运城市 2023 年高三第二次模拟调研测试·数学

参考答案、提示及评分细则

1. B　由题意知 $U=\{x\in\mathbf{Z}\mid -1\leqslant x\leqslant 6\}=\{-1,0,1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{x\in\mathbf{Z}\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}=\{0,1,2,3\}$，所以 $A\cup B=\{0,1,2,3,4\}$，$\{-1,5,6\}=\complement_U(A\cup B)$. 故选 B.

2. D　由题意得 $(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，即 $\boldsymbol{a}^2+t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，故 $10+5t=0$，解得 $t=-2$. 故选 D.

3. B　去掉最高分和最低分后，中位数一定不变，其余数字特征不一定不变. 故选 B.

4. A　因为 $S_n+a_n=n(n\in\mathbf{N}^*)$，即 $S_n=n-a_n$，所以 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n-a_n-(n-1-a_{n-1})$，所以 $2a_n=1+a_{n-1}$，化为 $a_n-1=\frac{1}{2}(a_{n-1}-1)$，当 $n=1$ 时，$2a_1=1$，即 $a_1=\frac{1}{2}$，所以 $a_1-1=-\frac{1}{2}$. 所以数列 $\{a_n-1\}$ 是等比数列，首项为 $-\frac{1}{2}$，公比为 $\frac{1}{2}$，所以 $a_n-1=-\frac{1}{2^n}$，所以 $a_n=1-\frac{1}{2^n}$，所以 $\log_2(1-a_{2\,023})=\log_2\frac{1}{2^{2\,023}}=-2\,023$. 故选 A.

5. B　由题意，$\ln m=-4k+a$，$\ln\frac{m}{2}=-\frac{1}{2}\ln 4-\frac{k}{4}b^2+a$，所以 $\ln m-\ln\frac{m}{2}=-4k+a-\left(-\frac{1}{2}\ln 4-\frac{k}{4}b^2+a\right)$，即 $-4k+\frac{k}{4}b^2=0$. 又 $k\neq 0$，所以 $b^2=16$. 因为 $b>0$，所以 $b=4$. 故选 B.

6. C　直角梯形 $ABCD$ 绕 AB 旋转一周所得几何体的体积 $V_1=\frac{1}{3}(4\pi+16\pi+\sqrt{4\pi\times16\pi})\times4=\frac{112\pi}{3}$，设重心 G 到 AB 的距离为 d_1，则 $\frac{112\pi}{3}=\frac{2+4}{2}\times4\times2\pi d_1$，解得 $d_1=\frac{14}{9}$；直角梯形绕 BC 旋转一周所得几何体的体积 $V_2=32\pi+\frac{32\pi}{3}=\frac{128\pi}{3}$，设重心 G 到 BC 的距离为 d_2，则 $\frac{128\pi}{3}=\frac{2+4}{2}\times4\times2\pi d_2$，所以 $d_2=\frac{16}{9}$，所以 $BG=\sqrt{\left(\frac{14}{9}\right)^2+\left(\frac{16}{9}\right)^2}=\frac{2\sqrt{113}}{9}$. 故选 C.

7. A　由题意知 $PF_1\perp PF_2$，所以 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2$，又因为 $||PF_1|-|PF_2||=2a$，与 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2$ 联立，得 $|PF_1|\cdot|PF_2|=2b^2$，$(|PF_1|+|PF_2|)^2=4c^2+4b^2$，所以 $|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{c^2+b^2}$，又 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|=\frac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|)\cdot a$，所以 $2b^2=a(2\sqrt{b^2+c^2}+2c)$，即 $b^2-ac=a\sqrt{b^2+c^2}$，所以 $b^2-2ac=a^2$，即 $c^2-2ac-2a^2=0$，所以 $e^2-2e-2=0$，所以 $e=\sqrt{3}+1$. 故选 A.

8. D　由题意知 $a=\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3\frac{9}{7}}=3^{\log_3\frac{7}{9}}=\frac{7}{9}$，$\ln b-\ln a=0.1+\ln 0.7-\ln\frac{7}{9}=\frac{1}{10}+\ln\frac{9}{10}$，令 $f(x)=1-x+\ln x$，则 $f'(x)=-1+\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x}$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $f\left(\frac{9}{10}\right)<f(1)=0$，所以 $\ln b-\ln a<0$，所以 $a>b$；因为 $\cos\frac{2}{3}=1-2\sin^2\frac{1}{3}$，易知 $0<\sin\frac{1}{3}<\frac{1}{3}$，所以 $\cos\frac{2}{3}=1-2\sin^2\frac{1}{3}>1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$，所以 $c>a$，所以 $c>a>b$. 故选 D.

9. BC　对于 A，取 $z_1=3+\mathrm{i}$，$z_2=1+\mathrm{i}$ 时，$z_1-z_2=2>0$，但虚数不能比较大小，故 A 错误；对于 B，由 $|z_1|=|z_2|$，得 $|z_1|^2=|z_2|^2$，所以 $z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}$，故 B 正确；对于 C，因为 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}>1$，所以 $|z_1|>|z_2|$，故 C 正确；对于 D，取 $z_1=1$，$z_2=\mathrm{i}$，满足 $z_1^2+z_2^2=0$，但是 $z_1\neq z_2\neq 0$，故 D 错误. 故选 BC.

10. ACD　$f(x)=\frac{6\sin x\cos x}{2\cos^2x+1}=\frac{3\sin 2x}{\cos 2x+2}$，所以 $f(\pi-x)=\frac{3\sin(2\pi-2x)}{\cos(2\pi-2x)+2}=\frac{-3\sin 2x}{\cos 2x+2}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 对称；$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\sin(2x+\pi)}{\cos(2x+\pi)+2}=\frac{-3\sin 2x}{-\cos 2x+2}=\frac{3\sin 2x}{\cos 2x-2}\neq f(x)$，故 $\frac{\pi}{2}$ 不是 $f(x)$ 的周期；设 $k=\frac{\sin 2x}{\cos 2x+2}$，则 k 的大小等于点 $(\cos 2x,\sin 2x)$ 与点 $(-2,0)$ 连线的斜率，又点 $(\cos 2x,\sin 2x)$ 在圆 O：$x^2+y^2=1$ 上，

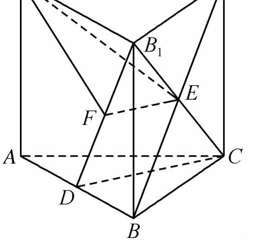
利用数形结合的方法易得 k 的取值范围为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$，故 $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$；$f'(x)=\frac{12\cos 2x+6}{(\cos 2x+2)^2}$，令 $f'(x)\leqslant 0$，得 $\cos 2x\leqslant -\frac{1}{2}$，所以 $\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，故 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减，综上 ACD 正确. 故选 ACD.

11. ABC　设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，若 l 过点 F，则点 F 的坐标为 $(3,0)$，所以 $p=6$，故 C 的准线方程为 $x=-3$，C 的方程为 $y^2=12x$，与 l 的方程联立，消去 y 并整理，得 $x^2-9x+9=0$，则 $x_1+x_2=9$，$x_1x_2=9$，所以 $|AF|=3+x_1$，$|BF|=3+x_2$，$|AB|=6+x_1+x_2=15$，所以 $|AF|\cdot|BF|=9+3(x_1+x_2)+x_1x_2=9+27+9=45$，所以 $\frac{|AF|\cdot|BF|}{|AB|}=3$，故 AB 均正确；将 l 的方程与 C 的方程联立，得 $2x^2-(p+12)x+18=0$，所以 $x_1+x_2=\frac{p+12}{2}$，$x_1x_2=9$，设 $N(x_0,y_0)$，则 $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=-(x_1+x_2)+6=-\frac{p}{2}$，所以 $x_0=\frac{y_0^2}{2p}=\frac{p}{8}$，即 $N\left(\frac{p}{8},-\frac{p}{2}\right)$，由 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$ 得 $\left(x_1-\frac{p}{8}\right)\left(x_2-\frac{p}{8}\right)+\left(y_1+\frac{p}{2}\right)\left(y_2+\frac{p}{2}\right)=0$，即 $5x_1x_2-\left(12+\frac{9p}{8}\right)(x_1+x_2)+\frac{17p^2}{64}+6p+36=0$，所以 $19p^2+432p-576=0$，所以 $p=\frac{24}{19}$，焦点 $F\left(\frac{12}{19},0\right)$. 故 C 正确，D 错误. 故选 ABC.

12. BCD　对于 A，$f(x)=x^3+\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=3x^2+\frac{1}{x}$，因为 $x>0$，所以 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 显然 $f(x)=x^3+\ln x$ 不是“m 函数”，故 A 错误；对于 B，函数 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$g'(x)>0$，此时 $g(x)$ 单调递增，故 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$ 是“m 函数”，故 B 正确；对于 C，$h(x)=\ln x-\mathrm{e}^x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$h'(x)=\frac{1}{x}-\mathrm{e}^x$，显然 $h'(x)$ 是减函数，又 $h'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}>0$，$h'(1)=1-\mathrm{e}<0$，存在唯一的常数 $x_0\in\left(\frac{1}{\mathrm{e}},1\right)$，使 $h'(x_0)=0$. 于是 $h'(x)>0\Leftrightarrow x\in(0,x_0)$，$h'(x)<0\Leftrightarrow x\in(x_0,+\infty)$，所以 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(0,x_0)$. 令 $x_0=m$，则 $m\in(0,\mathrm{e}]$，且 $m\mathrm{e}^m=1$. 故 C 正确；对于 D，$\varphi(x)=\frac{\ln x}{\mathrm{e}^x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$\varphi'(x)=\frac{1-x\ln x}{x\mathrm{e}^x}$. 令 $y=1-x\ln x$，则 $y'=-\ln x-1$. $y'>0\Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$；$y'<0\Leftrightarrow x>\frac{1}{\mathrm{e}}$，所以 $y=1-x\ln x$ 在 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 上单调递减. 所以 $y_{\max}=1+\frac{1}{\mathrm{e}}>0$. 又 $x>0$，且 $x\to 0$ 时，$1-x\ln x\to 1$；当 $x=\mathrm{e}$ 时，$y=1-x\ln x=1-\mathrm{e}<0$. 由零点存在定理及函数的单调性，存在唯一的常数 $x_1\in\left(\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right)$，使得 $1-x_1\ln x_1=0$，即 $x_1\ln x_1=1$. 于是 $\varphi'(x)>0\Leftrightarrow 1-x\ln x>0\Leftrightarrow 0<x<x_1$，$\varphi'(x)<0\Leftrightarrow 1-x\ln x<0\Leftrightarrow x>x_1$. 令 $x_1=m$，则 $\varphi(x)=\frac{\ln x}{\mathrm{e}^x}$ 是“m 函数”，且 $m\ln m=1$. 故 D 正确. 故选 BCD.

13. e　由题意知曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线斜率等于 3，又 $f'(x)=\frac{1}{x\ln a}+2x$，所以 $f'(1)=\frac{1}{\ln a}+2=3$，所以 $a=\mathrm{e}$.

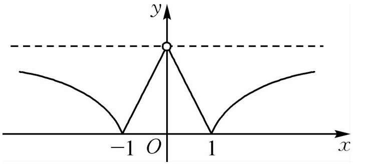
14. 1 792　$\left(x-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 展开式的通项公式 $T_{r+1}=\mathrm{C}_8^r x^{8-r}\left(-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^r=(-2)^r\mathrm{C}_8^r x^{8-\frac{4r}{3}}(r=0,1,2,\cdots,8)$，令 $8-\frac{4r}{3}=0$，得 $r=6$. 令 $8-\frac{4r}{3}=-1$ 无整数解，所以展开式中的常数项为 $(-2)^6\mathrm{C}_8^6=1\ 792$.



15. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　连接 B_1D，取 B_1D 中点 F，连接 A_1F，EF，则 $EF/\!/CD$，所以 $\angle A_1EF$ 为 CD 与 A_1E 所成的角(或其补角). 因为在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，D 为棱 AB 的中点，易证 $CD\perp$ 平面 ABB_1A_1，从而可得 $EF\perp$ 平面 ABB_1A_1，又 $A_1F\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $EF\perp A_1F$，不妨设 AB

$=2$,则 $CD=\sqrt{3}$,$B_1D=\sqrt{5}$,所以 $EF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$B_1F=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$,又 $\cos\angle A_1B_1F=\cos\angle B_1DB=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,所以 $A_1F=\sqrt{A_1B_1^2+B_1F^2-2A_1B_1\cdot B_1F\cos\angle A_1B_1F}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$,所以 $A_1E=\sqrt{A_1F^2+EF^2}=2$,所以 $\cos\angle A_1EF=\dfrac{EF}{A_1E}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

16. $-2<b<0$ 且 $c=0$　显然 $f(x)$ 为偶函数,当 $x>0$ 时,$f(x)=\begin{cases}-2x+2,0<x<1,\\ 2-\dfrac{2}{x},x\geqslant 1,\end{cases}$ 画出 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的图象,利用偶函数的对称性,易得 $f(x)$ 在其定义域上的图象(如图所示);设 $f(x)=t$,则原方程变为 $t^2+bt+c=0$,所以原方程有 6 个不同的实数解的充要条件是方程 $t^2+bt+c=0$ 的两根 t_1,t_2 满足 $t_1=0$ 且 $0<t_2<2$;又 $t_1=0$ 时 $c=0$ 且 $t_2=-b$,而 $\Delta=b^2-4c$,则问题等价于 $\begin{cases}b^2-4c>0,\\ 0<-b<2,\\ c=0,\end{cases}$ 所以 $-2<b<0$ 且 $c=0$.



17. 解:(1)因为 $(a-b)(\sin A+\sin B)=c(\sqrt{3}\sin A-\sin C)$,

由正弦定理,得 $(a-b)(a+b)=c(\sqrt{3}a-c)$,即 $a^2+c^2-b^2=\sqrt{3}ac$, ………… 2 分

所以由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{3}ac}{2ac}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ………… 4 分

因为 $0<B<\pi$,所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$. ………… 5 分

(2)因为 $A=\dfrac{\pi}{4}$,$b=2$,$B=\dfrac{\pi}{6}$,

所以 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$,即 $a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}=\dfrac{2\sin\dfrac{\pi}{4}}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=2\sqrt{2}$, ………… 7 分

则 $C=\pi-A-B=\pi-\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7\pi}{12}$,$\sin C=\sin\dfrac{7\pi}{12}=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, ………… 8 分

所以△ABC 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=\sqrt{3}+1$. ………… 10 分

18. (1)证明:当 n 为偶数时 $a_n=3a_{\frac{n}{2}}$,又 $2^n(n\in\mathbf{N}^*)$ 为偶数,

所以 $a_{2^n}=3a_{2^{n-1}}$,又 $a_1=1$,所以 $a_2=3a_1=3\neq 0$,所以 $a_{2^n}\neq 0$, ………… 2 分

所以 $\dfrac{a_{2^n}}{a_{2^{n-1}}}=3$,所以 $\{a_{2^n}\}$ 是以 3 为首项,3 为公比的等比数列. ………… 4 分

(2)解:由(1)得 $a_{2^n}=3\times 3^{n-1}=3^n$, ………… 5 分

当 n 为奇数时,$a_n=a_{n-2}+2(n\geqslant 3)$,

所以 $a_{2n+1}=a_{2n-1}+2$,所以 $\{a_{2n-1}\}$ 是公差为 2 的等差数列, ………… 6 分

所以 $a_{2n-1}=a_1+2(n-1)=2n-1$,

所以 $b_n=(2n-1)\cdot 3^n$. ………… 7 分

所以 $S_n=1\times 3+3\times 3^2+5\times 3^3+\cdots+(2n-3)\times 3^{n-1}+(2n-1)\times 3^n$,

两边同乘以 3,得

$3S_n=1\times 3^2+3\times 3^3+5\times 3^4+\cdots+(2n-3)\times 3^n+(2n-1)\times 3^{n+1}$, ………… 8 分

两式相减,得

$-2S_n=3+2\times 3^2+2\times 3^3+\cdots+2\times 3^n-(2n-1)\times 3^{n+1}=3+2\times\dfrac{3^2(1-3^{n-1})}{1-3}-(2n-1)\times 3^{n+1}$

$=3+3^{n+1}-9-(2n-1)\times 3^{n+1}=-6-(2n-2)\times 3^{n+1}$,

所以 $S_n=(n-1)\times 3^{n+1}+3$. …………………………………………………………………………… 12 分

19.(1)证明:延长 FM 与 DA 的延长线交于点 N,连接 CN 交 AB 于点 H,连接 FH.

因为平面 α∥平面 $ABCD$,平面 $\alpha\cap$平面 $PAD=EF$,平面 $ABCD\cap$平面 $PAD=AD$,且 E 为 PA 的中点,所以 $EF\parallel AD$,且 $AD=2EF$。同理可得 $FG\parallel CD$, $CD=2FG$. …………………………………………………… 2 分

又 $AM=2ME$,所以 $AN=2EF=AD$, ………………………………………………………………… 3 分

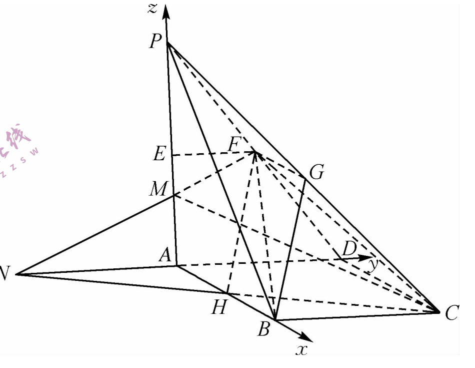
又 $AB\parallel CD$,所以 H 为 AB 的中点,所以 $BH\parallel CD$,且 $CD=2BH$. ……………………………… 4 分

又 $FG\parallel CD$, $CD=2FG$,

所以 $FG\parallel BH$,且 $FG=BH$,所以四边形 $BHFG$ 为平行四边形,所以 $BG\parallel FH$, ……………… 5 分

又 $FH\subset$平面 CFM,$BG\not\subset$平面 CFM,

所以 $BG\parallel$平面 CFM. ……………………………………………………………………………… 6 分



(2)解:由题意易得 AB,AD,AP 两两垂直,故以 A 为坐标原点,直线 AB,AD,AP 分别为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间直角坐标系(如图所示),则 $C(4,4,0)$,$D(0,4,0)$,$F(0,2,3)$,$M(0,0,2)$,$P(0,0,6)$,所以 $\overrightarrow{CD}=(-4,0,0)$,$\overrightarrow{CF}=(-4,-2,3)$,$\overrightarrow{MF}=(0,2,1)$,$\overrightarrow{PD}=(0,4,-6)$.

…………………………………………………………………… 8 分

设平面 PCD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$ 即

$\begin{cases}4y-6z=0,\\ -4x=0,\end{cases}$ 令 $z=2$,得 $x=0$,$y=3$,故 $\boldsymbol{n}=(0,3,2)$. …………… 9 分

设平面 CFM 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{MF}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2b+c=0,\\ -4a-2b+3c=0,\end{cases}$

令 $b=1$,得 $a=-2$,$c=-2$,故 $\boldsymbol{m}=(-2,1,-2)$. …………………………………………………… 10 分

设平面 CFM 与平面 PCD 所成锐二面角的大小为 θ,

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{3\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{13}}{39}$,即平面 CFM 与平面 PCD 所成的锐二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{13}}{39}$.

…………………………………………………………………………………………………… 12 分

20.解:(1)由题意,乙得 10 分的基本事件有{乙抢到两题且一道正确一道错误或没有回答}、{甲,乙各抢到一题都回答正确}、{甲抢到两题且都回答错误或没有回答}, …………………………………………… 1 分

所以乙总得分为 10 分的概率 $P=2\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{337}{900}$. …… 4 分

(2)由题意得,甲的总得分 X 可能取值为 0,5,10,15,20. ……………………………………………… 5 分

$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{289}{900}$; ……………………………… 6 分

$P(X=5)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{17}{150}$; ……………………………………… 7 分

$P(X=10)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{349}{900}$; ……………… 8 分

$P(X=15)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{15}$; ……………………………………………………… 9 分

$P(X=20)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$. ………………………………………………………… 10 分

分布列如下：

X	0	5	10	15	20
P	$\frac{289}{900}$	$\frac{17}{150}$	$\frac{349}{900}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{9}$

所以 $E(X)=0\times\frac{289}{900}+5\times\frac{17}{150}+10\times\frac{349}{900}+15\times\frac{1}{15}+20\times\frac{1}{9}=\frac{23}{3}$. ………………………… 12 分

21. 解：(1)设 C 的焦距为 $2c$，由题意知 $\begin{cases}(a+c)-(a-c)=2\sqrt{3},\\ \frac{2b^2}{a}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ ………………………… 2 分

解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=1,\\ c=\sqrt{3},\end{cases}$ ………………………… 4 分

故 C 的方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$. ………………………… 5 分

(2)设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$

消去 y 整理得 $(k^2+4)x^2+2mkx+m^2-4=0$， ………………………… 6 分

所以 $\Delta=4m^2k^2-4(k^2+4)(m^2-4)>0$，即 $k^2-m^2+4>0$，

且 $x_1+x_2=\frac{-2km}{k^2+4}$，$x_1x_2=\frac{m^2-4}{k^2+4}$. ………………………… 7 分

因为点 P 是线段 MN 靠近点 N 的四等分点，

所以 $\overrightarrow{MP}=3\overrightarrow{PN}$，所以 $x_1=-3x_2$，

所以 $3(x_1+x_2)^2=3\times(-2x_2)^2=-4x_2\times(-3x_2)=-4x_1x_2$.

所以 $3(x_1+x_2)^2+4x_1x_2=0$， ………………………… 8 分

所以 $\frac{12k^2m^2}{(k^2+4)^2}+\frac{4(m^2-4)}{k^2+4}=0$，

整理得 $m^2k^2+m^2-k^2-4=0$， ………………………… 9 分

显然 $m^2=1$ 不成立，所以 $k^2=\frac{4-m^2}{m^2-1}$.

因为 $k^2-m^2+4>0$，所以 $\frac{4-m^2}{m^2-1}-m^2+4>0$，即 $\frac{(4-m^2)m^2}{m^2-1}>0$. ………………………… 10 分

解得 $-2<m<-1$，或 $1<m<2$，

所以实数 m 的取值范围为 $(-2,-1)\cup(1,2)$. ………………………… 12 分

22. 解：(1)当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=x\ln x-\frac{1}{4}x^2-x+\frac{1}{2}$，其定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=\ln x+1-\frac{1}{2}x-1=\ln x-\frac{1}{2}x$，

所以 $g(x)=\ln x-\frac{1}{2}x$， ………………………… 1 分

所以 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{2-x}{2x}(x>0)$，令 $g'(x)>0$，得 $0<x<2$；令 $g'(x)<0$，得 $x>2$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减. ………………………… 2 分

①当 $t+1\leqslant 2$，即 $0<t\leqslant 1$ 时，$g(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上单调递增，

所以 $h(t)=g(x)_{\max}=g(t+1)=\ln(t+1)-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$；…… 3 分

②当 $t\leqslant 2, t+1>2$，即 $1<t\leqslant 2$ 时，$h(t)=g(x)_{\max}=g(2)=\ln 2-1$；…… 4 分

③当 $t>2$ 时，$g(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上单调递减，所以 $h(t)=g(x)_{\max}=g(t)=\ln t-\frac{1}{2}t$.

综上所述，$h(t)=\begin{cases}\ln(t+1)-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}, 0<t\leqslant 1,\\ \ln 2-1, 1<t\leqslant 2,\\ \ln t-\frac{1}{2}t, t>2.\end{cases}$ …… 5 分

(2)因为 $e^{1+m}<x_1x_2^m$，所以 $1+m<\ln x_1+m\ln x_2$，

由题意知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\ln x-ax$，故 x_1,x_2 是关于 x 的方程 $f'(x)=\ln x-ax=0$ 的两个根，

…… 6 分

所以 $f'(x_1)=\ln x_1-ax_1=0$，$f'(x_2)=\ln x_2-ax_2=0$，即 $\ln x_1=ax_1$，$\ln x_2=ax_2$，

所以 $1+m<\ln x_1+m\ln x_2$ 等价于 $1+m<ax_1+max_2=a(x_1+mx_2)$.

因为 $m>0, 0<x_1<x_2$，所以原式等价于 $a>\frac{1+m}{x_1+mx_2}$，…… 7 分

又 $\ln x_1=ax_1$，$\ln x_2=ax_2$，作差，得 $\ln\frac{x_1}{x_2}=a(x_1-x_2)$，即 $a=\frac{\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$，

所以原式等价于 $\frac{\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}>\frac{1+m}{x_1+mx_2}$. …… 8 分

因为 $0<x_1<x_2$，所以 $\ln\frac{x_1}{x_2}<\frac{(1+m)(x_1-x_2)}{x_1+mx_2}$ 恒成立.

令 $t=\frac{x_1}{x_2}$，则 $t\in(0,1)$，故不等式 $\ln t<\frac{(1+m)(t-1)}{t+m}$ 在 $t\in(0,1)$ 上恒成立，…… 9 分

令 $\varphi(t)=\ln t-\frac{(1+m)(t-1)}{t+m}$.

又因为 $\varphi'(t)=\frac{1}{t}-\frac{(1+m)^2}{(t+m)^2}=\frac{(t-1)(t-m^2)}{t(t+m)^2}$，

当 $m^2\geqslant 1$ 时，得 $t\in(0,1)$ 时，$\varphi'(t)>0$，所以 $\varphi(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

又 $\varphi(1)=0$，所以 $\varphi(t)<0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，符合题意；…… 10 分

当 $m^2<1$ 时，可得 $t\in(0,m^2)$ 时，$\varphi'(t)>0$，$t\in(m^2,1)$ 时，$\varphi'(t)<0$，

所以 $\varphi(t)$ 在 $(0,m^2)$ 上单调递增，在 $(m^2,1)$ 上单调递减，又因为 $\varphi(1)=0$，

所以 $\varphi(t)$ 在 $(0,1)$ 上不能恒小于 0，不符合题意，舍去. …… 11 分

综上所述，若不等式 $e^{1+m}<x_1x_2^m$ 恒成立，只需满足 $m^2\geqslant 1$，又 $m>0$，故 $m\geqslant 1$，

即正数 m 的取值范围为 $[1,+\infty)$. …… 12 分