屏上的 l 级亮条纹位置与双缝中轴线的距离为 x ，则有

$$x = D \tan \theta \approx D \sin \theta = \frac{2l\pi D}{k_0 d} \quad (23)$$

通有电流 I 时，相干增强条件条件变为

$$\Delta\phi_1 = k_0 d \sin \theta - \frac{e}{\hbar} \Phi = 2l\pi \quad (24)$$

l 级明纹位置变为:

$$x' = \frac{2l\pi D}{k_0 d} + \frac{eD}{\hbar k_0 d} \Phi \quad (25)$$

(中心) 亮纹的移动距离为

$$\Delta x = x' - x = \frac{eD}{\hbar k_0 d} \Phi = \frac{eD}{pd} \mu_0 n I S \quad (26)$$

评分参考: 本题 50 分。

第 (1) 问 24 分，

第 (i) 问 8 分，①式 1 分，②式 3 分，④式 4 分；

第 (ii) 问 16 分，⑤式 1 分，⑥⑦⑧⑨⑩式各 2 分 (⑧'⑨'⑩'式各 2 分)，⑪式 2 分，⑬式 3 分

第 (2) 问 14 分，

第 (i) 问 2 分，⑭式 2 分；

第 (ii) 问 12 分，⑮式 4 分，⑯⑰⑱式各 2 分

第 (3) 问 12 分，⑳㉑式共 4 分，㉒-㉕式共 4 分，㉖式 4 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主选拔在线官方微信号：[zizzsw](https://www.zizzs.com)。



微信搜一搜

自主选拔在线

