2022~2023 学年度下期高 2024 届半期考试

数学试卷（理科）

考试时长：120 分钟　　满分：150 分

一、选择题（每小题 5 分，共 60 分）

1．已知复数 $z=(m-1)+(m+1)i,(m\in R)$ 为纯虚数，则实数 m 的值为（　　）

（A）-1　　（B）1　　（C）0　　（D）1 或 -1

2．在极坐标系中，过点 $(1,0)$ 且垂直于极轴的直线的极坐标方程为（　　）

（A）$\rho=1$　　（B）$\rho\sin\theta=1$　　（C）$\rho\cos\theta=1$　　（D）$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

3．利用分析法证明不等式 $M>N$ 成立，只需证明 $P>N$ 成立即可，则“$P>N$ 成立”是“$M>N$ 成立”的（　　）

（A）充分条件　　（B）必要条件　　（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要

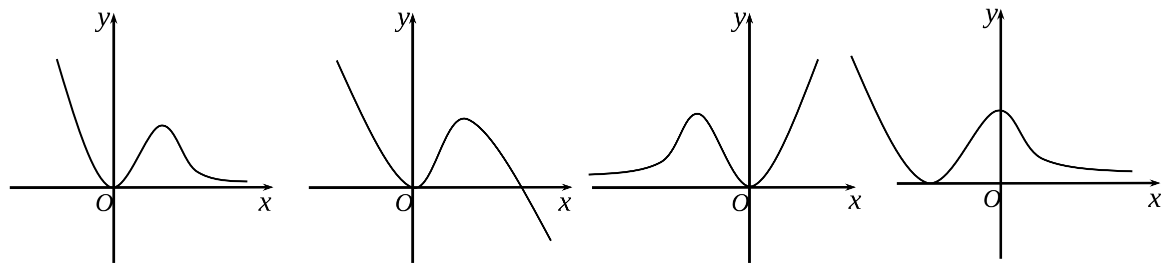
4．已知 (x_0,y_0) 是圆 $x^2+y^2=r^2$ 上一点，则直线 $x_0x+y_0y=r^2$ 与圆 $x^2+y^2=r^2$ 相切，且 (x_0,y_0) 为切点，类似的，点 (x_0,y_0) 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点，则以 (x_0,y_0) 为切点，与椭圆相切的切线方程为（　　）

（A）$x_0x+y_0y=1$　　（B）$x_0x+y_0y=a^2b^2$　　（C）$\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$　　（D）$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$

5．已知复数 $z=x+yi,(x,y\in R)$ 对应的点在第一象限，z 的实部和虚部分别是双曲线 C 的实轴长和虚轴长，若 $|z|=4$，则双曲线 C 的焦距为（　　）

（A）8　　（B）4　　（C）$2\sqrt{2}$　　（D）2

6．函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$ 的大致图像为（　　）



（A）　　（B）　　（C）　　（D）

7．将圆 $x^2+y^2=1$ 经过伸缩变换 $\varphi:\begin{cases}x'=4x\\y'=2y\end{cases}$ 后得到的曲线方程为（　　）

（A）$16x^2+4y^2=1$　　（B）$4x^2+2y^2=1$　　（C）$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$　　（D）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$

8．已知函数 $f(x)=a\sin x+\cos x$ 区间 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上单调递增，则实数 a 的范围是（　　）

（A）$(-\infty,1]$　　（B）$[0,+\infty)$　　（C）$[\sqrt{2},+\infty)$　　（D）$[1,+\infty)$

9．已知 $a=e^{-0.5},b=0.5,c=\ln 1.5$，则下列不等关系正确的是（　　）

（A）$a>c>b$　　（B）$a>b>c$　　（C）$b>a>c$　　（D）$c>b>a$

10．已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2，抛物线 E：$y^2=4x$ 与椭圆 C 有相同的焦点，点 P 为抛物线 E 与椭圆 C 在第一象限内的交点，直线 PF_1 与抛物线 E 相切，则椭圆 C 的长轴长为（　　）

（A）$\sqrt{2}+2$　　（B）$2\sqrt{2}+2$　　（C）4　　（D）$4\sqrt{2}$

11．关于函数 $f(x)=\frac{1}{4}(x-\frac{1}{x})-\ln x$ 的零点，下列说法正确的是（　　）

（A）函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1,x_2，且 $x_1x_2=1$

（B）函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1,x_2，且 $x_1x_2\neq 1$

（C）函数 $f(x)$ 有三个零点 x_1,x_2,x_3，且 $x_1x_2x_3=1$

（D）函数 $f(x)$ 有三个零点 x_1,x_2,x_3，且 $x_1x_2x_3\neq 1$

12．已知实数 a,b 满足 $a^2+b^2=a+b$，则 a^3+b^3 的取值范围是（　　）

（A）$[0,2]$　　（B）$[0,1]$　　（C）$[-2,2]$　　（D）$[1,2]$

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13．复数 $z=\frac{2-i}{1+2i}$ 的共轭复数为 $\bar{z}$，则 $\bar{z}=$______________.

14．在极坐标系中，点 $A(4,\frac{\pi}{6})$，$B(2,\frac{\pi}{2})$，则线段 AB 的长为____________.

15．已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，$f(0)=1$，且 $f'(x)>f(x)$，则不等式 $f(x)>e^x$ 的解集为______________.

16．已知函数 $f(x)=x+\sin x,(x\in R)$，有以下四个命题：

①对 $\forall x>0$，不等式 $f(x)<2x$ 恒成立；

② $x=\pi$ 是函数 $f(x)$ 的极值点；

③函数 $f(x)$ 的图像与 x 轴及 $x=\frac{\pi}{2}$ 围成的区域面积为 $\frac{\pi^2}{8}+1$；

④ $\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}<\frac{2\pi}{7}$.

其中正确的命题有____________________.（将正确的序号都写上，多写漏写均不得分）

三、解答题（共 70 分）

17.（本小题 10 分）已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2=4\rho\cos\theta-3$， A,B 是曲线 C 上不同的两点，且 $\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OB}$，其中 O 为极点.

（Ⅰ）求曲线 C 的直角坐标方程；

（Ⅱ）求点 B 的极径.

18.（本小题 12 分）某企业生产的某种乳制品的蛋白质含量 x（%）与生产成本 y（元）之间的数据如下表：

x	0	0.69	1.39	1.79	2.40	2.56	2.94
y	19	32	40	44	52	53	54

已知生产成本 y 与产品蛋白质含量 x 之间具有线性相关关系.

（Ⅰ）求生产成本 y 关于蛋白质含量 x 的回归方程；

（Ⅱ）根据（Ⅰ）的结果，若公司准备将生产成本提高到 60 至 70 元，则判断生产的乳制品蛋白质含量的取值范围.（精确到小数点后两位）

参考公式：$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$.

参考数据：$\bar{x}=1.68,\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2=6.79,\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=81.41$.

19.（本小题 12 分）函数 $f(x)=e^x(x^2-ax-a)$.

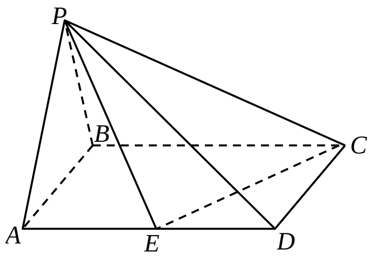
（Ⅰ）若 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，求 a 的值，并判断 $x=1$ 是极大值点还是极小值点；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调区间.

20．（本小题 12 分）在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，ΔPAB 为边长为 2 的正三角形，且平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，E 为线段 AD 的中点，PE 与平面 $ABCD$ 所成角为 45° .

（Ⅰ）求证：平面 $PCE\perp$ 平面 PBC；

（Ⅱ）求直线 PA 与平面 PCE 所成角的正弦值.



21．（本小题 12 分）已知过点 $(0,2)$ 的直线与抛物线 $x^2=4y$ 相交于 A,B 两点，M 为线段 AB 的中点，过 M 作 x 轴的垂线与抛物线交于点 N.

（1）若抛物线在 N 点处的切线的斜率等于 2，求直线 AB 的方程;

（2）设 $D(0,11)$，求 ΔDAB 与 ΔNAB 面积之差的最大值.

22．（本题 12 分）已知函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}-(\ln x)^2$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小值;

（Ⅱ）证明不等式 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{2^k\cdot(2^k+1)}}>\ln\dfrac{2^{n+1}}{2^n+1}$（$n\in\mathbf{N}^*$）.