内江市高中2023届第三次模拟考试题

数学(文科)参考答案及评分意见

一、选择题(本大题共12小题,每小题5分,共60分.)

1.B 2.A 3.D 4.C 5.A 6.B 7.D 8.C 9.C 10.B 11.D 12.A

二、填空题(本大题共4小题,每小题5分,满分20分.)

13. -8 14. 1 15. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{8}=1$ 16. $\frac{7}{24}$

三、解答题(共70分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤,第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答,第22、23题为选考题,考生根据要求作答.)

17. 解:(1)当 $n=1$ 时,由 $S_{n+1}=2S_n+2$ 得:$S_2=2S_1+2$,即 $a_1+a_2=2a_1+2$,

又 $a_1=2$,$\therefore a_2=4$; ………………………………………………………… 1分

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=2S_n+2-2S_{n-1}-2=2a_n$, ……………………… 3分

又 $a_1=2$;$a_2=4$ 满足 $a_2=2a_1$,即当 $n=1$ 时,$a_{n+1}=2a_n$ 成立, ……………… 4分

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$是以2为首项,2为公比的等比数列,$\therefore a_n=2^n(n\in N^*)$ ……………… 6分

(2)由(1)得:$b_n=\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)(n+2)}=\frac{2^{n+1}}{n+2}-\frac{2^n}{n+1}$, ………………………………… 9分

$\therefore T_n=\frac{2^2}{3}-\frac{2^1}{2}+\frac{2^3}{4}-\frac{2^2}{3}+\frac{2^4}{5}-\frac{2^3}{4}+\cdots+\frac{2^n}{n+1}-\frac{2^{n-1}}{n}+\frac{2^{n+1}}{n+2}-\frac{2^n}{n+1}=\frac{2^{n+1}}{n+2}-1$ …… 12分

18. 解:(1)根据茎叶图可知甲组数据的平均数为

$\frac{10+10+14+18+22+25+27+34}{8}=20$, ………………………………… 1分

乙组数据的平均数为$\frac{10+20+22+23+31+32+31+31}{8}=25$, ……………………… 2分

甲型号电视机的"星级卖场"数量为 $m=4$,乙型号电视机的"星级卖场"数量为 $n=4$

所以 $m=n$; …………………………………………………………………… 4分

(2)由(1)知,甲型号电视机的"星级卖场"数量为4,设选取的两个卖场都是甲型电视机的"星级卖场"设为事件 M,设甲型号电视机的"星级卖场"分别为 a,b,c,d,甲型号电视机的非"星级卖场"分别为 A,B,C,D,从这8个卖场中,随机选取2个卖场,有 $AB,AC,AD,Aa,Ab,Ac,Ad,BC,BD,Ba,Bb,Bc,Bd,CD,Ca,Cb,Cc,Cd,Da,Db,Dc,Dd,ab,ac,ad,bc,bd,cd$,共计28个

…………………………………………………………………………………… 6分

其中满足条件为 ab,ac,ad,bc,bd,cd,共计6个 ……………………………………… 8分

所以,$P(M)=\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$ ……………………………………………………………… 10分

(3)$a=b=0$ 当时,s^1 达到最小值. ……………………………………………… 12分

19. 解:(1)证明:$\because CD\perp AD$,$CD\perp BD$,$AD\cap BD=D$,AD、$BD\subset$平面 ABD,

$\therefore CD\perp$平面 ABD,$\because AB\subset$平面 ABD,$\therefore CD\perp AB$ ……………………………… 2分

又$\because M,E$分别为 AC,BC 的中点,

$\therefore ME/\!/AB$, ……………………………………………………………………… 4分

$\therefore CD\perp ME$ ……………………………………………………………………… 5分

(2)图1所示的$\triangle ABC$中,设 $BD=x(0<x<3)$,则 $CD=3-x$,

$\because AD\perp BC$, $\angle ACB=45°$, $\therefore \triangle ADC$ 为等腰直角三角形, $\therefore AD=CD=3-x$.

折起后 $AD\perp DC$, $AD\perp BD$, 且 $BD\cap DC=D$, BD、$DC\subset$ 平面 BCD,

$\therefore AD\perp$ 平面 BCD, ………………………………………………………… 7 分

又 $\angle BDC=90°$, $\therefore S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}x(3-x)$,

$V_{A-BCD}=\frac{1}{3}AD.\ S_{\triangle BCD}=\frac{1}{3}(3-x)\frac{1}{2}x(3-x)=\frac{1}{6}(x^3-6x^2+9x)$, $x\in(0,3)$, ……… 8 分

令 $f(x)=\frac{1}{6}(x^3-6x^2+9x)$, $f'(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x-3)$,

当 $0<x<1$ 时 $f'(x)>0$; 当 $1<x<3$ 时, $f'(x)<0$,

$\therefore x=BD=1$ 时, 三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大 ………………………………… 9 分

又易知 $BD\perp$ 平面 ACD, 因为 E 为线段 BC 的中点, 所以 E 到平面 ACD 的距离为 $\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}$. … 10 分

又 $V_{A-MDE}=V_{E-ADM}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}S_{\triangle ADM}=\frac{1}{6}$,

故三棱锥 $A-MDE$ 的体积为 $\frac{1}{6}$ …………………………………………………… 12 分

20. 解: (1) 设 $F(x)=f(x)-g(x)=x^2-2e\ln x(x>0)$, ………………………………… 1 分

$\therefore F'(x)=2x-\frac{2e}{x}=\frac{2(x-\sqrt{e})(x+\sqrt{e})}{x}$, 令 $F'(x)=0$, 得 $x=\sqrt{e}$, ……………………… 2 分

当 $0<x<\sqrt{e}$ 时, $F'(x)<0$, $x>\sqrt{e}$ 时, $F'(x)>0$,

故当 $x=\sqrt{e}$ 时, $F(x)$ 取到最小值, 最小值是 0, ………………………………… 4 分

从而函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象在 $x=\sqrt{e}$ 处有公共点, 其坐标为 $(\sqrt{e},e)$ ………………… 5 分

(2) 由 (1) 可知, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象在 $x=\sqrt{e}$ 处有公共点,

如果存在 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的隔离直线, 那么该直线过这个公共点, … 6 分

设隔离直线方程为 $y-e=k(x-\sqrt{e})$, 即 $y=kx-k\sqrt{e}+e$,

由 $f(x)\geqslant kx-k\sqrt{e}+e(x\in R)$, 可得 $x^2-kx+k\sqrt{e}-e\geqslant0$ 在 $x\in R$ 上恒成立,

则 $\Delta=k^2-4k\sqrt{e}+4e=(k-2\sqrt{e})^2\leqslant0$, 只有 $k=2\sqrt{e}$, ………………………… 8 分

此时直线方程为: $y=2\sqrt{e}x-e$ ……………………………………………… 9 分

下面证明 $g(x)\leqslant2\sqrt{e}x-e$ 恒成立,

令 $G(x)=2\sqrt{e}x-e-g(x)=2\sqrt{e}x-e-2e\ln x$,

$G'(x)=2\sqrt{e}-\frac{2e}{x}=\frac{2\sqrt{e}x-2e}{x}$, 当 $x=\sqrt{e}$ 时, $G'(x)=0$,

当 $0<x<\sqrt{e}$ 时 $G'(x)<0$, 函数单调递减; $x>\sqrt{e}$ 时, $G'(x)>0$, 函数单调递增,

则当 $x=\sqrt{e}$ 时, $G(x)$ 取到最小值是 0, ……………………………………… 11 分

所以 $G(x)=2\sqrt{e}x-e-g(x)\geqslant0$, 则 $g(x)\leqslant2\sqrt{e}x-e$ 当 $x>0$ 时恒成立.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 存在唯一的隔离直线 $y=2\sqrt{e}x-e$ …………………… 12 分

21. 解：(1) 由题意易知：$\begin{cases} 2c=2 \\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$， …………………………………… 2 分

解得：$\begin{cases} a=2 \\ b=\sqrt{3} \\ c=1 \end{cases}$， …………………………………… 3 分

∴ 椭圆 C 的方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ …………………………………… 4 分

(2) 由 (1) 知椭圆 C 右焦点 F 坐标为 $(1,0)$，设直线 AB：$x=my+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(n,0)$，

由 $\begin{cases} x=my+1 \\ 3x^2+4y^2-12=0 \end{cases}$ 得，$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$

显然 $\Delta>0$，且 $\begin{cases} y_1+y_2=-\dfrac{6m}{3m^2+4} \\ y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4} \end{cases}$ …………………………………… 6 分

此时 $k_{PA}k_{PB}=\dfrac{y_1}{x_1-n}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-n}=\dfrac{y_1y_2}{(my_1+1-n)(my_2+1-n)}=\dfrac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+(1-n)m(y_1+y_2)+(1-n)^2}$

$$=\frac{-\dfrac{9}{3m^2+4}}{-\dfrac{9m^2}{3m^2+4}-(1-n)m\dfrac{6m}{3m^2+4}+(1-n)^2}=\frac{9}{9m^2+6m^2(1-n)-(1-n)^2(3m^2+4)}$$

$=\dfrac{9}{3m^2(4-n)^2-4(1-n)^2}$ …………………………………… 9 分

由上式知：无论 m 取何值，当 $n^2=4$，即 $n=\pm2$ 时，$k_{PA}k_{PB}$ 是一个与 m 无关的定值，

当 $n=-2$ 时，$k_{PA}k_{PB}=\dfrac{9}{-4\times3^2}=-\dfrac{1}{4}$； …………………………………… 10 分

当 $n=2$ 时，$k_{PA}k_{PB}=\dfrac{9}{-4\times1}=-\dfrac{9}{4}$ …………………………………… 11 分

综上所述，存在定点 P 满足题意. 当定点为 $P(-2,0)$ 时，直线 AP，PB 斜率之积为 $-\dfrac{1}{4}$；当定点为 $P(2,0)$ 时，直线 AP，PB 斜率之积为 $=-\dfrac{9}{4}$ …………………………………… 12 分

22. 解：(1) 由 $\rho=4\cos\alpha$ 得 $\rho^2=4\rho\cos\alpha$，将 $\begin{cases} \rho^2=x^2+y^2 \\ \rho\cos\alpha=x \end{cases}$ 代入整理得，

曲线 C_1 的普通方程为 $(x-2)^2+y^2=4$ …………………………………… 2 分

设曲线 C_1 上的点为 (x',y')，变换后的点为 (x,y)，由题可知坐标变换为 $\begin{cases} x=x'-2 \\ y=\dfrac{1}{2}y' \end{cases}$，

即 $\begin{cases} x'=x+2 \\ y'=2y \end{cases}$，代入曲线 C_1 的普通方程，整理得曲线 C_2 的普通方程 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$， …… 4 分

$\therefore$ 曲线 C_2 的参数方程为$\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数）. …………………………………… 5 分

(2)设四边形 $MNPQ$ 的周长为 l，设点 $M(2\cos\theta,\sin\theta)\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$， ……………………… 6 分

$l=8\cos\theta+4\sin\theta=4\sqrt{5}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin\theta\right)=4\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)$，且 $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{5}},\sin\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ …… 7 分

$\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\therefore \varphi<\theta<\Phi<\dfrac{\pi}{2}+\varphi,\therefore \sin(\theta+\varphi)\leqslant 1$，

$\therefore l_{max}=4\sqrt{5}$. 且当 $\theta+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$时，$l$ 取最大值，此时 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$， ………………………… 8 分

所以，$2\cos\theta=2\sin\varphi=\dfrac{4}{\sqrt{5}},\sin\theta=\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，此时 $M\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5},\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$ ………………………… 10 分

23 解：当 $a=1$ 时，$f(x)=|2x-4|+|x^2+1|$

当 $x\geqslant 2$ 时，$f(x)=x^2+2x-3\geqslant f(2)=5$， ………………………………………………… 2 分

当 $x<2$ 时，$f(x)=x^2-2x+5\geqslant f(1)=4$，

所以 $f(x)\geqslant 4$. ……………………………………………………………………………… 4 分

(2)当 $x\in[1,2]$ 时 $f(x)=4-2x+|x^2+a|$，

由 $f(x)\leqslant 4$，得 $-x^2-2x\leqslant a\leqslant -x^2+2x$， ………………………………………………… 6 分

设 $h(x)=-x^2-2x,g(x)=-x^2+2x$，

对任意 $x\in[1,2]$，$f(x)\leqslant 4$ 恒成立，所以 $h_{max}(x)\leqslant a\leqslant g_{min}(x)$， ……………………… 8 分

因为在区间$[1,2]$上，$h_{max}(x)=h(1)=-3,g_{min}(x)=g(2)=0$，

所以 $-3\leqslant a\leqslant 0$. 即实数 a 的取值范围为$[-3,0]$ ……………………………………… 10 分