高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. A　由题意，得 $A=[0,2]$，$B=[-2,1]$，则 $A\cup B=[-2,2]$. 故选 A.

2. D　由题意，得 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=13$，即 $|\boldsymbol{a}|^2-3|\boldsymbol{a}|-4=0$，解得 $|\boldsymbol{a}|=4$，或 $|\boldsymbol{a}|=-1$(舍去). 故选 D.

3. C　$\sin\left(2\alpha+\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7}{25}$. 故选 C.

4. B　设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R},y\neq0)$，则 $(x+yi)^2-(x+yi)+1=0$，即 $x^2-y^2-x+1+(2xy-y)i=0$，根据复数相等的定义，得 $\begin{cases}2xy-y=0,\\x^2-y^2-x+1=0,\end{cases}$ 结合 $y\neq0$，解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\y^2=\frac{3}{4},\end{cases}$ 所以 $|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=1$. 故选 B.

5. D　由 $\{a_n\}$ 为等比数列，得 $a_n=a_1q^{n-1}$. ①若 $q>1$，则当 $a_1>0$ 时，$\{a_n\}$ 单调递增，所以 $a_{2\,022}<a_{2\,023}$；当 $a_1<0$ 时，$\{a_n\}$ 单调递减，所以 $a_{2\,022}>a_{2\,023}$. 因此充分性不成立；②若 $a_{2\,022}<a_{2\,023}$，则 $a_{2\,023}-a_{2\,022}=a_1q^{2\,021}(q-1)>0$，等价于 $a_1q(q-1)>0$，即 $\begin{cases}a_1>0,\\q<0\text{ 或 }q>1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1<0,\\0<q<1,\end{cases}$ 所以必要性也不成立. 故 p 是 r 的既不充分也不必要条件. 故选 D.

6. A　由题意知 2 000 ppm=0.2%，所以 $0.2=0.05+\lambda e^{-\frac{0}{9}}$，解得 $\lambda=0.15$；由 $0.05+0.15e^{-\frac{t}{9}}\leqslant0.1$，解得 $e^{-\frac{t}{9}}\leqslant\frac{1}{3}$，所以 $t\geqslant9\ln3\approx9.891$，于是至少需要开窗通风时间约为 10 分钟. 故选 A.

7. C　法一：因为 $2a\cos^2\frac{B}{2}=2a\cdot\frac{1+\cos B}{2}=a+a\cos B=a+c$，所以 $a\cos B=c$，由余弦定理，得 $a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=c$，整理得 $a^2=b^2+c^2$，所以 $A=\frac{\pi}{2}$，即△ABC 为直角三角形. 故选 C.

法二：因为 $2a\cos^2\frac{B}{2}=a+c$，得 $2a\cdot\frac{1+\cos B}{2}=a+c$，即 $a\cos B=c$，所以 $\sin A\cos B=\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，即 $\cos A\sin B=0$，因为 $\sin B\neq0$，所以 $\cos A=0$，又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{2}$，即△ABC 为直角三角形. 故选 C.

8. B　$f(x)=\frac{3a+2\sin x+a\cos x}{3+\cos x}=a+\frac{2\sin x}{3+\cos x}$，令 $g(x)=\frac{2\sin x}{3+\cos x}$，由题意知 $f(x)$ 既有最大值，也有最小值，所以 $g(x)$ 既有最大值，也有最小值，因为 $f(x)=g(x)+a$，所以 $f(x)_{\max}=g(x)_{\max}+a$，$f(x)_{\min}=g(x)_{\min}+a$，由题意知 $g(x)_{\max}+g(x)_{\min}+2a=6$，因为 $g(x)$ 为奇函数，所以 $g(x)_{\max}+g(x)_{\min}=0$，从而 $2a=6$，解得 $a=3$. 故选 B.

9. D　设 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d\neq0)$，因为 $S_9=0$，所以 $a_5=0$，所以 $a_4+a_5+a_6=3a_5=0$，$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=5a_5=0$，$a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=7a_5=0$，所以 $S_3=S_6$，$S_2=S_7$，$S_1=S_8$，$S_4=S_5$，其余皆不同，所以 $\{x|x=S_k,k=1,2,\cdots,2\,023\}$ 中元素个数为 2 023−4=2 019. 故选 D.

10. C　由题意知 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$，由 $f(x)$ 的图象相邻两对称轴间距离为 $\frac{\pi}{2}$，得 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$($T$ 为 $f(x)$ 的最小正周期)，所以 $T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，解得 $\omega=2$，于是 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$. 因为 $f\left(-\frac{3\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\sin\left[2\times\left(-\frac{3\pi}{8}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin(-\pi)=0$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{3\pi}{8},0\right)$ 对称，故 A 正确；由 $-\frac{\pi}{2}\leqslant2x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}$，得 $-\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{8}$，所以 $f(x)$ 的一个单调增区间为 $\left[-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$，又 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$，所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，故 B 正确；由 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，得 $0\leqslant2x\leqslant\pi$，所以 $-\frac{\pi}{4}\leqslant2x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3}{4}\pi$，从而 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant1$，所以 $f(x)\in[-1,\sqrt{2}]$，故 C 错误；因为 $f\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sqrt{2}\cos2x$ 为偶函数，所以 $y=-\sqrt{2}\cos2x$ 的图象关于 y 轴对称，故 D 正确. 故选 C.

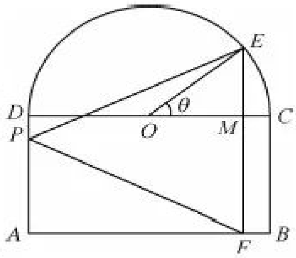
11. A　设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $d>0$，且 $(a_1+d)^2=a_1(a_1+5d)$，解得 $d=3a_1$，所以 $a_n=3a_1n-2a_1$，从而 $\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{3a_1^2}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$，所以 $S_n=\frac{1}{3a_1^2}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3a_1^2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{3a_1^2}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3a_1^2}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$，即 $S_n<\frac{1}{3a_1^2}$. 若 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$S_n<\frac{1}{a_1}$，则 $\frac{1}{3a_1^2}\leqslant\frac{1}{a_1}$，解得 $a_1\geqslant\frac{1}{3}$. 故选 A.

12. B　令 $f(x)=\frac{e^x}{x}(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}(x>0)$，所以当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 由已知，得 $\frac{e^a}{a}=\frac{2}{\ln 2}=\frac{e^{\ln 4}}{\ln 4}$，$\frac{e^b}{b}=\frac{8}{\ln 8}=\frac{e^{\ln 8}}{\ln 8}$，$\frac{e^c}{c}=\frac{e^2}{2}$，即 $f(a)=f(\ln 4)$，$f(b)=f(\ln 8)$，$f(c)=f(2)$，因为 $1<\ln 4<2<\ln 8$，且 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(\ln 4)<f(2)<\ln(8)$，即 $f(a)<f(c)<f(b)$，又 $a,b,c\in(0,1)$，且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，所以 $a>c>b$. 故选 B.

13. 2　由 z 为纯虚数，得 $\begin{cases}a^2-a-2=0,\\a^2+3a+2\neq 0,\end{cases}$ 解得 $a=2$.

14. -1　$f'(x)=e^x-2ax$，则 $f'(1)=e-2a$，又 $f(1)=e-a$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-(e-a)=(e-2a)(x-1)$，即 $y=(e-2a)x+a$，从而 $\begin{cases}b=e-2a,\\a=e,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=e,\\b=-e,\end{cases}$ 所以 $\cos\frac{b\pi}{a}=\cos(-\pi)=-1$.

15. $\frac{1+\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cos\theta}{2}$　(2 分)　$\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$ (3 分)



如图，设 EF 与 CD 的交点为 M，则 $EM=\sin\theta$，$OM=\cos\theta$，所以 $EF=1+\sin\theta$，$DM=1+\cos\theta$，所以 $S=\frac{1}{2}EF\cdot DM=\frac{(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)}{2}=\frac{1+\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cos\theta}{2}$ $(0\leqslant\theta<\pi)$，令 $t=\sin\theta+\cos\theta$，则 $\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$，且 $t\in(-1,\sqrt{2}]$，所以 $S=\frac{1}{4}(t+1)^2$，显然 $S=\frac{1}{4}(t+1)^2$ 在 $(-1,\sqrt{2}]$ 上单调递增，所以当 $t=\sqrt{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，S 取得最大值，其最大值为 $\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$.

16. $[1,+\infty)$　$f'(x)=ae^{ax}-ax-1$，令 $g(x)=ae^{ax}-ax-1$，则 $g'(x)=a(ae^{ax}-1)$，令 $g'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}$.

①若 $0<a<1$，当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}\right)$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}\right)$ 时，$g(x)<g(0)=a-1<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，于是，当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}\right)$ 时，$f(x)<f(0)=0$，与题意不符；②当 $a\geqslant 1$ 时，$a(ae^{ax}-1)\geqslant 0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，从而 $g(x)\geqslant g(0)=a-1\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，于是 $f(x)\geqslant f(0)=0$，符合题意. 综上，实数 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$.

17. 解：(1)因为 $a_1=1$，$S_n=n^2a_n$，

所以当 $n=2$ 时，$S_2=4a_2$，即 $a_1+a_2=4a_2$，解得 $a_2=\frac{1}{3}$；…………………… 2 分

当 $n=3$ 时，$S_3=9a_3$，即 $a_1+a_2+a_3=9a_3$，解得 $a_3=\frac{1}{6}$. …………………… 4 分

(2)因为 $S_n=n^2a_n$，所以当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=(n-1)^2a_{n-1}$，…………………… 5 分

两式相减，得 $S_n-S_{n-1}=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}$，即 $(n^2-1)a_n=(n-1)^2a_{n-1}$，

所以 $(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$. …………………… 6 分

因为 $a_1=1$，所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1}(n\geqslant 2)$，…………………… 7 分

所以 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\times\cdots\times\frac{a_4}{a_3}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_2}{a_1}\times a_1=\frac{n-1}{n+1}\times\cdots\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times 1=\frac{2}{n(n+1)}$.

当 $n=1$ 时，符合上式，所以 $a_n=\frac{2}{n(n+1)}$. …………………… 10 分

18. 解：(1)由已知，得 $\frac{(-\sin\theta)\times(-\cos\theta)\times(-\sin\theta)\times(-\sin\theta)}{(-\cos\theta)\times\sin\theta\times\sin\theta\times\cos\theta}=-\tan\theta=2$，

即 $\tan\theta=-2$，…………………… 3 分

所以 $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=-\frac{3}{5}$. …………………… 6 分

(2)因为 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

所以 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，…………………… 8 分

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{3\sqrt{2}}{5}-\frac{\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. …………………… 10 分

由 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，得 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$，

所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$. ………………………………………………………………………… 12 分

19. (1)证明：因为 $a\sin(B-C)=b\sin(A-C)$，

所以 $\sin A(\sin B\cos C-\cos B\sin C)=\sin B(\sin A\cos C-\cos A\sin C)$，……………………… 2 分

即 $\sin A\cos B\sin C=\sin B\cos A\sin C$.

又 $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C\neq 0$，从而 $\sin A\cos B-\sin B\cos A=0$，即 $\sin(A-B)=0$，

由 A,B 为△ABC 的内角，得 $A-B\in(-\pi,\pi)$，………………………………………………… 4 分

所以 $A-B=0$，即 $A=B$，

所以 $a=b$. ………………………………………………………………………………………… 6 分

(2)由余弦定理，得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

再由 $a=b$ 及 $c=5$，$\cos C=\frac{12}{13}$，得 $25=2a^2-\frac{24}{13}a^2$，

解得 $a^2=\frac{25\times13}{2}$. ……………………………………………………………………………… 8 分

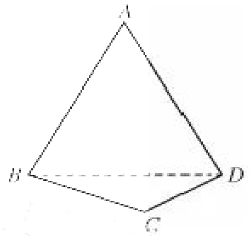
由 $\cos C=\frac{12}{13}$，$C\in(0,\pi)$，得 $\sin C=\frac{5}{13}$，……………………………………………… 10 分

所以△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot a^2\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{25\times13}{2}\times\frac{5}{13}=\frac{125}{4}$. …………………… 12 分

20. 解：(1)连接 BD，则△ABD 为等边三角形，所以 $BD=20$，$\angle ABD=\angle ADB=\frac{\pi}{3}$，

因为 $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，$\angle BCD=\frac{2\pi}{3}$，$\angle ABC=\frac{5\pi}{12}$，所以 $\angle ADC=\frac{7\pi}{12}$，……………………………… 2 分

所以 $\angle BDC=\frac{\pi}{4}$. …………………………………………………………………………………… 3 分



在△BCD 中，由正弦定理，得 $\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}$，

所以 $BC=\frac{BD\cdot\sin\angle BDC}{\sin\angle BCD}=\frac{20\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{20\sqrt{6}}{3}$. ……………………………… 5 分

(2)法一：设 $\angle ABC=\theta\left(\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2\pi}{3}\right)$，则 $\angle DBC=\theta-\frac{\pi}{3}$，$\angle BDC=\frac{2\pi}{3}-\theta$，……………… 6 分

在△BCD 中，由正弦定理，得 $\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle DBC}$，………………………………… 7 分

所以 $BC=\frac{BD\sin\angle BDC}{\sin\angle BCD}=\frac{40\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)$，…………………………………………… 8 分

$CD=\frac{BD\sin\angle DBC}{\sin\angle BCD}=\frac{40\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$，……………………………………………………… 9 分

所以四边形 $ABCD$ 的周长 $l=40+\frac{40\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{40\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)=40+\frac{40\sqrt{3}}{3}\sin\theta$，………… 10 分

所以当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，周长取得最大值，且 $l_{\max}=40+\frac{40\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………… 12 分

法二：设 $BC=m$，$CD=n$，在△BCD 中，由余弦定理得 $BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\angle BCD$，

即 $20^2=m^2+n^2-2mn\cos\frac{2\pi}{3}$，……………………………………………………………… 8 分

$400=m^2+n^2+mn=(m+n)^2-mn\geqslant(m+n)^2-\left(\frac{m+n}{2}\right)^2=\frac{3}{4}(m+n)^2$，…………………… 10 分

因此 $m+n\leqslant\frac{40\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $m=n$，即 $BC=CD$ 时，等号成立. ……………………………… 11 分

所以四边形 $ABCD$ 周长的最大值为 $40+\frac{40\sqrt{3}}{3}$. …………………………………………………… 12 分

21. 解：(1)因为 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=7$，所以 $a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=4$，

所以等比数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 的公比为 2，首项为 2，………………………………………………… 2 分

所以 $a_{n+1}-a_n=2\times2^{n-1}=2^n$， …………………………………………………………………………………… 2 分

从而 $a_n-a_{n-1}=2^{n-1}$，$a_{n-1}-a_{n-2}=2^{n-2}$，… ，$a_2-a_1=2^1$，

以上各式累加，得 $a_n-a_1=2+2^2+\cdots+2^{n-1}=\dfrac{2(1-2^{n-1})}{1-2}=2^n-2$， …………………………………… 4 分

将 $a_1=1$ 代入，解得 $a_n=2^n-1$.

而 $a_1=1$ 适合 $a_n=2^n-1$，

故 $a_n=2^n-1$. …… 5 分

(2)由(1)知 $b_n=(2n-1)\cdot2^n-(2n-1)$， ………………………………………………………………………… 6 分

所以 $S_n=(1\times2-1)+(3\times2^2-3)+(5\times2^3-5)+\cdots+[(2n-1)\cdot2^n-(2n-1)]$

$=[1\times2+3\times2^2+5\times2^3+\cdots+(2n-1)\cdot2^n]-[1+3+5+\cdots+(2n-1)]$， ……………………………… 7 分

令 $A_n=1\times2+3\times2^2+5\times2^3+\cdots+(2n-1)\cdot2^n$，

则 $2A_n=1\times2^2+3\times2^3+5\times2^4+\cdots+(2n-1)\cdot2^{n+1}$，

两式相减，得 $-A_n=2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1}-(2n-1)\cdot2^{n+1}$， ………………………………………………… 8 分

$=2+\dfrac{2^3(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n-1)\cdot2^{n+1}=-6+(3-2n)\cdot2^{n+1}$，

所以 $A_n=(2n-3)\cdot2^{n+1}+6$. ………………………………………………………………………………………… 10 分

又 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=\dfrac{n[1+(2n-1)]}{2}=n^2$，

所以 $S_n=(2n-3)\cdot2^{n+1}-n^2+6$. …………………………………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-x-1-\dfrac{1}{2}x\sin x(x\in[0,\pi])$.

所以 $f'(x)=e^x-1-\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}x\cos x$，

令 $g(x)=e^x-1-\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}x\cos x(x\in[0,\pi])$，则 $g'(x)=e^x-\cos x+\dfrac{1}{2}x\sin x$， ……………………… 1 分

因为 $x\in[0,\pi]$，所以 $e^x-\cos x\geqslant0$，$\dfrac{1}{2}x\sin x\geqslant0$， ……………………………………………………… 2 分

所以 $g'(x)\geqslant0$(当且仅当 $x=0$ 时等号成立)，所以 $g(x)$ 在$[0,\pi]$上是增函数，

从而 $g(x)\geqslant g(0)=0$，即 $f'(x)\geqslant0$，所以 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上是增函数，

于是 $f(x)_{\min}=f(0)=0$. ………………………………………………………………………………………………… 4 分

(2)因为 $f(0)=0$，所以 0 为 $f(x)$ 的一个零点，

则问题转化为 $f(x)$ 在$(0,\pi]$上只有一个零点. ……………………………………………………………………… 5 分

当 $a\leqslant1$ 时，由(1)可知 $f(x)=e^x-x-1-\dfrac{a}{2}x\sin x\geqslant e^x-x-1-\dfrac{1}{2}x\sin x\geqslant0$，

即 $f(x)$ 在区间$(0,\pi]$无零点，不合题意； ………………………………………………………………………… 6 分

当 $a>1$ 时，$f'(x)=e^x-1-\dfrac{a}{2}\sin x-\dfrac{a}{2}x\cos x$，

令 $h(x)=e^x-1-\dfrac{a}{2}\sin x-\dfrac{a}{2}x\cos x(0<x\leqslant\pi)$，则 $h'(x)=e^x-a\cos x+\dfrac{a}{2}x\sin x$，

令 $m(x)=e^x-a\cos x+\dfrac{a}{2}x\sin x(0<x\leqslant\pi)$，则 $m'(x)=e^x+\dfrac{3a}{2}\sin x+\dfrac{a}{2}x\cos x$. ……………………… 7 分

①当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$m'(x)>0$，所以 $m(x)$ 在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递增，

又 $m(0)=1-a<0$，$m\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}+\dfrac{\pi a}{4}>0$，则存在唯一的实数 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使 $m(x_0)=0$，

所以当 $x\in(0,x_0)$时，$m(x)<0$；当 $x\in\left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$m(x)>0$. …………………………………………… 8 分

②当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$时，$\cos x<0$，$\sin x>0$，$m(x)=e^x-a\cos x+\dfrac{a}{2}x\sin x>0$.

由①②知，当 $x\in(0,x_0)$时，$m(x)<0$；当 $x\in(x_0,\pi)$时，$m(x)>0$， ……………………………………………… 9 分

即当 $x\in(0,x_0)$时，$h'(x)<0$；当 $x\in(x_0,\pi)$时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在$(0,x_0)$上单调递减，在(x_0,π)上单调递增，

因为 $h(0)=0$，所以 $h(x_0)<0$，即 $f'(0)=0$，$f'(x_0)<0$， ………………………………………………………… 10 分

又 $f'(\pi)=e^\pi-1+\dfrac{\pi a}{2}>0$，所以存在唯一实数 $x_1\in(x_0,\pi)$，使 $f'(x_1)=0$，

所以当 $x\in(0,x_1)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_1,\pi)$时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$在$(0,x_1)$上单调递减，在(x_1,π)上单调递增. ………………………………………………………… 11 分

因为 $f(0)=0$，所以 $f(x_1)<0$，又 $f(\pi)=e^\pi-\pi-1>0$，

所以存在唯一实数 $x_2\in(x_1,\pi)$，使 $f(x_2)=0$，即 $f(x)$ 在$(0,\pi]$内有唯一零点 x_2.

综上，函数 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上有两个零点时，实数 a 的取值范围是$(1,+\infty)$. …………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。