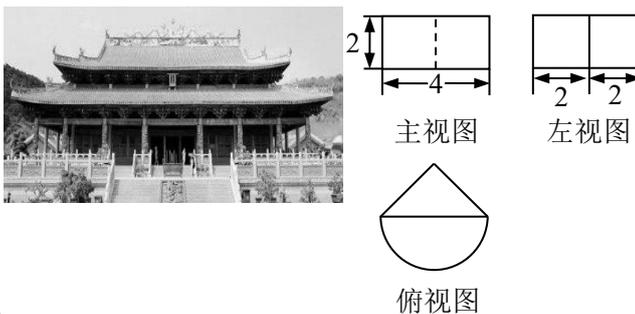


7. 我国古代木匠精于钻研，技艺精湛，常常设计出巧夺天工的建筑。在一座宫殿中，有一件特别的“柱脚”的三视图如右图所示，则其体积为



- A. $\frac{8}{3}+4\pi$ B. $\frac{8}{3}+8\pi$
C. $8+4\pi$ D. $8+8\pi$

8. 将函数 $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$ 的图象向右平移 φ ($\varphi > 0$) 个单位，再向上平移 1 个单位，所得图象经过点 $(\frac{\pi}{8}, 1)$ ，则 φ 的最小值为

- A. $\frac{5\pi}{12}$ B. $\frac{7\pi}{12}$ C. $\frac{5\pi}{24}$ D. $\frac{7\pi}{24}$

9. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_1 作 $x^2 + y^2 = a^2$ 的切线，交双曲线右支于点 M ，若 $\angle F_1 M F_2 = 45^\circ$ ，则双曲线的离心率为

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

10. 有一个长方体木块，三个侧面积分别为 8, 12, 24，现将其削成一个正四面体模型，则该正四面体模型棱长的最大值为

- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. $4\sqrt{2}$

11. 已知在平面直角坐标系 xOy 中， O 为坐标原点， $A(0, 2)$ ， $|OB|^2 + |OA|^2 = 20$ ，若平面内点 P 满足 $\overrightarrow{PB} = 3\overrightarrow{PA}$ ，则 $|PO|$ 的最大值为

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

12. 已知 A, B 是函数 $f(x) = \begin{cases} e^{x-2a}, & x \geq a, \\ e^{-x}, & x < a \end{cases}$ (其中 $a > 0$) 图象上的两个动点，点 $P(a, 0)$ ，若

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值为 0，则函数 $f(x)$ 的最小值为

- A. $-\frac{1}{e^2}$ B. $-\frac{1}{e}$ C. $\frac{1}{e^2}$ D. $\frac{1}{e}$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ x + y - 6 \leq 0 \\ x - 2y - 3 \leq 0 \end{cases}$ ，则 $z = 2x - 3y$ 的最小值是_____.

14. 已知向量 a, b 的夹角为 45° ，若 $a = (1, 1)$ ， $|b| = 2$ ，则 $|2a + b| =$ _____.

15. 记 $(2+x)^7 = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + \dots + a_7(1+x)^7$ ，则 $a_1 + a_2 + \dots + a_6 =$ _____.

16. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c ，且 $a \cos C - c \cos A = \frac{3}{5}b$ ，则 $\tan(A-C)$

的最大值为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：(共 60 分)

17. (本小题满分 12 分)

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1+2, 2a_2, a_3+1$ 成等差数列, 且 $S_3=4a_2-1, q>1$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记数列 $\{\frac{n}{a_n}\}$ 的前 n 项和为 T_n , 试问是否存在 $n \in \mathbf{N}^*$ 使得 $T_n < 3$? 如果存在, 请求出 n 的值; 如果不存在, 请说明理由.

18. (本小题满分 12 分)

某少儿游泳队需对队员进行限时的仰卧起坐达标测试. 已知队员的测试分数 y 与仰卧起坐个数 x 之间的关系如下:

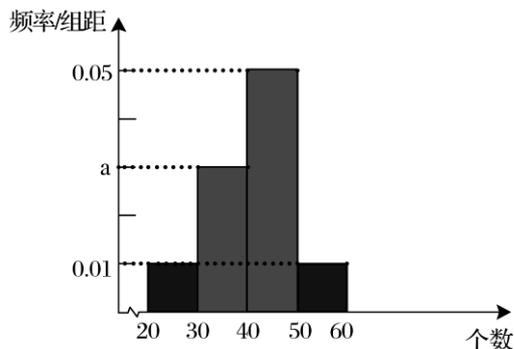
$$y = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 30 \\ 60, & 30 \leq x < 40 \\ 80, & 40 \leq x < 50 \\ 100, & x \geq 50 \end{cases}; \text{测试规则: 每位队员最多进行三组测试, 每组限时 1 分钟, 当一组测完, 测试成绩达到 60 分或以上时, 就以此组测试成绩作为该队员的成绩, 无需再进行后续的测试, 最多进行三组; 根据以往的训练统计, 队员“喵儿”在一分钟内限时测试的频率分布直方图如下:}$$

时 1 分钟, 当一组测完, 测试成绩达到 60 分或以上时, 就以此组测试成绩作为该队员的成绩, 无需再进行后续的测试, 最多进行三组; 根据以往的训练统计, 队员“喵儿”在一分钟内限时测试的频率分布直方图如下:

(1) 计算 a 值;

(2) 以此样本的频率作为概率, 求①在本次达标测试中, “喵儿”得分等于 80 的概率;

②“喵儿”在本次达标测试中可能得分的分布列及数学期望.

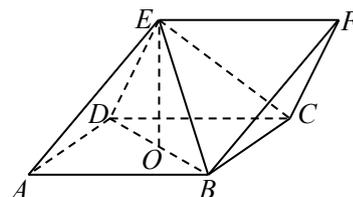


19. (本小题满分 12 分)

如图, 在三棱柱 $ADE-BCF$ 中, 侧面 $ABCD$ 是为菱形, E 在平面 $ABCD$ 内的射影 O 恰为线段 BD 的中点.

(1) 求证: $AC \perp CF$;

(2) 若 $\angle BAD=60^\circ, AE=AB$, 求二面角 $E-BC-F$ 的平面角的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, A, B 分别为 E 的左顶点和上顶点,

若 AB 的中点的纵坐标为 $\frac{1}{2}$. F_1, F_2 分别为 E 的左、右焦点.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 设直线 $L: x = my + \frac{m^2}{2}$ 与 E 交于 M, N 两点, $\triangle MF_1F_2, \triangle NF_1F_2$ 的重心分别为 G, H . 若原点 O 在以 GH 为直径的圆内, 求实数 m 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = a(1-x) + \ln x^2 (a \in \mathbf{R})$, 且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上满足 $f(x) \leq 0$ 恒成立.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 令 $g(x) = x \cdot \frac{f(x) + ax}{x-a}$ 在 $(a, +\infty)$ 上的最小值为 m , 求证: $-11 < f(m) < -10$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, $P(2, 0)$. 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2$, 点 $Q(\rho, \theta) (0 \leq \theta \leq \pi)$ 为 C 上的动点, M 为 PQ 的中点.

(1) 请求出 M 点轨迹 C_1 的直角坐标方程;

(2) 设点 A 的极坐标为 $A(1, \pi)$, 若直线 l 经过点 A 且与曲线 C_1 交于点 E, F , 弦 EF 的中点为 D , 求 $\frac{|AD|}{|AE| \cdot |AF|}$ 的取值范围.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知 $a > 0, b > 0$.

(1) 若关于 x 的不等式 $|x+3| - |x-1| \leq a^2 - 3a$ 对任意实数 x 都成立, 求实数 a 的最小值;

(2) 求证: $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

全国大联考 2020 届高三 2 月联考

理科数学参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	B	A	D	C	C	A	B	B	B	D

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. -8 14. $2\sqrt{5}$ 15. 126 16. $\frac{3}{4}$

三、解答题：共 70 分.

17. 解：(1) $\because a_1+2, 2a_2, a_3+1$ 成等差数列，

$$\therefore 4a_2 = a_1 + 2 + a_3 + 1 = a_1 + a_3 + 3,$$

$$\text{即 } 4a_1q = a_1 + a_1q^2 + 3, \quad (1)$$

$$\text{由 } S_3 = 4a_2 - 1 \text{ 可得 } a_1 + a_1q + a_1q^2 = 4a_1q - 1, \text{ 即 } a_1 - 3a_1q + a_1q^2 + 1 = 0, \quad (2)$$

联立①②及 $q > 1$ 解得 $a_1 = 1, q = 2$,

$$\therefore a_n = 2^{n-1}. \quad (2) \quad T_n = \frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}},$$

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n},$$

$$\text{两式作差得 } \frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n},$$

$$\text{于是 } T_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}.$$

$$\therefore n \geq 2 \text{ 时, } T_n - T_{n-1} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} - 4 + \frac{n+1}{2^{n-2}} = \frac{n}{2^{n-1}} > 0,$$

$\therefore \{T_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 单调递增.

$$\text{而 } T_1 = 1 < 3, T_2 = 2 < 3, T_3 = \frac{11}{4} < 3, T_4 = \frac{13}{4} > 3,$$

\therefore 当 $n=1, 2, 3$ 时, $T_n < 3$.

18. 解: (1) $(a+0.01+0.01+0.05)\times 10=1$, $\therefore a=0.03$.

(2) 由直方图可知, “喵儿”的得分 ξ 情况如下:

ξ	0	60	80	100
p	0.1	0.3	0.5	0.1

①在本次的三组测试中, “喵儿”得 80 分为事件 A, 则“喵儿”可能第一组得 80 分, 或者第二组得 80 分, 或者第三组得 80 分,

$$\text{则 } P(A)=0.5+0.1\times 0.5+0.1\times 0.1\times 0.5=0.555;$$

$$\text{② } P(\delta=0)=0.1\times 0.1\times 0.1=0.001,$$

$$P(\delta=60)=0.3+0.1\times 0.3+0.1\times 0.1\times 0.3=0.333,$$

$$P(\delta=100)=1-0.001-0.333-0.555=0.111,$$

分布列如下:

δ	0	60	80	100
p	0.001	0.333	0.555	0.111

$$\text{数学期望 } E(\xi)=0\times 0.001+60\times 0.333+80\times 0.555+100\times 0.111=75.48.$$

19. (1) 证明: 如图, 连接 AC, 易知 $AC\cap BD=O$.

\because 侧面 ABCD 是菱形,

$\therefore AC\perp BD$.

又由题知 $EO\perp$ 面 ABCD, $AC\subset$ 面 ABCD,

$\therefore EO\perp AC$,

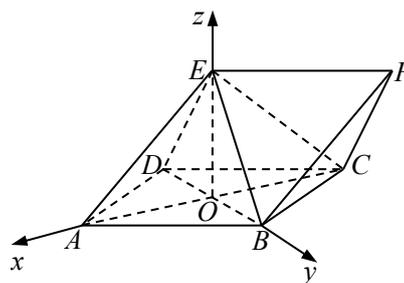
而 $EO\cap BD=O$, 且 $EO, BD\subset$ 面 BED,

$\therefore AC\perp$ 面 BED.

$\therefore AC\perp ED$.

$\because CF\parallel ED$,

$\therefore AC\perp CF$.



(2) 解: 由 (1) 知 $AO\perp BO$, $OE\perp AO$, $OE\perp BO$, 于是以 O 为坐标原点, OA, OB, OE 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 如图. 设 $AB=AE=2$.

\because 在菱形 ABCD 中, $\angle BAD=60^\circ$,

$\therefore AO=\sqrt{3}$, $BO=1$.

在 $\text{Rt}\triangle EAO$ 中, $EO=\sqrt{EA^2-AO^2}=1$.

于是 $O(0, 0, 0)$, $A(\sqrt{3}, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $E(0, 0, 1)$, $C(-\sqrt{3}, 0, 0)$,

$\therefore \overline{AB} = (-\sqrt{3}, 1, 0)$, $\overline{BE} = (0, -1, 1)$, $\overline{BC} = (-\sqrt{3}, -1, 0)$. 又由 $\overline{EF} = \overline{AB}$, 可解得

$F(-\sqrt{3}, 1, 1)$, 于是 $\overline{BF} = (-\sqrt{3}, 0, 1)$.

设平面 BCE 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

则由 $\mathbf{n}_1 \cdot \overline{BE} = 0$, $\mathbf{n}_1 \cdot \overline{BC} = 0$ 得

$$\begin{cases} -y_1 + z_1 = 0, \\ -\sqrt{3}x_1 - y_1 = 0, \end{cases} \text{ 令 } y_1 = 1, \text{ 则 } x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, z_1 = 1, \text{ 即 } \mathbf{n}_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, 1\right).$$

同理可得平面 BCF 的法向量 $\mathbf{n}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -1, 1\right)$.

$$\therefore \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{1}{7}$$

故二面角 $E-BC-F$ 的平面角的余弦值为 $\frac{1}{7}$.

20. 解: (1) 设椭圆的半焦距为 c , 由题意有 $A(-a, 0)$, $B(0, b)$,

于是 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 $\frac{b}{2} = \frac{1}{2}$,

结合 $a^2 = b^2 + c^2$, 解得 $a = 2$, $b = 1$,

\therefore 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

$$\text{由已知联立方程 } \begin{cases} x = my + \frac{m^2}{2}, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 消去 } x, \text{ 得 } (m^2 + 4)y^2 + m^3y + \frac{m^4}{4} - 4 = 0,$$

由 $\Delta > 0$ 可得 $m^4 - 4m^2 - 16 < 0$, 解得 $m^2 < 2 + 2\sqrt{5}$.

$$\text{且 } y_1 + y_2 = \frac{-m^3}{m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{m^4 - 16}{4(m^2 + 4)},$$

由题意得 $\triangle MF_1F_2$, $\triangle NF_1F_2$ 的重心 $G\left(\frac{x_1}{3}, \frac{y_1}{3}\right)$, $H\left(\frac{x_2}{3}, \frac{y_2}{3}\right)$,

\therefore 原点 O 在以 GH 为直径的圆内,

$$\therefore \overline{OG} \cdot \overline{OH} < 0, \text{ 即 } \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{9} < 0.$$

$$\therefore x_1 x_2 + y_1 y_2 = (m^2 + 1)y_1 y_2 + \frac{m^3}{2}(y_1 + y_2) + \frac{m^4}{4}$$

$$= (m^2 + 1) \frac{m^4 - 16}{4(m^2 + 4)} + \frac{m^3}{2} \left(\frac{-m^3}{m^2 + 4} \right) + \frac{m^4}{4} < 0,$$

整理得 $\frac{m^4 - 16m^2 - 16}{4(m^2 + 4)} < 0$, 即 $m^4 - 16m^2 - 16 = 0$,

变形为 $(5m^2 + 4)(m^2 - 4) < 0$, 即 $m^2 < 4$, 满足 $m^2 < 2 + 2\sqrt{5}$,

故 $-2 < m < 2$.

21. 解: (1) 当 $x > 0$ 时, 原函数可化为 $f(x) = a(1-x) + 2\ln x$, 则

$$f'(x) = \frac{2}{x} - a = \frac{2-ax}{x},$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

由于 $f(1) = 0$, 所以当 $x > 1$ 时, $f(x) > f(1) = 0$, 不合题意.

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{-a(x - \frac{2}{a})}{x},$$

\therefore 当 $0 < x < \frac{2}{a}$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > \frac{2}{a}$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{2}{a})$ 上单调递增, $f(x)$ 在 $(\frac{2}{a}, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{即 } f(x)_{\max} = f\left(\frac{2}{a}\right) = a - 2 + 2\ln 2 - 2\ln a.$$

所以要使 $f(x) \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 时恒成立, 则只需 $f(x)_{\max} \leq 0$,

亦即 $a - 2 + 2\ln 2 - 2\ln a \leq 0$.

$$\text{令 } \varphi(a) = a - 2 + 2\ln 2 - 2\ln a, \text{ 则 } \varphi'(a) = 1 - \frac{2}{a} = \frac{a-2}{a},$$

\therefore 当 $0 < a < 2$ 时, $\varphi'(a) < 0$; 当 $a > 2$ 时, $\varphi'(a) > 0$,

即 $\varphi(a)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增.

又 $\varphi(2) = 0$, 所以满足条件的 a 只有 2, 即 $a = 2$.

(2) 由 (1) 知 $a = 2$, $f(x) = 2 - 2x + 2\ln x$,

$$\therefore g(x) = x \cdot \frac{f(x) + ax}{x-a} = \frac{2x + 2x\ln x}{x-2} (x > 2),$$

$$\text{于是 } g'(x) = \frac{2(x - 2\ln x - 4)}{(x-2)^2}.$$

$$\text{令 } s(x) = x - 2\ln x - 4, \text{ 则 } s'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x},$$

由于 $x > 2$, 所以 $s'(x) > 0$, 即 $s(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增;

又 $s(8) < 0$, $s(9) > 0$,

$\therefore \exists x_0 \in (8, 9)$, 使得 $s(x_0) = 0$, 即 $2\ln x_0 = x_0 - 4$,

且当 $2 < x < x_0$ 时, $s(x) < 0$; 当 $x > x_0$ 时, $s(x) > 0$,

即 $g(x)$ 在 $(2, x_0)$ 上单调递减; 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore g(x)_{\min} = g(x_0) = \frac{2x_0 + 2x_0 \ln x_0}{x_0 - 2} = \frac{x_0^2 - 2x_0}{x_0 - 2} = x_0.$$

即 $m = x_0$,

$$\therefore f(m) = f(x_0) = 2 - 2x_0 + 2\ln x_0 = -x_0 - 2 \in (-11, -10),$$

即 $-11 < f(m) < -10$.

22. 解: (1) $\because C$ 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = 4$,

\therefore 点 $Q(x_0, y_0)$ 满足 $x^2 + y^2 = 4 (y \geq 0)$.

设 $M(x, y)$, 则 $x = \frac{x_0 + 2}{2}$, $y = \frac{y_0}{2}$, 即 $x_0 = 2x - 2$, $y_0 = 2y$,

$$\therefore (2x - 2)^2 + (2y)^2 = 4 (y \geq 0),$$

整理得 C_1 的轨迹方程为 $(x - 1)^2 + y^2 = 1 (y \geq 0)$.

(2) 直线 l 过点 $A(-1, 0)$,

所以直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -1 + t \cos \theta, \\ y = t \sin \theta, \end{cases}$ (θ 为参数, θ 为倾斜角, $\theta \in [0, \frac{\pi}{6})$)

代入 C_1 : $t^2 - 4t \cos \theta + 3 = 0$,

$$\text{则} \begin{cases} t_1 + t_2 = 4 \cos \theta, \\ t_1 t_2 = 3, \end{cases}$$

$$\therefore \frac{|AD|}{|AM| \cdot |AN|} = \frac{\left| \frac{t_1 + t_2}{2} \right|}{|t_1| \cdot |t_2|} = \frac{2 \cos \theta}{3} \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3} \right].$$

23. 解: (1) $\because |x+3| - |x-1| = |x+3| - |1-x| \leq |(x+3) + (1-x)| = 4$,

$$\therefore a^2 - 3a \geq 4,$$

解得 $a \geq 4$, 或 $a \leq -1$ (舍去).

$\therefore a$ 的最小值为 4.

$$\begin{aligned} (2) \because \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} - (\sqrt{a} + \sqrt{b}) &= \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b} - a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} \\ &= \frac{a(\sqrt{a} - \sqrt{b}) - b(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{ab}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{ab}} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b}).$$