

数 学

2023. 6

考生注意:

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。
3. 本卷命题范围:集合与常用逻辑用语,不等式,函数,一元函数导数及其应用(单调性)。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 命题 $p: \forall x \in [1, 2], x^2 - 1 \geq 0$, 则 $\neg p$ 是
 - A. $\exists x \notin [1, 2], x^2 - 1 \geq 0$
 - B. $\exists x \in [1, 2], x^2 - 1 < 0$
 - C. $\forall x \notin [1, 2], x^2 - 1 \geq 0$
 - D. $\forall x \in [1, 2], x^2 - 1 < 0$
2. 已知集合 $A = \{x | x = 2^n, n \in \mathbf{N}^*\}$, $B = \{x | x = 2n, n \in \mathbf{N}^*\}$, 则
 - A. $A \subseteq B$
 - B. $B \subseteq A$
 - C. $A \cap B = \emptyset$
 - D. $A = B$
3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2(2-x), & x < 0, \\ 2^x - k, & x \geq 0, \end{cases}$ 若 $f(f(-2)) = 3$, 则 $k =$
 - A. -1
 - B. 0
 - C. 1
 - D. 2
4. 已知实数 $a > b > c, abc \neq 0$, 则下列结论一定正确的是
 - A. $\frac{a}{b} > \frac{a}{c}$
 - B. $ab > bc$
 - C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{c}$
 - D. $ab + bc > ac + b^2$
5. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f'(1)e^{x-1} - f(0)x + \frac{1}{2}x^2$, 则 $f'(1)$ 的值为
 - A. e
 - B. $\frac{1}{e}$
 - C. 1
 - D. 0

6. 不等式 $x^2+mx-n<0$ 的解集为 $\{x|4<x<5\}$, 则关于 x 的不等式 $nx^2+mx-1>0$ 的解集为

A. $\{x|-5<x<-4\}$

B. $\{x|-\frac{1}{4}<x<-\frac{1}{5}\}$

C. $\{x|4<x<5\}$

D. $\{x|\frac{1}{5}<x<\frac{1}{4}\}$

7. “一骑红尘妃子笑,无人知是荔枝来”描述了封建统治者的骄奢生活,同时也讲述了古代资源流通的不便利. 如今我国物流行业蓬勃发展,极大地促进了社会经济发展和资源整合. 已知某类果蔬的保鲜时间 y (单位:小时)与储藏温度 x (单位: $^{\circ}\text{C}$) 满足函数关系 $y=e^{ax+b}$ (a, b 为常数), 若该果蔬在 6°C 的保鲜时间为 216 小时, 在 24°C 的保鲜时间为 8 小时, 那么在 12°C 时, 该果蔬的保鲜时间为

A. 72 小时

B. 36 小时

C. 24 小时

D. 16 小时

8. 定义在正整数上的函数满足 $f(k+2)=\sqrt{3}f(k+1)-f(k)$ ($k\in\mathbf{N}^*$), 则 $f(65)=$

A. $f(1)$

B. $f(3)$

C. $f(5)$

D. $f(7)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合要求, 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知集合 $A=\{x|-1\leq x\leq 7\}$, $B=\{x|a+2\leq x\leq 2a-1\}$, 若使 $B\subseteq A$ 成立的实数 a 的取值集合为 M , 下列为 M 的真子集的是

A. $(-\infty, 4]$

B. $(-\infty, 3]$

C. $(3, 4]$

D. $[4, 5)$

10. 已知正数 a, b 满足 $a+2b=2ab$, 则下列说法一定正确的是

A. $a+2b\geq 4$

B. $a+b\geq 4$

C. $ab\geq 2$

D. $a^2+4b^2\geq 8$

11. 已知函数 $y=2a+\left|\frac{(1-2a)x+3+2a}{x-1}\right|$ (a 是常数) 在 $[2, 5]$ 上的最大值是 5, 则 a 的值可能是

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

12. 若 $0<x_1<x_2<1$, 则下列选项正确的是

A. $e^{x_2}-e^{x_1}>\ln x_2-\ln x_1$

B. $x_2e^{x_1}>x_1e^{x_2}$

C. $x_2^{x_1}>x_1^{x_2}$

D. $x_1^{x_1}>x_2^{x_2}$

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 请写出一个满足条件①和②的幂函数 $f(x)$, 条件: ① $f(x)$ 是偶函数; ② $f(x)$ 为 $(-\infty, 0)$ 上的增函数. 则 $f(x)=$ _____.

14. 若不等式 $x^2-2x+3-m\geq 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 则实数 m 的取值范围是_____.

15. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, $f(0)=1$, 且 $f'(x)>f(x)$, 则不等式 $f(x)>e^x$ 的解集为_____.

16. 已知 x_1 满足 $3x+e^x=3$, x_2 满足 $3x-e^{2-x}=3$, 则 $x_1+x_2=$ _____.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

设集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$, 集合 $B = \{x | 2 - a < x < 2 + a\}$.

(1) 若 $a = 2$, 求 $A \cup B$ 和 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B)$;

(2) 设命题 $p: x \in A$, 命题 $q: x \in B$, 若 p 是 q 成立的必要不充分条件, 求实数 a 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^3 - ax$, 且 $f'(-1) = -1$.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求过点 $(2, f(2))$ 且与函数 $f(x)$ 图象相切的直线方程.

19. (本小题满分 12 分)

消毒液已成为生活必需品, 日常的消费需求巨大. 某商店销售一款酒精消毒液, 每件的成本为 4 元, 销售人员经调查发现, 该款消毒液的日销售量 y (单位: 件) 与销售价格 x (单位: 元/件) 满足关系式 $y = -x^2 + 14x - 36$ ($5 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{N}^*$).

(1) 求该款消毒液的日利润 w 与销售价格 x 间的函数关系式;

(2) 求当该款消毒液每件售价为多少元时, 每日销售该款消毒液所获得的利润最大, 并求出日最大利润.

20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = a \cdot 2^x + \frac{1}{2^{x-1}}$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 若 $\forall x \in (-\infty, 0)$, 都有 $f(x) > \frac{3k^2+1}{2k}$ 成立, 求实数 k 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x} - 2a$ ($a > 0, b \neq 0$), 函数 $g(x) = xf(x)$ 在定义域内有唯一零点, 且

$g(x)$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 3]$ 上的最大值为 16.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若不等式 $f(\log_2 x) - k \geq 0$ 在 $[4, 16]$ 上恒成立, 求正整数 k 的取值集合.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2\ln x + \frac{1}{2}a^2x^2 - 3ax + 2, a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $a = 0$, 且斜率为 k 的直线与函数 $f(x)$ 的图象交于两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), x_1 < x_2$, 证明: $k > 0$ 且 $(kx_1 - 2)(kx_2 - 2) < 0$.

密 封 线 内 不 要 答 题