2023 年高三下学期 5 月三校联考

高三数学参考答案

一、单项选择题： 1-4 DABC　5-8 CBCB

二、多项选择题： 9. ACD　10. ABC　11. BCD　12. BC

三、填空题 13. $-2-\sqrt{3}$　14. $m\le-\sqrt{13}$　15. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　16. $\dfrac{1}{4}$；$\dfrac{165}{512}$

四、解答题

17．解：（1）当 $n=1$ 时，$a_2=2$，当 $n\ge2$ 时，递推得 $a_n^2-2S_{n-1}=n$，

$\therefore a_{n+1}^2-a_n^2=2a_n+1$，$a_{n+1}^2=a_n^2+2a_n+1=(a_n+1)^2$，因为数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数，所以

$a_{n+1}-a_n=1$，又 $\because a_2-a_1=1$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，故 $a_n=a_1+n-1=n$．……5 分

（2）由 $b_n=n\cdot\sin\dfrac{n\pi}{2}$ 得，$b_{4k-3}=(4k-3)\cdot\sin\dfrac{(4k-3)\pi}{2}=4k-3$，

$b_{4k-2}=(4k-2)\cdot\sin\dfrac{(4k-2)\pi}{2}=0$，$b_{4k-1}=(4k-1)\cdot\sin\dfrac{(4k-1)\pi}{2}=-(4k-1)$，$b_{4k}=0$；

令 $c_k=b_{4k-3}+b_{4k-2}+b_{4k-1}+b_{4k}=-2$，

则 $T_{100}=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{100}=c_1+c_2+\cdots+c_{25}=25\times(-2)=-50$．……10 分

18．解：（1）$P(\bar{A}|\bar{B})=\dfrac{1}{4},P(\bar{B}|\bar{A})=\dfrac{1}{13}$，

$\therefore P(\bar{A}|\bar{B})\cdot P(\bar{B})=P(\bar{B}|\bar{A})\cdot P(\bar{A})\Rightarrow\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{13}P(\bar{A}),\therefore P(\bar{A})=\dfrac{13}{20}$，

$\therefore P(A)=\dfrac{7}{20}$，……4 分

而 $P(A)=P(B)\cdot P(A|B)+P(\bar{B})\cdot P(A|\bar{B})$

$\Rightarrow\dfrac{7}{20}=\dfrac{4}{5}\times P(A|B)+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{3}{4}\Rightarrow P(A|B)=\dfrac{1}{4}$，……8 分

（2）

	不够良好	良好	总计
患有该病	ka	kb	$k(a+b)$
未患该病	kc	kd	$k(c+d)$
总计	$k(a+c)$	$k(b+d)$	$k(a+b+c+d)$

$\therefore\chi'^2=\dfrac{k(a+b+c+d)\left[k^2ad-k^2bc\right]^2}{k(a+b)\cdot k(c+d)\cdot k(a+c)\cdot k(b+d)}$

$=\dfrac{k(a+b+c+d)(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=k\cdot2.64\ge10.828\Rightarrow k\ge4.10$，故 $k_{\min}=5$．……12 分

19．解：（1）$\because\dfrac{b}{\cos B}+\dfrac{c}{\cos C}=\dfrac{a}{\cos A}+\dfrac{3a}{\cos B\cos C}$，

$\therefore(b\cos C+c\cos B)\cos A=a(\cos B\cos C+3\cos A)$，……1 分

由正弦定理得 $(\sin B\cos C+\sin C\cos B)\cos A=\sin A(\cos B\cos C+3\cos A)$，

$\therefore\sin(B+C)\cos A=\sin A(\cos B\cos C+3\cos A)$，……3 分

$\because 0<A<\pi$，则 $\sin A>0$，故 $\cos B\cos C+2\cos A=0$，……4 分

即 $\cos B\cos C-2\cos(B+C)=0$，$\therefore2\sin B\sin C=\cos B\cos C$，

即 $\tan B\tan C=\dfrac{1}{2}$．……6 分

（2）由 $\tan B\tan C=\dfrac{1}{2}$ 知，B,C 均为锐角，

故 $\tan A=-\tan(B+C)=\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\cdot\tan C}=-2(\tan B+\tan C)\le-4\sqrt{\tan B\cdot\tan C}=-2\sqrt{2}$，

当且仅当 $\tan B=\tan C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立．

故 $\tan A$ 的最大值为 $-2\sqrt{2}$．……12 分

20．解：（1）因为四边形 AA_1B_1B 为菱形，所以 $A_1B\perp AB_1$，

平面 $AA_1B_1B\perp$ 平面 ABC，平面 $AA_1B_1B\cap$ 平面 $ABC=AB,AC\subset$ 平面 $ABC,AC\perp AB$，

所以 $AC\perp$ 平面 AA_1B_1B，……2 分

又 $A_1B\subset$ 平面 AA_1B_1B，所以 $AC\perp A_1B$，

又 $AB_1\cap AC=A$，所以 $A_1B\perp$ 平面 B_1AC，

又 $B_1C\subset$ 平面 B_1AC，所以 $A_1B\perp B_1C$．……5 分

（2）l 上存在点 P，使 A_1B 与平面 ABP 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，且 $B_1P=\sqrt{2}$．理由如下：

取 A_1B_1 中点 D，连接 AD，因为 $\angle ABB_1=60^\circ$，所以 $\angle AA_1B_1=60^\circ$，

又 $AA_1=AB_1$，所以 $\triangle AA_1B_1$ 为等边三角形，所以 $AD\perp A_1B_1$，

因为 $A_1B_1//AB$，所以 $AD\perp AB$，

又平面 $AA_1B_1B\perp$ 平面 ABC，平面 $AA_1B_1B\cap$ 平面 $ABC=AB,AD\subset$ 平面 AA_1B_1B，

所以 $AD\perp$ 平面 ABC，……6 分

以 A 为原点，以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴正方向建立空间直角坐标系 $A-xyz$，

$A(0,0,0),B(2,0,0),C(0,2,0),A_1(-1,0,\sqrt{3}),B_1(1,0,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{AC}=(0,2,0),\overrightarrow{AB}=(2,0,0),\overrightarrow{AB_1}=(1,0,\sqrt{3})$．

因为 $AC//A_1C_1,AC\not\subset$ 平面 $A_1B_1C_1,A_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，所以 $AC//$ 平面 $A_1B_1C_1$，

又 $AC\subset$ 平面 AB_1C，平面 $A_1B_1C_1\cap$ 平面 $AB_1C=l$，所以 $AC//l$，

假设 l 上存在一点 P，使 A_1B 与平面 ABP 所成角为 30°，设 $\overrightarrow{B_1P}=\lambda\overrightarrow{AC}(\lambda\in\mathrm{R})$，……8 分

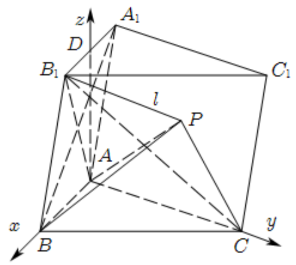
则 $\overrightarrow{B_1P}=(0,2\lambda,0)$，所以 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1P}=(1,2\lambda,\sqrt{3})$，

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面 ABP 的一个法向量，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}2x=0\\ x+2\lambda y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，

令 $y=-\sqrt{3}$，则 $z=2\lambda$，

可取$\vec{n}=(0,-\sqrt{3},2\lambda)$，……………………………………10 分



又$\overrightarrow{A_1B}=(3,0,-\sqrt{3})$，所以

$\sin\theta=|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{A_1B}\rangle|=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{A_1B}|}=\dfrac{|2\sqrt{3}\lambda|}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3+4\lambda^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

即$3+4\lambda^2=10\lambda^2$，解得$\lambda^2=\dfrac{1}{2}$，此时$|B_1P|=|\lambda AC|=\sqrt{2}$；

因此 l 上存在点 P，使 A_1B 与平面 ABP 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，且$B_1P=\sqrt{2}$．……………12 分

21．解：（1）抛物线$\Gamma: x^2=2py$过点$M(2,2)$，$p=1$，抛物线C_1方程$x^2=2y$．…………1 分

设直线$l: y=kx+\dfrac{1}{2}$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$由$\begin{cases}y=kx+\dfrac{1}{2}\\ x^2=2y\end{cases}$，得$x^2-2kx-1=0$，

∵直线 l 与抛物线Γ有两个交点 A，B，所以$\Delta=4k^2+4>0$①，

得$x_1+x_2=2k$，$x_1x_2=-1$，……………………………………………………………………3 分

于是$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{(1+k^2)\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]}=\sqrt{k^2+1}\sqrt{4k^2+4}=2(k^2+1)=6$，

解得$k=\pm\sqrt{2}$，直线 l 的方程为$\pm\sqrt{2}x-y+\dfrac{1}{2}=0$，原点 O 到直线 l 距离$d=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，

$\triangle OAB$ 的面积为$S=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\times6\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．……………………………………………………5 分

（2）已知 O，M 的坐标分别为$(0,0)$，$(2,2)$，抛物线Γ方程$x^2=2y$，

假设抛物线Γ上存在点$N\left(t,\dfrac{t^2}{2}\right)$（$t\neq0$且$t\neq2$），

使得经过 O，M，N 三点的圆 C 和抛物线Γ在点 N 处有相同的切线.

设经过 O，M，N 三点的圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

则$\begin{cases}F=0\\ 2D+2E+F=-8\\ 4tD+2t^2E+4F=-t^4-4t^2\end{cases}$，

整理得$t^3+2(E+2)t-4(E+4)=0$①，………………………………………………………7 分

∵$x^2=2y$，两边同时对x求导得，$y'=x$，∴抛物线Γ在点$N\left(t,\dfrac{t^2}{2}\right)$处的切线的斜率为$t$，

∴经过 O，M，N 三点的圆 C 在点$N\left(t,\dfrac{t^2}{2}\right)$处的切线斜率为$t$，………………………………8 分

∵$t\neq0$，∴直线 NC 的斜率存在.∵圆心的坐标为$C\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2}\right)$，∴$\dfrac{\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{E}{2}}{t+\dfrac{D}{2}}\times t=-1$，

即$t^3+(E+2)t+D=0$，即$t^3+(E+2)t-(E+4)=0$②，……………………………………10 分

由①②消去 E，得$E+4=-\dfrac{t^3}{2}$，又$t\neq0$，得$t^3-3t^2+4=0$，

即$(t-2)^2(t+1)=0$.∵$t\neq2$，∴$t=-1$，

故满足题设的点 N 存在，其坐标为$\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$．………………………………………………12 分

22．解：（1）$f'(x)=e^x+a\cos x-2ax-(1+a)=e^x-1+a(\cos x-2x-1)$，……………1 分

令$\varphi(x)=\cos x-2x-1$，则$\varphi'(x)=-\sin x-2<0$，∴$\varphi(x)$在R上单调递减，……………3 分

又$\varphi(0)=0$，$a\le0$，所以当$x>0$时，$\varphi(x)<0$，此时$f'(x)>0$；当$x<0$时，$\varphi(x)>0$，此时$f'(x)<0$；

故$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增．………………………………………5 分

（2）由题意知，$f'(x)=e^x+a\cos x-2ax-(1+a)\ge0$对$\forall x\in R$恒成立.

令$g(x)=e^x+a\cos x-2ax-(1+a)$，又$g(0)=0$，则$g(x)\ge g(0)$恒成立；

∵$x=0$不是函数$g(x)$的区间端点，故$x=0$是$g(x)$的最小值点，同时也是极小值点.

则必有$g'(0)=0$，由$g'(x)=e^x-a\sin x-2a$，$g'(0)=1-2a=0$，则$a=\dfrac{1}{2}$．……………7 分

下面证明：当$a=\dfrac{1}{2}$时，$f'(x)=e^x+\dfrac{1}{2}\cos x-x-\dfrac{3}{2}\ge0$对$\forall x\in R$恒成立.

即证$\dfrac{x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos x}{e^x}\le1$．…………………………………………………………………9 分

令$h(x)=\dfrac{x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos x}{e^x}$，则$h'(x)=\dfrac{\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x-x-\frac{1}{2}}{e^x}$，

令$t(x)=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x-x-\dfrac{1}{2}$，则$t'(x)=\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}\sin x-1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-1<0$，

∴$t(x)$在R上单调递减，又$t(0)=0$，∴$h(x)$在在$(-\infty,0)$上单调递增，在$(0,+\infty)$上单调递减；

∴$h(x)\le h(0)=1$，得证！

故$a=\dfrac{1}{2}$．…………………………………………………………………………………12 分