2023届高三三月联合测评

数学试卷参考答案与评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	D	A	C	B	B	B	BC	BCD	ACD	BCD

一、选择题

1. D 【解析】集合 $A:x\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$，集合 $B:x\in(0,+\infty)$，$A\cap B=[3,+\infty)$，故选 D.

2. A 【解析】方法 1：方程变形为 $z^2+\pi z+e=0$，$\Delta=\pi^2-4e<0$，

于是 $|z|^2=z\cdot\bar{z}=e$，故 $|z|=\sqrt{e}$；

方法 2：设 $z=a+bi$，其中 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $b\neq0$，代入 $z+\frac{e}{z}+\pi=0$，

得 $a+bi+\frac{e}{a+bi}+\pi=0$，从而 $a+bi+\frac{e(a-bi)}{a^2+b^2}+\pi=0$，

即 $\left(a+\pi+\frac{ea}{a^2+b^2}\right)+\left(b-\frac{eb}{a^2+b^2}\right)i=0$，于是 $b-\frac{eb}{a^2+b^2}=0$，$a^2+b^2=e$，

进而 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{e}$. 故选 A.

3. D 【解析】设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $a_7=a_6q=2q$，$a_5=\frac{a_6}{q}=\frac{2}{q}$，$a_9=a_6q^3=2q^3$.

由 a_7,a_5,a_9 成等差数列，得 $a_7+a_9=2a_5$，即 $2q+2q^3=\frac{4}{q}$，

于是 $q^4+q^2-2=0$，$(q^2+2)(q^2-1)=0$，故 $q^2=1$，从而 $a_4=\frac{a_6}{q^2}=2$. 故选 D.

4. A 【解析】$\frac{b+m}{a+m}-\frac{b}{a}=\frac{a(b+m)-b(a+m)}{a(a+m)}=\frac{m(a-b)}{a(a+m)}$.

若 $a>b>0$，结合 $m>0$，则 $\frac{b+m}{a+m}-\frac{b}{a}=\frac{m(a-b)}{a(a+m)}>0$，故“$a>b>0$”是“$\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}$”的充分条件；

若 $\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}$，则 $\frac{b+m}{a+m}-\frac{b}{a}=\frac{m(a-b)}{a(a+m)}>0$，取 $a=3$，$m=2$，$b=-1$，满足 $\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}$，但不满足 $a>b>0$，故“$a>b>0$”不是“$\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}$”的必要条件.

于是“$a>b>0$”是“$\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}$”的充分不必要条件. 故选 A.

5. C 【解析】由图可知，函数图象过点 $\left(0,\frac{\sqrt3}{2}\right)$，$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$，且 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 是“第三点”，

于是 $f(0)=\frac{\sqrt3}{2}$，$\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 结合 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，$\omega=2+6k$，$k\in\mathbf{Z}$.

设函数 $f(x)$ 的周期为 T，则 $\frac14T<\frac{\pi}{3}$，$\frac12T>\frac{\pi}{3}$，于是 $\frac32<\omega<3$，故 $\omega=2$. 所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

从而 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt2+\sqrt6}{4}$. 故选 C.

6. B 【解析】当错误选项恰有 1 个时，4 个选项进行排列有 $A_4^4=24$ 种；

当错误选项恰有 2 个时，先排 2 个正确选项，再将 2 个错误选项插入到 3 个空位中，有 $A_2^2A_3^2=12$ 种.

故共有 $24+12=36$ 种. 故选 B.

7. B 【解析】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 AB 的方程为：$y_0y=p(x-1)$，

联立 $\begin{cases}y_0y=p(x-1),\\ y^2=2px,\end{cases}$ 消去 x，得 $y^2-2y_0y-2p=0$. $\Delta=4y_0^2+8p>0$.

由韦达定理，得 $y_1+y_2=2y_0$，$y_1y_2=-2p$，于是 $|AB|=\sqrt{\left(1+\frac{y_0^2}{p^2}\right)\left(4y_0^2+8p\right)}$.

点 M 到直线 AB 的距离：$d=\frac{|y_0^2+2p|}{\sqrt{y_0^2+p^2}}$，

于是△MAB 的面积 $S=\frac{1}{2}d|AB|=\frac{1}{2}\frac{|y_0^2+2p|}{\sqrt{y_0^2+p^2}}\sqrt{\left(1+\frac{y_0^2}{p^2}\right)\left(4y_0^2+8p\right)}=\frac{\sqrt{(y_0^2+2p)^3}}{p}$，

当 $y_0=0$ 时，△MAB 面积最小为 $2\sqrt{2p}=4$，$p=2$，故选 B.

8. B 【解析】设 $x=1.001$，则 $xe^a=e^x$，$a=x-\ln x$，$b=x-\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}$，

因为 $a-b=\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{x}}-\ln x$，而 $\ln x<\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$，从而 $\ln\sqrt{x}<\frac{1}{2}(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})$，即 $\ln x<\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$，所以 $a-b>0$，故 $a>b$；$c-a=\ln x>0$，故 $c>a$. 于是 $b<a<c$，故选 B.

二、选择题

9. BC 【解析】椭圆 E 的焦点在 y 轴上，A 错误；椭圆 E 的长轴长为 4，B 正确；

椭圆 E 的离心率为 $\frac{1}{2}$，C 正确；椭圆的左顶点 $M(\sqrt{3},0)$，焦点 $F_1(0,-1)$，$F_2(0,1)$，

所以 $\overrightarrow{MF_1}=(-\sqrt{3},-1)$，$\overrightarrow{MF_2}=(-\sqrt{3},1)$，$\cos\langle\overrightarrow{MF_1},\overrightarrow{MF_2}\rangle=\frac{\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}}{|\overrightarrow{MF_1}|\cdot|\overrightarrow{MF_2}|}=\frac{1}{2}>0$，

$\langle\overrightarrow{MF_1},\overrightarrow{MF_2}\rangle\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得△$F_1PE_2$ 为直角三角形的点 P 恰有 4 个，D 错误. 故选 BC.

10. BCD 【解析】事件“成功表演燃爆竹环节”与事件“成功表演辞旧岁环节”可以同时发生，故不互斥，A 错误；“放烟花”、“迎新春”环节均表演成功的概率为 $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$，B 正确；

记表演成功的环节个数为 X，则 $X\sim B\left(4,\frac{3}{4}\right)$，期望为 $4\times\frac{3}{4}=3$，C 正确；

记事件 M：“表演成功的环节恰为 3 个”，事件 N：“迎新春环节表演成功”，

$P(NM)=C_3^2\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{81}{256}$，$P(M)==C_4^3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{27}{64}$，

由条件概率公式 $P(N|M)=\frac{P(NM)}{P(M)}=\frac{3}{4}$，D 正确. 故选 BCD.

11. ACD 【解析】直线 C_1C_2 的方程为 $y=-x$，A 正确；

过点 $(-3,-3)$ 作圆 C_1 的切线有 $x=-3$，$y=-3$，有 2 条，B 错误；

$|C_1C_2|=\sqrt{2}$，$r_1+r_2=3+4=7$，$|r_1-r_2|=|3-4|=1$，满足 $|r_1-r_2|<|C_1C_2|<r_1+r_2$，

两圆相交，公共弦所在直线为 l：$2x-2y+5=0$，C_1 到 l 的距离 $d=\frac{5}{2\sqrt{2}}$，由垂径定理，公共弦长为 2

$\sqrt{3^2-\frac{25}{8}}=\frac{\sqrt{94}}{2}$，C 正确；

圆心 C_2 到直线 $y=x$ 距离为$\sqrt{2}$，$4-\sqrt{2}>2$，故圆 C_2 上到直线 $y=x$ 距离为 2 的点有 4 个，D 正确. 故选 ACD.

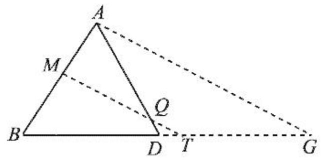
12. BCD 【解析】直线 MQ 与 PN 可能平行，可能相交，A 错误；

点 C 与点 D 在平面 $MPNQ$ 两侧，且 N 是 CD 的中点，故点 C 与点 D 到平面 $MPNQ$ 的距离相等，C 正确；

若 Q 是 AD 中点，则 $MQ/\!/BD$，$BD\subset$平面 BCD，$MQ\not\subset$平面 BCD，故 $MQ/\!/PN$.

又 $MQ/\!/BD$，故 $PN/\!/BD$. 又 N 是 CD 的中点，故 P 是 CB 的中点，从而$\frac{AQ}{AD}=\frac{1}{2}=\frac{BP}{BC}$；

若 Q 不是 AD 中点，则 MQ，BD 不平行，结合 MQ，BD 在同一平面内，故 MQ，BD 相交，设交点为 T，点 T 在直线 BD 上，故点 T 在平面 BCD 上，点 T 在直线 MQ 上，故点 T 在平面 $MPNQ$ 上，于是 T 是平面 BCD 与平面 $MPNQ$ 的公共点，进而 T 在平面 BCD 与平面 $MPNQ$ 的交线 PN 上，即直线 MQ，PN，BD 交于点 T.



在平面 ABD 内，过 A 作 $AG/\!/MT$ 交直线 BT 于点 G，于是 MT 是$\triangle ABG$ 的中位线，

故 $TG=BT$，进而$\frac{AQ}{AD}=\frac{TG}{DG}$，故$\frac{AQ}{AD}=\frac{BT}{BT+DT}$.

同理，在平面 CBD 内可得$\frac{BP}{BC}=\frac{BT}{BT+DT}$，故$\frac{AQ}{AD}=\frac{BP}{BC}$，综上，$\frac{AQ}{AD}=\frac{BP}{BC}$，B 正确.

设四棱锥 $A-BCD$ 的体积为 V，$V_1=V_{C-MPNQ}+V_{C-AMQ}$，$V_2=V_{D-MPNQ}+V_{D-BMP}$，

由点 C 与点 D 到平面 $MPNQ$ 的距离相等得：$V_{C-MPNQ}=V_{D-MPNQ}$. ①

$V_{C-AMQ}=\frac{AM\cdot AQ}{AB\cdot AD}V$，$V_{D-BMP}=\frac{BM\cdot BP}{AB\cdot BC}V$，结合$\frac{AQ}{AD}=\frac{BP}{BC}$，$\frac{AM}{AB}=\frac{BM}{AB}$，

故 $V_{C-AMQ}=V_{D-BMP}$，②

由①②相加得 $V_1=V_2$，D 正确. 故选 BCD.

三、填空题

13. $\frac{1}{2}$ 【解析】由 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$ 得：$4x=2$，$x=\frac{1}{2}$.

14. 60 【解析】因为所有项的二项式系数之和为 64，所以 $2^n=64$，解得 $n=6$，

展开式中第 3 项为 $C_6^2x^4(-2y)^2=60x^4y^2$，故展开式中第 3 项的系数为 60.

15. $\frac{57\pi}{2}+9\sqrt{3}$ 【解析】设 N 是两球面的一个公共点，且位于截面上，

由 $O_1N^2+O_2N^2=O_1O_2^2$，得 $O_1N\perp O_2N$，

故 $\tan\angle O_1O_2N=\frac{O_1N}{O_2N}=\sqrt{3}$，从而$\angle O_1O_2N=\frac{\pi}{3}$，$\angle O_2O_1N=\frac{\pi}{6}$.

所以截面面积为$\frac{2\pi}{3}\times3^2+\frac{5\pi}{6}\times(3\sqrt{3})^2+9\sqrt{3}=\frac{57\pi}{2}+9\sqrt{3}$.

16. 1 【解析】对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $(\ln a+b)e^x-a^2ex\geqslant0$ 恒成立，故 $\ln a+b\geqslant\dfrac{a^2ex}{e^x}$.

由 $e^x\geqslant x+1$，得 $e^{x-1}\geqslant x$，所以 $e^x\geqslant ex$，

从而 $\dfrac{ex}{e^x}\leqslant1$，$\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立，故 $\ln a+b\geqslant a^2$，于是 $\dfrac{b}{a}\geqslant a-\dfrac{\ln a}{a}$.

设 $f(x)=x-\dfrac{\ln x}{x}$，$x>0$，$f'(x)=1-\dfrac{1-\ln x}{x^2}=\dfrac{x^2-1+\ln x}{x^2}$.

设 $g(x)=x^2-1+\ln x$，$x>0$，$g'(x)=2x+\dfrac{1}{x}>0$.

故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，结合 $g(1)=0$，

当 $0<x<1$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；

当 $x>1$ 时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

故 $f(x)_{\min}=f(1)=1$，所以 $\dfrac{b}{a}$ 的最小值为 1，此时 $a=b=1$.

四、解答题

17.【解析】(1) 当 $n\geqslant2$ 时，由 $(n-1)a_n+na_{n-1}=0$，得

$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=-\dfrac{n}{n-1}$，$\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=-\dfrac{n-1}{n-2}$，……，$\dfrac{a_2}{a_1}=-\dfrac{2}{1}$，…………（2 分）

累乘，得 $\dfrac{a_n}{a_1}=(-1)^{n-1}\dfrac{n}{1}$，结合 $a_1=2$，得 $a_n=(-1)^{n-1}2n$. …………（4 分）

检验，$a_1=2$ 满足上式，所以 $a_n=(-1)^{n-1}2n$. …………（5 分）

(2) 由 (1) 知 $a_n=(-1)^{n-1}2n$，所以，对任意 $k\in\mathbf{N}^*$，

$a_{2k}+a_{2k+1}=(-1)^{2k-1}4k+(-1)^{2k}2(2k+1)=2$，…………（7 分）

于是 $S_{2023}=a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2022}+a_{2023})$

$=2+2+\cdots+2=2024$. …………（10 分）

18.【解析】(1) 在 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理，得 $\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{\sin\angle CAD}{\sin\angle ADC}$ ① …………（1 分）

在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理，得 $\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{\sin\angle BAD}{\sin\angle ADB}$ ② …………（2 分）

因为 $\angle ADC+\angle ADB=\pi$，所以 $\sin\angle ADC=\sin\angle ADB$，

由 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{\sqrt2BD}{CD}$ 及 $\sin\angle CAD=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt2}{2}$，得 $\sin\angle BAD=\dfrac12$. …………（3 分）

因为 $\angle BAD\in(0,\pi)$，所以 $\angle BAD=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\angle BAD=\dfrac{5\pi}{6}$. …………（4 分）

当 $\angle BAD=\dfrac{5\pi}{6}$ 时，不满足 $\angle BAD+\angle CAD=\angle BAC<\pi$，舍；…………（5 分）

当 $\angle BAD=\dfrac{\pi}{6}$ 时，满足题意. 综上，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{6}$. …………（6 分）

(2) 在 $\triangle ABD$ 中，$AB=AD$，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{6}$，故 $\angle ADB=\angle ABD=\dfrac{5\pi}{12}$，…………（7 分）

进而 $\angle ABC=\angle BAC=\dfrac{5\pi}{12}$，$CA=CB$，$\triangle ABC$ 是等腰三角形. …………（8 分）

过 C 作 $CE\perp AB$ 于 E，

则 $CE=AE\cdot\tan\frac{5\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=2+\sqrt{3}$. ………………………（10 分）

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CE=\frac{1}{2}\times 2\times(2+\sqrt{3})=2+\sqrt{3}$，故△$ABC$ 的面积为 $2+\sqrt{3}$. ………（12 分）

19.【解析】(1)由题可知，一枚一弹多头导弹的命中率为

$p=1-(1-0.415)^3=1-0.585^3\approx 0.800$，………………………………………………………（2 分）

所以，发射 10 枚一弹多头导弹，命中枚数为 $10\times 0.800=8$.

故一枚一弹多头导弹的命中率为 0.800，一弹多头导弹的命中枚数为 8. ………………………（4 分）

(2)不同研发方案的列联表如下：

	一弹多头	一弹一头	合计
命中	8	22	30
未命中	2	8	10
合计	10	30	40

……（6 分）

零假设 H_0：本次实战演习中不同研发方案命中率存在明显差异，

故 $K^2=\frac{40\times(64-44)^2}{10\times 30\times 30\times 10}=\frac{16}{90}\approx 0.178<3.841$，……………………………………（10 分）

根据小概率值 $\alpha=0.050$ 的独立性检验，零假设 H_0 不成立，故本次实战演习中不同研发方案命中率不存在明显差异. ………………………………………………………………………………（12 分）

20.【解析】(1)若 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，则平面 $DCGH$、平面 $CB'F'G$ 为同一个平面，且 M 是 BH 中点，M' 是 BF 中点，

故 MM' 是 $ABHF'$ 的中位线，所以 $MM'//GF'$，$MM'=\frac{1}{2}HF'=GF$. ……………………（1 分）

因为 $MM'//GF'$，$MM'=GF'$，所以平面四边形 $MM'F'G$ 是平行四边形，所以 $MG//M'F'$. …（2 分）

又 $MG\not\subset$ 平面 $M'B'F'$，$M'F'\subset$ 平面 $M'B'F'$，所以 $MG//$ 平面 $M'B'F'$ ………………………（3 分）

同理 $MC//$ 平面 $B'M'F'$，且 $MG\subset$ 平面 MCG，$MC\subset$ 平面 MCG，$MG\cap MC=M$，

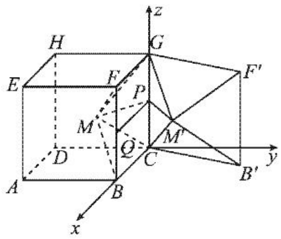
所以，平面 $MCG//$ 平面 $M'B'F'$. ………………………………………………………………（4 分）

(2)假设存在 α，使得直线 $M'F'\perp$ 平面 MBC.

以 C 为原点，分别以 $\overrightarrow{CB},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{CG}$ 为 x,y,z 轴正方向建立空间直角坐标系，则 $C(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$M(1,-1,1)$，故 $\overrightarrow{CB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{CM}=(1,-1,1)$.

设 $\vec{m}=(x,y,z)$ 是平面 MBC 的法向量，则 $\begin{cases}\vec{m}\perp\overrightarrow{CB},\\ \vec{m}\perp CM,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CM}=0.\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}2x=0,\\ -y+z=0.\end{cases}$

取 $y=1$，得 $\vec{m}=(0,1,1)$ 是平面 MBC 的一个法向量. ………………………………………（6 分）



取 CG 中点 P，BF 中点 Q，连接 PQ，PM'，

则 $PM\perp CG$，$PQ\perp CG$，$PM'\perp CG$.

于是$\angle MPM'$是二面角 $M-CG-M'$ 的平面角，$\angle MPQ$ 是二面角 $M-CG-Q$ 的平面角，$\angle QPM'$是二面角 $Q-CG-M'$ 的平面角，于是$\angle MPM'=\alpha$，$\angle MPQ=\frac{\pi}{4}$，

所以$\angle M'PQ=\alpha-\frac{\pi}{4}$，且 $CG\perp$平面 $M'PM$，$M'P=\sqrt{2}$. ……………………………………………（8 分）

故 $M'\left(\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right),\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right),1\right)$，同理 $F'(2\cos\alpha,2\sin\alpha,2)$，

所以 $\overrightarrow{M'F'}=\left(2\cos\alpha-\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right),2\sin\alpha-\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right),1\right)$，

因为 $2\cos\alpha-\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\alpha-\sqrt{2}\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sqrt{2}\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\cos\alpha-\sin\alpha$，

$2\sin\alpha-\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\alpha-\sqrt{2}\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\sqrt{2}\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\cos\alpha+\sin\alpha$，

所以 $\overrightarrow{M'F'}=(\cos\alpha-\sin\alpha,\cos\alpha+\sin\alpha,1)$. ……………………………………………………………（10 分）

若直线 $M'F'\perp$平面 MBC，$\vec{m}$ 是平面 MBC 的一个法向量，则 $\overrightarrow{M'F'}/\!/\vec{m}$.

若存在 $\lambda\in\mathbf{R}$，使得 $\overrightarrow{M'F'}=\lambda\vec{m}$，则$\begin{cases}\cos\alpha-\sin\alpha=0,\\ \cos\alpha+\sin\alpha=\lambda,\\ 1=\lambda,\end{cases}$此方程组无解.

所以，不存在 α，使得直线 $M'F'\perp$平面 MBC. ……………………………………………………（12 分）

21.【解析】(1)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$，设 MN 的中点为 $P(x_0,y_0)$，记 $t=-3a-1$，因为双曲线的离心率为$\sqrt{5}$，所以$\frac{c}{a}=\sqrt{5}$，故$\frac{b}{a}=2$，

于是双曲线的渐近线为 $y=\pm 2x$. ……………………………………………………………………（1 分）

联立$\begin{cases}y=4x+t,\\ y=2x,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_3=-\frac{t}{2},\\ y_3=-t.\end{cases}$ ……………………………………………………（2 分）

同理，解得$\begin{cases}x_4=-\frac{t}{6},\\ y_4=\frac{t}{3}.\end{cases}$于是 $y_3+y_4=-\frac{2t}{3}$. ……………………………………………（3 分）

联立$\begin{cases}y=4x+t,\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4a^2}=1,\end{cases}$消去 x，得 $12a^2y^2+8a^2ty-4a^2(t^2-16a^2)=0$.

即 $3y^2+2ty-(t^2-16a^2)=0$，$\Delta>0$.

由韦达定理，得 $y_1+y_2=-\frac{2}{3}t$，$y_1y_2=-\frac{1}{3}(t^2-16a^2)$. ……………………………………（4 分）

所以，$y_1+y_2=-\frac{2}{3}t=y_3+y_4$，说明 MN 与 AB 的中点均为 P，

所以，M,N 关于点 P 对称，A,B 关于点 P 对称，所以 $|MA|=|BN|$，

因为 $|MA|=\frac{1}{2}|AB|$，所以 A,B 是线段 MN 的两个四等分点，

所以 $P\left(-\frac{t}{3},-\frac{t}{3}\right)$，$A\left(-\frac{5t}{12},-\frac{2t}{3}\right)$，$B\left(-\frac{t}{4},0\right)$，

于是 $y_1y_2=-\frac{1}{3}(t^2-16a^2)=0$，即 $t=-4a$，结合 $t=-3a-1$，解得 $a=1$，$t=-4$.

故所求双曲线方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$. ……………………………………（6 分）

(2)由(1)可知，$A\left(\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$，$M(2,4)$，

于是 $\overrightarrow{OA}=\left(\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$，$\overrightarrow{OM}=(2,4)$. ……………………………………（8 分）

设 $\angle AOM=\alpha$，则 $S_{\triangle AOM}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OM}|\sin\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2\cdot|\overrightarrow{OM}|^2\sin^2\alpha}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2\cdot|\overrightarrow{OM}|^2-|\overrightarrow{OA}|^2\cdot|\overrightarrow{OM}|^2\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2\cdot|\overrightarrow{OM}|^2-|\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}|^2}.$$ ……………………………………（10 分）

代入 $\overrightarrow{OA}=\left(\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$，$\overrightarrow{OM}=(2,4)$，

得 $S_{\triangle AOM}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\left(\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2\right)\times(2^2+4^2)-\left(\frac{10}{3}+\frac{32}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$，

故 $\triangle AOM$ 的面积为 $\frac{2}{3}$ ……………………………………（12 分）

22.【解析】(1)由题可知 $f(0)=0$，$f'(x)=(\cos x-\sin x)e^{-x}-2x+\pi$. ……………………（2 分）

因为 $f'(0)=1+\pi$，所以，$y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=(1+\pi)x$. ………………（4 分）

(2)$f(x)=m$ 存在两个非负零点 x_1,x_2，设 $x_1<x_2$，

由(1)可知 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=(1+\pi)x$，

注意到 $f(\pi)=0$，$f'(\pi)=-\frac{1}{e^{\pi}}-\pi$，

所以，$y=f(x)$ 在 $(\pi,0)$ 处的切线方程为 $y=\left(-\frac{1}{e^{\pi}}-\pi\right)(x-\pi)$. ……………………（5 分）

下证：当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)\leqslant(1+\pi)x$，且 $f(x)\leqslant\left(-\frac{1}{e^{\pi}}-\pi\right)(x-\pi)$.

(i)要证 $f(x)\leqslant(1+\pi)x$，即证 $\frac{\sin x}{e^x}\leqslant x^2+x$，只需证 $\sin x\leqslant(x^2+x)e^x$. ①

设 $g(x)=x-\sin x, x\geqslant 0, g'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，故 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $g(x)\geqslant g(0)=0$，即 $\sin x\leqslant x, \forall x\in[0,+\infty)$ 恒成立.

要证①，只需证 $x\leqslant(x^2+x)e^x$.

当 $x=0$ 时上式成立；当 $x>0$ 时，即证 $1\leqslant(x+1)e^x$，

此时，由于 $x+1\geqslant 1, e^x\geqslant 1$，故 $(x+1)e^x\geqslant 1$，

于是，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant(1+\pi)x$. ……………………（7 分）

(ii) 要证 $f(x)\leqslant\left(-\dfrac{1}{e^\pi}-\pi\right)(x-\pi)$，只需证 $\dfrac{\sin x}{e^x}-x^2+\pi x\leqslant\left(-\dfrac{1}{e^\pi}-\pi\right)(x-\pi)$，

即证 $\dfrac{\sin x}{e^x}-x^2+\pi x+\left(\dfrac{1}{e^\pi}+\pi\right)(x-\pi)\leqslant 0, x\in[0,\pi]$.

设 $h(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}-x^2+\pi x+\left(\dfrac{1}{e^\pi}+\pi\right)(x-\pi), x\in[0,\pi]$，

则 $h'(x)=\dfrac{\cos x-\sin x}{e^x}-2x+\pi+\dfrac{1}{e^\pi}+\pi, h'(\pi)=0$.

设 $m(x)=\dfrac{\cos x-\sin x}{e^x}-2x+\pi+\dfrac{1}{e^\pi}+\pi, x\in[0,\pi]$，

则 $m'(x)=\dfrac{-2\cos x}{e^x}-2=2\left(\dfrac{\cos x}{e^x}+1\right)$.

当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$\cos x\geqslant 0, e^x>0, m'(x)<0$，

当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，$\cos x<0, |\cos x|\leqslant 1, e^x>e^{\frac{\pi}{2}}>1$，故 $\dfrac{\cos x}{e^x}+1>0, m'(x)<0$.

于是 $m'(x)<0, \forall x\in[0,\pi]$ 恒成立，故 $m(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减，

从而 $m(x)\geqslant m(\pi)=0$，即 $h'(x)\geqslant 0, \forall x\in[0,\pi]$ 恒成立，故 $h(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，

从而 $h(x)\leqslant h(\pi)=0$，于是 $f(x)\leqslant\left(-\dfrac{1}{e^\pi}-\pi\right)(x-\pi)$. ……………………（9 分）

设 $(1+\pi)x=m$ 的零点为 x_3，$\left(-\dfrac{1}{e^\pi}-\pi\right)(x-\pi)=m$ 的零点为 x_4，

则 $(1+\pi)x_3=m$，$\left(-\dfrac{1}{e^\pi}-\pi\right)(x_4-\pi)=m$.

因为 $(1+\pi)x_3=m=f(x_1)\leqslant(1+\pi)x_1$，所以 $x_3\leqslant x_1$，

因为 $\left(-\dfrac{1}{e^\pi}-\pi\right)(x_4-\pi)=m=f(x_2)\leqslant\left(-\dfrac{1}{e^\pi}-\pi\right)(x_2-\pi)$，所以 $x_4\geqslant x_2$，

又 $x_3=\dfrac{m}{1+\pi}, x_4=\pi-\dfrac{m}{\dfrac{1}{e^\pi}+\pi}$，

所以 $x_2-x_1\leqslant x_4-x_3=\pi-\dfrac{m}{\dfrac{1}{e^\pi}+\pi}-\dfrac{m}{1+\pi}\leqslant\pi-\dfrac{2m}{1+\pi}$，

所以 $|x_2-x_1|\leqslant\pi-\dfrac{2m}{\pi+1}$. ……………………（12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。