2023 届高三综合测试（二）

数学参考答案与评分标准

评分说明:

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则。

2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半, 如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4. 只给整数分数. 选择题不给中间分。

一、**单项选择题**：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	B	C	D	D	B	A	C

1. 【解析】 化简得 $z=1+i, \bar{z}=1-i, |\bar{z}|=\sqrt{2}$, 选 B.

2. 【解析】 依题意 $\begin{cases} x>1 \\ x<\frac{3}{2} \end{cases}$，即 $1<x<\frac{3}{2}$，选 B.

3. 【解析】 $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, 所以 $\lambda+u=\frac{4}{3}$，选 C.

4. 【解析】按椭圆对称轴所在直线建立直角坐标系，则椭圆方程为 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a>b>0)$，

令 $y=-c$，有一个 $x=\frac{b^2}{a}$，所以有 $\begin{cases} a+c=110 \\ \frac{2b^2}{a}=44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=110 \\ \frac{a^2-c^2}{a}=22 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a-c}{a}=\frac{22}{110}$

$\Leftrightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$, 选 D.

5. 【解析】 设棱台的上底面矩形边长分别为 a，b，则下底面矩形边长分别为 $2a, 2b$，则 棱台的体积为：$V=\frac{1}{3}\times 3\times(ab+\sqrt{ab\times 4ab}+4ab)=63$，所以 $ab=9$，

棱台的上底面的周长为 $2(a+b)\geq 4\sqrt{ab}=12$, 当 $a=b=3$ 时，上底面的周长最小值为

12，选 D.

6. 【解析】 由图可知，$\frac{1}{4}T=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=1$，所以 $T=4$，$\omega=\frac{\pi}{2}$；一条对称轴为 $x=\frac{2}{3}$，所以 $\frac{\pi}{2}\times\frac{2}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$；故 $f(x)=3\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $g(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

所以 $g(x)$ 的图象的最小正周期为 $T=\pi$，A 正确；

因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\frac{\pi}{3}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{4\pi}{3}$，B 错误；

对于 C：令 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}(k\in Z)$，所以 C 正确；

对于 D：令 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}(k\in Z)$，所以 D 正确. 故选 B.

7. 【解析】 由方程 $x+5+\ln x=0$ 和 $x+5+e^x=0$，可得 $\ln x=-x-5$ 和 $e^x=-x-5$，因为方程的根分别是 α,β，且 $y=\ln x$ 与 $y=e^x$ 互为反函数，所以 $y=-x-5$ 分别与 $y=\ln x$ 和 $y=e^x$ 的交点的横坐标为 α,β，故有 $\begin{cases}y=x\\y=-x-5\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-\frac{5}{2}\\y=-\frac{5}{2}\end{cases}$，所以 $\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{5}{2}$，　$f(x)=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=x^2-5x+\alpha\beta=(x-\frac{5}{2})^2+\alpha\beta-\frac{25}{4}$，

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,\frac{5}{2}]$，故选 A.

8.【解析】 当 $1\leqslant n\leqslant 2$ 时，$0.5<\sqrt{n}<1.5$，则 $f\left(\sqrt{n}\right)=1$，$\frac{1}{f\left(\sqrt{n}\right)}=1$；

当 $3\le n\le 6$ 时，$1.5<\sqrt{n}<2.5$，则 $f\left(\sqrt{n}\right)=2$，$\frac{1}{f\left(\sqrt{n}\right)}=\frac{1}{2}$；

当 $7\le n\le 12$ 时，$2.5<\sqrt{n}<3.5$，则 $f\left(\sqrt{n}\right)=3$，$\frac{1}{f\left(\sqrt{n}\right)}=\frac{1}{3}$；

当 $13\le n\le 20$ 时，$3.5<\sqrt{n}<4.5$，则 $f\left(\sqrt{n}\right)=4$，$\frac{1}{f\left(\sqrt{n}\right)}=\frac{1}{4}$；

当$\frac{2k-1}{2}<\sqrt{n}<\frac{2k+1}{2}\left(k\in N^*\right)$时，$\frac{1}{f\left(\sqrt{n}\right)}=\frac{1}{k}$，此时$k^2-k+\frac{1}{4}<n<k^2+k+\frac{1}{4}$，包含$k^2-k+1$，$k^2-k+2$，…，$k^2+k$，共$2k$个整数，

所以将$\frac{1}{f\left(\sqrt{n}\right)}$分组为$(1,1)$，$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，…，$\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots\frac{1}{n}\right)$，第$n$组有$2n$个数，且每一组中所有数之和为$2n\times\frac{1}{n}=2$，

$$\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(\sqrt{2})}+\frac{1}{f(\sqrt{3})}+\frac{1}{f(\sqrt{4})}+\frac{1}{f(\sqrt{5})}+\cdots+\frac{1}{f(90)}+\cdots+\frac{1}{f(\sqrt{99})}+\frac{1}{f(\sqrt{100})}$$

$$=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\cdots$$

$=1\times2+\frac{1}{2}\times4+\frac{1}{3}\times6+\frac{1}{4}\times8+\frac{1}{5}\times10+\frac{1}{6}\times12+\cdots+\frac{1}{9}\times18+\frac{1}{10}\times10=19$，故选C.

二、**多项选择题**：本题共4小题，全部选对得5分，选对但不全得2分，有选错的得0分.

题号	9	10	11	12
答案	AD	ACD	BC	BCD

9.【解析】

对于A，曲线C表示双曲线，$a^2=4,b^2=4\lambda$，$c^2=4(1+\lambda)$，A正确;

对于B，曲线C表示椭圆，$a^2=4(-\lambda),b^2=4$，$c^2=4(-1-\lambda)$，B不对;

对于C，$\lambda=-1$时，曲线C表示圆$x^2+y^2=4$，C不对;

对于D，曲线C表示椭圆，$a^2=4,b^2=-4\lambda$，$c^2=4(1+\lambda)$，D正确．

10.【解析】对于A，由二项分布的期望公式，$E(X)=\frac{1}{3}n$，由期望的运算性质，$E(3X+1)=3E(X)+1=n+1=6$，则n=5，所以A正确;

对于B，由正态分布曲线的性质可知，$P(X\geq4)=1-0.7=0.3$，根据对称性，$P(X\leq-2)=0.3$，于是$P(-2<X<1)=0.5-0.3=0.2$，B错误;

对于C，因为$P(A)>0,P(B)>0,P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=P(B)\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B)$

所以 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=P(A)$，所以 C 正确；

对于 D，因为 $P\left(\overline{A}\right)=\dfrac{1}{2}$，$P\left(B\middle|\overline{A}\right)=\dfrac{1}{4}$，所以 $P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P\left(\overline{B}\middle|\overline{A}\right)=\dfrac{3}{4}$，又因为 $P\left(\overline{B}\middle|A\right)=\dfrac{2}{3}$，

由全概率公式，可得 $P(\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B}\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}\mid\overline{A})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{17}{24}$，故选：ACD.

11.【解析】 对于 A，由正方体性质得：平面 $BCC'B'//$ 平面 $ADD'A'$，

平面 $BCC'B'\cap$ 平面 $EMFN=MF$，平面 $ADD'A'\cap$ 平面 $EMFN=EN$，故 $MF//EN$，

同理得 $ME//NF$，又 $EF\perp MN$，所以四边形 $MENF$ 为菱形，故 A 不正确；

对于 B，连接 BD，$B'D'$，MN．由题易得 $EF\perp BD$，$EF\perp BB'$，$BD\cap BB'=B$，

所以 $EF\perp$ 平面 $BDD'B'$，平面 $EMFN\perp$ 平面 $DBB'D'$，故 B 正确；

对于 C 选项，四棱锥 $A-MENF$ 的体积，

$$V_1=V_{M-AEF}+V_{N-AEF}=\frac{1}{3}DB\cdot S_{\triangle AEF}=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{6}$$

故 C 正确；

对于 D 选项，由于四边形 $MENF$ 是菱形，所以周长

$$l=4\sqrt{\frac{MN^2}{4}+\frac{EF^2}{4}}=4\frac{\sqrt{MN^2+2}}{2}=2\sqrt{MN^2+2},$$

所以当点 M，N 分别为 BB'，DD' 的中点时，四边形 $MENF$ 的周长最小，

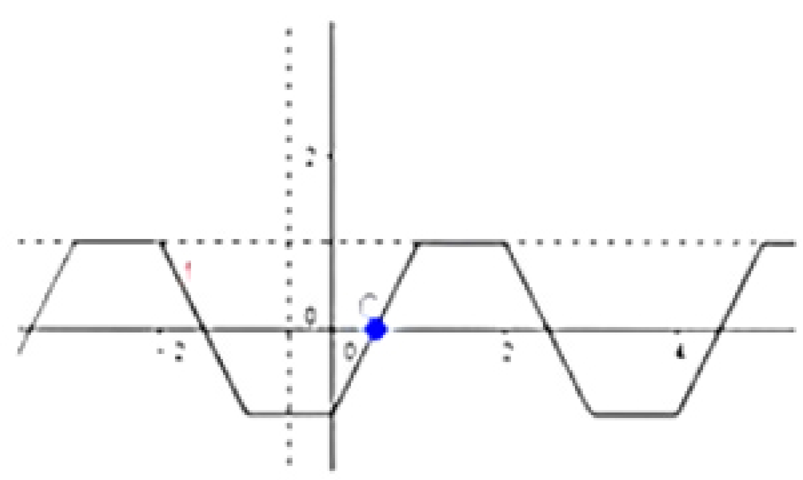
此时 $MN=EF=\sqrt{2}$，即周长的最小值为 4，故 D 不正确．故选：BC.

12.【解析】

由 $f(x+4)=f(x)$，所以 $F(x+4)=f(x+4)+f(x+3)=f(x)+f(x-1)=F(x)$，

所以 $y=F(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，又 $F(0)=f(0)+f(-1)=-1\neq0$，所以

$y=F(x)$ 不是是奇函数，A 错误.



可求得 $y=F(x)=\begin{cases}-2x-3,-2\le x\le -1\\ -1,-1\le x\le 0\\ 2x-1,0\le x\le 1\\ 1,1\le x\le 2\end{cases}$，

所以函数 $y=F(x)$ 的最大值为 1，B 正确.

当 $x\in(2022,2023)$ 时，$x-2024\in(-2,-1)$，所以 $F(x)=F(x-2024)=-2x+4045$，

单调递减，C 正确.

因为 $F(x)=F(-1-x)$，$F(x)$ 关于 $x=-\frac{1}{2}$ 成轴对称，因为 $-F(x)=F(1-x)$，

$F(x)$ 关于 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 成中心对称，D 正确．选 BCD.

三、**填空题**：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\frac{1}{2}$　　　　14. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

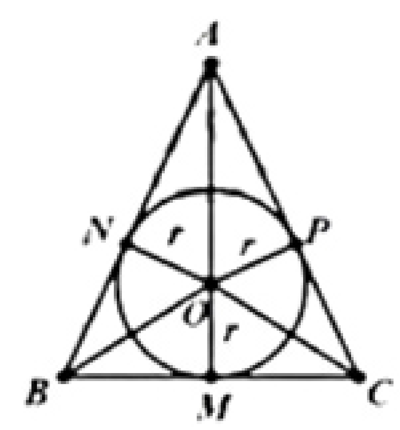
15. $\frac{4}{3}\pi$　　　　16. $(x-3)^2+(y+2)^2=16$ （2 分），　$[\sqrt{2},9\sqrt{2}]$（3 分）

13. 【解析】所求概率 $P=\frac{A_3^3A_2^2}{A_4^4}=\frac{1}{2}$

14. 【解析】由已知可得，$\tan\alpha=2$，再由同角关系可得，$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以

$\sin(\pi-\alpha)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

15. 【解析】设圆锥底面半径为 R，母线长为 L，则 $\begin{cases}\pi RL=2\pi\\ \frac{2\pi R}{L}=\frac{2\pi}{3}\end{cases}$ 解



得 $R=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$L=\sqrt{6}$，易知半径最大球为圆锥的内切球，球与圆锥内

切时的轴截面如图所示，其中 $AB=AC=\sqrt{6}$，$BC=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，且点 M 为 BC 边上的中

点，设内切圆的圆心为 O，由于 $AM=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，

设内切圆半径为r，则：$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}AB\times r\times 2+\frac{1}{2}BC\times r$，

解得：$r=\frac{\sqrt{3}}{3}$，其表面积：$S=4\pi r^2=4\pi(\frac{\sqrt{3}}{3})^2=\frac{4}{3}\pi$.

16.【解析】：过抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点 $F(1,0)$ 且斜率为 -1 的直线为 $y=-x+1$，由 $\begin{cases} y^2=4x \\ y=-x+1 \end{cases}$ 消去 x，得 $x^2-6x+1=0$，所以 AB 的中点为 $D(3,-2)$ 且 $|AB|=x_1+x_2+p=8$，所以线段 AB 为直径的圆的半径为 $r=4$，方程为 $(x-3)^2+(y+2)^2=16$，对圆 D 内任意一点 M，必可作互相垂直的两直线与相交，故存在圆 D 上两点 P,Q，使 $\angle PMQ=90^\circ$；对圆 D 外任意一点 M，P,Q 是圆 D 上两点，当 MP,MQ 与圆 D 相切时，$\angle PMQ$ 最大，此时 $DPMQ$ 为矩形，$|DM|=\sqrt{2}r=4\sqrt{2}$，所以若以线段 AB 为直径的圆上存在两点 P,Q，在圆 $T:(x-a)^2+y^2=1$ 上存在一点 M，使得 $\angle PMQ=90^\circ$，等价于以 D,为圆心以 $|DM|=\sqrt{2}r=2\sqrt{2}$ 为半径的圆与圆 $T:(x+2)^2+(y+7)^2=a^2(a>0)$ 有公共点，所以 $a-4\sqrt{2}\le|DT|=\sqrt{(-2-3)^2+(-7+2)^2}\le 4\sqrt{2}+a$，解得 $\sqrt{2}\le a\le 9\sqrt{2}$，所以填 $[\sqrt{2},9\sqrt{2}]$.

四、解答题： 本题共 6 小题，共 70 分.

17.（10 分）

解：（1）令 $\{a_n\}$ 是等比数列，设公比为 q，

当 $n=1$ 时，有 $a_2=a_1+1=a_1q$，……………………………………………………1 分

当 $n\ge 2$ 时，有 $a_{n+1}=S_n+1$，$a_n=S_{n-1}+1$，……………………………………………2 分

相减得：$a_{n+1}-a_n=a_n$，有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$，所以有 $q=2$，……………………………………3 分

代入解得 $a_1=1$，故有 $a_n=2^{n-1}$. ……………………………………………………………4 分

（2）由（1）知：$b_n=(-1)^n\left(2^{n-1}+n\right)$ ……………………………………………………5 分

$b_{2n}=2^{2n-1}+2n$，$b_{2n-1}=-2^{2n-2}-2n+1$ ……………………………………………7 分

$b_{2n}+b_{2n-1}=4^{n-1}+1$ ……………………………………………………………………8 分

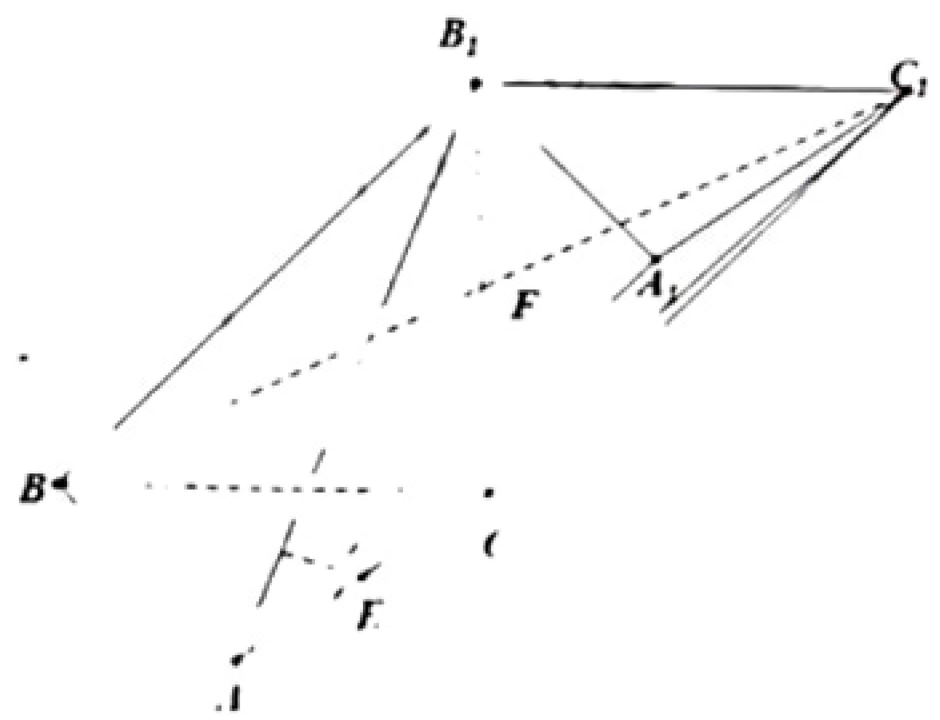
$\therefore S_{2n}=(b_1+b_2)+(b_3+b_4)+\cdots+(b_{2n-1}+b_{2n})$

$=\left(1+4+\cdots+4^{n-1}\right)+n$

$=\dfrac{4^n-1}{3}+n$ ……………………………………………………………………………10 分

18.（12 分）

证明：（1）连接 CB_1 交 BC_1 于点 F，连接 EF，则 F 是 B_1C 的中点 ……………………………………………………1 分



由于 E、F 分别是 AC,B_1C 的中点，所以

$EF // AB_1$ ……………………………………………………2 分

由于 $AB_1 \not\subset$ 面BEC_1，$EF\subset$ 面BEC_1，所以

$AB_1 //$ 面BEC_1 ……………………………………………………4 分

（2）由点 B_1 在底面上的射影为点 C，所以 $B_1C\perp$ 平面ABC ……………………………5分

在 ΔABC 中 $AB=1,BC=2,AC=\sqrt{5}$　　$\therefore AB\perp BC$

过 B 作 B_1C 的平行线为 Z 轴易知 AB,CB,Z 两两垂直，如图以 B 为原点，分别以 AB,CB,Z 所在直线为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系 ……………………………6 分

$B(0,0,0),A(1,0,0)$，$C(0,2,0)$，$B_1(0,2,2)$，$E(\frac{1}{2},1,0)$

$\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BC}$，得 $C_1(0,4,2)$ ……………………………………………………7 分

$\overrightarrow{AE}=(-\frac{1}{2},1,0)$，$\overrightarrow{EC_1}=(-\frac{1}{2},3,2)$ $\overrightarrow{BE}=(\frac{1}{2},1,0)$，$\overrightarrow{BC_1}=(0,4,2)$

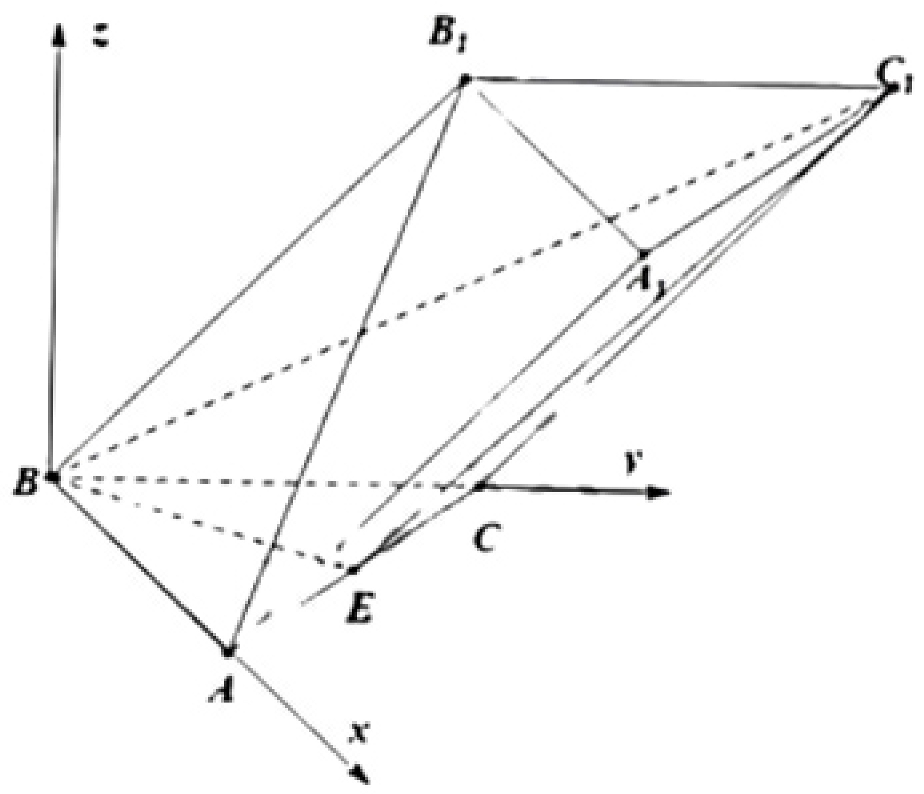
设平面 BC_1E 的法向量 $\vec{m}=(x，y，z)$

$$\overrightarrow{BE}\cdot\vec{m}=\frac{1}{2}x+y=0$$
$$\overrightarrow{BC_1}\cdot\vec{m}=4y+2z=0$$
$\therefore\vec{m}=(2,-1,2)$ ……………………………………8 分

设平面 AEC_1A_1 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

$$\overrightarrow{AE}\cdot\vec{n}=-\frac{1}{2}x+y=0$$
$$\overrightarrow{EC_1}\cdot\vec{n}=-\frac{1}{2}x+3y+2z=0$$
$\therefore\vec{n}=(2,1,-1)$ ……………………………………9 分

设平面 BEC_1 与平面 AEC_1A_1 所成角为 θ



$$\cos\theta=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{9}\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{18}$$ ………………11 分

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3\sqrt{6}}\right)^2}=\frac{\sqrt{318}}{18}$$

所以，平面 BEC_1 与平面 AEC_1A_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{318}}{18}$ ……………………………12 分

19.（12 分）

解：（1） 在 ΔAPB 中，$PA=PB=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$AB=\sqrt{2}$，

由余弦定理得 $\cos\angle PBA=\frac{AB^2+PB^2-PA^2}{2AB\cdot PB}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ ……………………………2 分

又 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$ $\sin\angle PBC=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ……………………………………………3 分

$$S_{\Delta PBC}=\frac{1}{2}PB\times BC\sin\angle PBC=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$ ……………………5 分

（2）法 1：设 $\angle PAB=\theta$，则 $\theta\in(0,\frac{\pi}{4})$，

在 ΔAPB 中，因为 $\angle APB=\frac{3\pi}{4}$，所以 $\angle PBA=\pi-\frac{3\pi}{4}-\theta=\frac{\pi}{4}-\theta$， ………6 分

由正弦定理，得 $\dfrac{PB}{\sin\angle PAB}=\dfrac{AB}{\sin\angle APB}$，从而 $PB=2\sin\theta$， ……………………7 分

在 ΔCPB 中，$\angle PBC=\dfrac{\pi}{2}-(\dfrac{\pi}{4}-\theta)=\dfrac{\pi}{4}+\theta$，

由余弦定理得：$PC^2=PB^2+BC^2-2PB\cdot BC\cos(\dfrac{\pi}{4}+\theta)$ ……………………8 分

$=4\sin^2\theta+\sqrt{2}^2-2\times2\sin\theta\times\sqrt{2}\cos(\dfrac{\pi}{4}+\theta)=$

$=2-2\cos2\theta+2-4\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)$

$=6-2(2\cos2\theta+\sin2\theta)$

$=6-2\sqrt{5}\sin(2\theta+\varphi)$（其中 $\tan\varphi=2,\varphi\in(0,\dfrac{\pi}{2})$）， ……………………10 分

因为 $\theta\in(0,\dfrac{\pi}{4})$，所以 $2\theta+\varphi\in(\varphi,\dfrac{\pi}{2}+\varphi)$， ……………………11 分

所以当 $2\theta+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$PC_{\min}^2=6-2\sqrt{5}=(\sqrt{5})^2-2\times1\times\sqrt{5}+1^2$，

从而，$PC_{\min}=\sqrt{5}-1$。 ……………………12 分

（2）法 2：设 $\angle PBA=\theta$，

在 ΔAPB 中，因为 $\angle APB=\dfrac{3\pi}{4}$，所以

$\angle PAB=\pi-\dfrac{3\pi}{4}-\theta=\dfrac{\pi}{4}-\theta$，则 $\theta\in(0,\dfrac{\pi}{4})$， ……………………6 分

由正弦定理，得 $\dfrac{PA}{\sin\angle PBA}=\dfrac{AB}{\sin\angle APB}$，

从而 $PA=2\sin\theta$， ……………………7 分

在 ΔPAC 中，因为 $\angle CAB=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $\angle PAC=\theta$， ……………………8 分

由余弦定理得 $PC^2=PA^2+AC^2-2PA\cdot AC\cos\theta$

$=4\sin^2\theta+2^2-2\times2\sin\theta\times2\cos\theta==2-2\cos2\theta+4-4\sin2\theta$

$=6-2(\cos 2\theta+2\sin 2\theta)=6-2\sqrt{5}\sin(2\theta+\varphi)$（其中

$\tan\varphi=\frac{1}{2},\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$）……………………………………………………10 分

因为 $\theta\in(0,\frac{\pi}{4})$，所以 $2\theta+\varphi\in(\varphi,\frac{\pi}{2}+\varphi)$，……………………………………11 分

所以当 $2\theta+\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，$PC_{min}^2=6-2\sqrt{5}=(\sqrt{5})^2-2\times1\times\sqrt{5}+1^2$，

从而 $PC_{min}=\sqrt{5}-1$ ……………………………………………………………………12 分

法 3：利用定角定弦模型中的隐圆处理亦可给分。

20.（12 分）

解：(1) 因为 $1-\frac{C_4^2}{C_{y_1}^2}=\frac{5}{6}$，所以 $\frac{4\times3}{y_1(y_1-1)}=\frac{1}{6}$ ……………………………………1 分

所以 $y_1(y_1-1)=4\times3\times6=9\times8\Rightarrow y_1=9$ ……………………………………2 分

即第一天新增患感冒而就诊的学生有9位，其中男生4位，女生5位

则随机变量 X 的可能取值为：$0,1,2$ ……………………………………………3 分

且 X 服从超几何分布，其中 $N=9,M=4,n=2$

$P(X=0)=\frac{C_5^2}{C_9^2}=\frac{5}{18}$，$P(X=1)=\frac{C_5^1\times C_4^1}{C_9^2}=\frac{5}{9}$，$P(X=2)=\frac{C_4^2}{C_9^2}=\frac{3}{18}$ ……5 分

即 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{18}$

数学期望 $E(X)=0\times\frac{5}{18}+1\times\frac{5}{9}+2\times\frac{3}{18}=\frac{8}{9}$ ……………………………………7 分

（或 $E(x)=n\cdot\frac{M}{N}=2\times\frac{4}{9}=\frac{8}{9}$.）

(2) $\because\sum_{i=1}^{6}x_i=54,\therefore\bar{x}=9,\therefore\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2=64$ ……………………………………8 分

由于 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\overline{y})^2}}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{8\times 17}=\dfrac{16}{17}$

所以 $\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=16\times 8$

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{16\times 8}{64}=2$ ……………………………………9 分

因为 $\sum\limits_{i=1}^{6}y_i^2=3463$，$\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\overline{y})^2=\sum\limits_{i=1}^{6}y_i^2-2\overline{y}\cdot\sum\limits_{i=1}^{6}y_i+6\overline{y}^2=\sum\limits_{i=1}^{6}y_i^2-6\overline{y}^2=289\Rightarrow\overline{y}=23$

……………………………………………………………………………………10 分

所以 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}=23-2\times 9=5$ ……………………………………………11 分

所以 $\hat{y}=2x+5$，当 $x=15$ 时，$\hat{y}=2\times 15+5=35$

所以可以估计，昼夜温差为 $15^\circ C$ 时，该校新增患感冒的学生人数 35 人…………12 分

21.（12 分）

解：（1）因为 ΔOMN 为正三角形，由对称性知 $\angle MOF_1=30$， ……………………1 分

又因为 $|OM|=c=\sqrt{a^2+b^2}$，

所以 $|MF_1|=\dfrac{1}{2}|MO|=\dfrac{1}{2}c$，$|OF_1|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}|MO|=\dfrac{\sqrt{3}c}{2}$，……………………………2 分

不妨设 $M(-\dfrac{\sqrt{3}c}{2},\dfrac{c}{2})$，因为 $M\in C$，所以得 $\dfrac{3c^2}{2}-\dfrac{c^2}{b^2}=4$，

$(3b^2-2)c^2=8b^2$，$(3b^2-2)(2+b^2)=8b^2$，

$3b^4-4b^2-4=0$，$(3b^2+2)(b^2-2)=0$，所以 $b^2=2$， ……………………………3 分

所以双曲线 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ …………………………………………4 分

渐近线方程为 $y=\pm x$ ………………………………………………………………5 分

法 2：因为 ΔOMN 为正三角形，由对称性知 $\angle MOF_1=30^\circ$， ……………………………1 分

又因为$|OM|=c=\sqrt{a^2+b^2}$，所以$M(-\frac{\sqrt{3}}{2}c,\frac{c}{2})$，……………………………………2 分

由双曲线定义得

$$2a=|MF_2|-|MF_1|=\sqrt{(-\frac{\sqrt{3}}{2}c-c)^2+(\frac{c}{2}-0)^2}-\sqrt{(-\frac{\sqrt{3}}{2}c+c)^2+(\frac{c}{2}-0)^2}$$

$$=(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}})c$$

所以$4a^2=(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}})^2c^2=2c^2$

因为$a=\sqrt{2}$………………………………………………………………………………3 分

所以$c^2=4$，$b^2=c^2-a^2=2$，

所以双曲线C的标准方程为$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$.………………………………………………4 分

渐近线方程为$y=\pm x$…………………………………………………………………………5 分

（2）由（1）可得$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$.

①当点$PF_2\perp x$轴时，由对称性不妨设点$P(2,\sqrt{2})$，$B(2,-\sqrt{2})$，

$PF_1:y=\frac{\sqrt{2}}{2+2}(x+2)$，

联立方程组：$\begin{cases}y=\frac{\sqrt{2}}{4}(x+2)\\x^2-y^2=2\end{cases}$ 消 x 得：$7y^2-8\sqrt{2}y+2=0$，

$y_A=\frac{\sqrt{2}}{7}$，所以$x_A=-\frac{10}{7}$，所以$\frac{|PF_1|}{|AF_1|}=\frac{y_P}{y_A}=7$，$\frac{|PF_2|}{|BF_2|}=-\frac{y_P}{y_B}=1$，

所以$\frac{|PF_1|}{|AF_1|}-\frac{|PF_2|}{|BF_2|}=6$.……………………………………………………6 分

②当点PF_2不垂直x轴时，由对称性不妨设$P(x_0,y_0)(y_0>0)$，$A(x_1,y_1)$，

$B(x_2,y_2)$，直线$PA:y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，

联立方程组：$\begin{cases} y=\dfrac{y_0}{x_0+2}(x+2) \\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 消去 x 得：$(\dfrac{x_0+2}{y_0}y-2)^2-y^2=2$，…………7 分

因为 $x_0^{\ 2}-y_0^{\ 2}=2$，所以 $\dfrac{4x_0+6}{y_0^{\ 2}}y^2-\dfrac{4(x_0+2)}{y_0}y+2=0$，……………………8 分

由韦达定理：$y_0y_1=\dfrac{y_0^{\ 2}}{2x_0+3}$

所以 $y_1=\dfrac{y_0}{2x_0+3}>0$，…………………………………………………………………9 分

同理，$y_2=-\dfrac{y_0}{2x_0-3}<0$，……………………………………………………………10 分

所以 $\dfrac{|PF_1|}{|AF_1|}-\dfrac{|PF_2|}{|BF_2|}=\dfrac{|y_0|}{|y_1|}-\dfrac{|y_0|}{|y_2|}=\dfrac{y_0}{y_1}-\dfrac{y_0}{-y_2}=y_0(\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2})$

$=y_0(\dfrac{2x_0+3}{y_0}-\dfrac{2x_0-3}{y_0})=6$

所以 $\dfrac{|PF_1|}{|AF_1|}-\dfrac{|PF_2|}{|BF_2|}$ 为定值，且定值为 6 ……………………………………………12 分

22.（12 分）

解：（1）$\because f(x)=\sin x$ $\therefore f'(x)=\cos x$．

$\therefore k=f'(\dfrac{\pi}{3})=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ ………………………………………………………… 1 分

$\therefore$ 以点 $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 为切点的切线方程为 $y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{\pi}{3})$ ……………………………2 分

易知，切线与坐标轴交点的坐标分别为 $(\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3},0)$，$(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6})$ ………………3 分

$\therefore$ 切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为

$S=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right|\cdot\left|\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right|=\dfrac{1}{4}(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3})^2$． ………………………………………4 分

（2）$\because h(x)=f(x)\cdot g(x)=(x-m)\cdot\sin x$

$\therefore h'(x)=\sin x+(x-m)\cos x$

当 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$h'(x)=\cos x\cdot(\tan x+x-m)$. ……………………………………5 分

由函数 $y=\tan x+x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上递增，且值域为R，

故存在唯一 $x_0\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $\tan x_0+x_0=m$ ……………………………………6 分

此时当 $-\frac{\pi}{2}<x<x_0$ 时，$h'(x)<0,h(x)$ 单调递减；

当 $x_0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$h'(x)>0,h(x)$ 单调递增，因此 $x_1=x_0$ ……………………………………7 分

同理，存在唯一 $x_0'\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，使得 $\tan x_0'+x_0'=m$

此时当 $\frac{\pi}{2}<x<x_0'$ 时，$h'(x)>0,h(x)$ 单调递增；

当 $x_0'<x<\frac{3\pi}{2}$ 时，$h'(x)<0,h(x)$ 单调递减，因此 $x_2=x_0'$ ……………………………………8 分

由 $h'(x_1)=0,x_1-m=-\tan x_1,h(x_1)=-\frac{\sin^2 x_1}{\cos x_1}=\cos x_1-\frac{1}{\cos x_1}$

同理：$h(x_2)=-\frac{\sin^2 x_2}{\cos x_2}=\cos x_2-\frac{1}{\cos x_2}$ ……………………………………9 分

由 $h(x_1)+h(x_2)=0$，整理得：$(\cos x_1+\cos x_2)\left(1-\frac{1}{\cos x_1\cos x_2}\right)=0$ ……………………10 分

又 $-\frac{\pi}{2}<x_1<\frac{\pi}{2}<x_2<\frac{3\pi}{2}$，故 $\cos x_1\cos x_2\neq 1$，则有 $\cos x_1=-\cos x_2=\cos(x_2-\pi)$

由 $-\frac{\pi}{2}<x_2-\pi<\frac{\pi}{2}$，故 $x_1=x_2-\pi$ 或 $x_1=-(x_2-\pi)$ ……………………………………11 分

又 $m=x_1+\tan x_1=x_2+\tan x_2$，当 $x_1=x_2-\pi$ 时，不满足，舍去.

所以 $x_1=-(x_2-\pi)$，即 $x_1+x_2=\pi$，则 $m=\frac{x_1+\tan x_1+x_2+\tan x_2}{2}=\frac{\pi}{2}$.

综上所述，$m=\frac{\pi}{2}$ ……………………………………12 分