参考答案

普高联考2022—2023学年高三测评(三)

理科数学

1. C 【解析】由题知 $U=\{-2,-1,0,1,2\}$，则 $B=\{-1,1\}$，所以 $A\cap B=\{-1,1\}$. 故选 C.

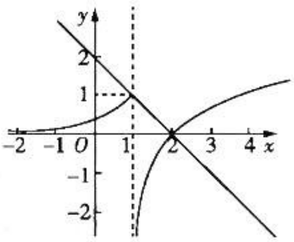
2. A 【解析】当 $\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 时，$\sin\theta=\frac{1}{2}$，当 $\sin\theta=\frac{1}{2}$ 时，$\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 或 $\theta=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以"$\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$"是"$\sin\theta=\frac{1}{2}$"的充分不必要条件. 故选 A.

3. A 【解析】$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=(2,\sqrt{3})$，由 $(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{b}$ 可得 $2\times3+\sqrt{3}\times m=0$，解得 $m=-2\sqrt{3}$. 故选 A.

4. C 【解析】由抛物线的定义知点 A 到直线 $x=-\frac{p}{2}$ 的距离为3，所以 $\frac{p}{2}=-\frac{p}{2}-(-p)=5-3=2$，解得 $p=4$，所以抛物线的方程为 $y^2=8x$. 故选 C.

5. B 【解析】观察可知，第 n 行和第 n 列均为相同的等差数列，第一列数列的通项公式为 $a_n=2n-1$，则第36行第1列的数为 $a_{36}=2\times36-1=71$. 第36行也是等差数列，公差为37，则通项公式为 $b_n=a_{36}+(n-1)\times37=37n+34$，则 $b_8=37\times8+34=330$. 故选 B.

6. D 【解析】方程 $f(x)+x-m=0$ 有两个不同的实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 与 $y=-x+m$ 的图象有两个不同的交点，如图，当直线 $y=-x+m$ 经过点 $(1,1)$ 时，$m=2$，所以 $m\leqslant2$，故选 D.



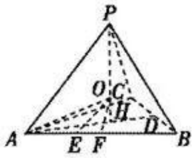
7. D 【解析】因为 $AD\perp$ 平面 DCC_1D_1，$AD\subset$ 平面 ADE，所以平面 $ADE\perp$ 平面 DCC_1D_1，故 A 正确；线段 CD 是半圆的直径，所以 $DE\perp EC$，又 $AD\perp EC$，$AD\cap DE=D$，所以 $EC\perp$ 平面 ADE，所以平面 $ADE\perp$ 平面 BCE，故 B 正确；因为 $D_1C_1/\!/AB$，所以 $D_1C_1/\!/$ 平面 ABE，故 C 正确；当 E 为 $\overset{\frown}{CD}$ 的中点时，二面角 $E-AB-C$ 有最大值，设 CD，AB 的中点分别为 O，M，连接 EO，OM，则 $\angle EMO$ 为二面角 $E-AB-C$ 的平面角，且 $\angle EMO=45°$，即二面角 $E-AB-C$ 的最大值为 $45°$，故 D 错误. 故选 D.

8. B 【解析】因为 $f(x)$ 的最大值为2，所以 $A=2$，因为 $f(x)\leqslant f(\frac{\pi}{4})$ 恒成立，所以当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值，则 $\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $\omega=\frac{4}{3}+8k,k\in\mathbf{Z}$. 当 $x\in[0,\frac{\pi}{6}]$ 时，$\frac{\pi}{6}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}$，因为 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{6}]$ 上单调递增，所以 $\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}$，解得 $\omega\leqslant2$，即 $0<\omega\leqslant2$，所以 $\omega=\frac{4}{3}$，则 $f(x)=2\sin(\frac{4}{3}x+\frac{\pi}{6})$. 所以 $f(\frac{\pi}{16})=2\sin(\frac{4}{3}\times\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{6})=2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$，故选 B.

9. C 【解析】若 $a_n=2n-1$，则 $a_{n+2}+a_n-2a_{n+1}=2n+3+2n-1-2(2n+1)=0$，
即 $a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}$，不满足条件，不是"$M-$数列"；
若 $a_n=-3^n$，则 $a_{n+2}+a_n-2a_{n+1}=-(3^{n+2}+3^n-2\times3^{n+1})=-4\times3^n<0$，
即 $a_{n+2}+a_n<2a_{n+1}$，不满足条件，不是"$M-$数列"；
若 $a_n=n\times2^n$，则 $a_{n+2}+a_n-2a_{n+1}=(n+2)\times2^{n+2}+n\times2^n-2(n+1)\times2^{n+1}=(n+4)\times2^n>0$，即 $a_{n+2}+a_n>2a_{n+1}$，满足条件，是"$M-$数列"；
若 $a_n=n^2\times(\frac{1}{2})^n$，则 $a_{n+2}+a_n-2a_{n+1}=(n+2)^2\times(\frac{1}{2})^{n+2}+n^2\times(\frac{1}{2})^n-2(n+1)^2\times(\frac{1}{2})^{n+1}=$

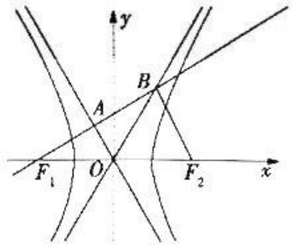
$(\frac{1}{2})^n\times[\frac{(n+2)^2}{4}+n^2-(n+1)^2]=(\frac{1}{2})^n\times\frac{n^2-4n}{4}$,当 $n=1,2,3$ 时,$a_{n+2}+a_n<2a_{n+1}$,不满足条件,不是"M-数列". 故选 C.

10. A 【解析】如图,因为三棱锥的棱长均为 6,所以点 P 在平面 ABC 内的射影 H 是$\triangle ABC$ 的中心,取 BC 的中点 D,连接 AD,则点 H 在 AD 上,且 $AH=\frac{2}{3}AD$,所以 $BD=3$,$AD=3\sqrt{3}$,$AH=2\sqrt{3}$,则 $PH=2\sqrt{6}$. 设三棱锥 $P-ABC$ 的外接球半径为 R,



则 $OP=OA=R$,在$\triangle AOH$ 中,$AH^2+(PH-R)^2=R^2$,解得 $R=\frac{3\sqrt{6}}{2}$. 因为$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,所以 $AE=2$,取 AB 的中点 F,则 $EF=1$,且 $OF\perp AB$,所以 $OE^2=EF^2+OF^2=EF^2+OA^2-AF^2=1^2+(\frac{3\sqrt{6}}{2})^2-3^2=\frac{11}{2}$.
当过点 E 的球 O 的截面与 OE 垂直时,截面面积最小,设截面圆的半径为 r,则 $r^2=R^2-OE^2=8$,所以截面面积为 $S=\pi r^2=8\pi$. 故选 A.

11. B 【解析】方法一 由题知直线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 是双曲线的两条渐近线,



如图,因为 O 是 F_1F_2 的中点,且 $F_1B\perp F_2B$,所以$|OB|=\frac{1}{2}|F_1F_2|=c$,

设 $B(x,y)$,则$\begin{cases}y=\frac{b}{a}x,\\x^2+y^2=c^2,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=a,\\y=b,\end{cases}$则 $B(a,b)$. 因为 A 是 F_1B 的中点,所以 $A(\frac{a-c}{2},\frac{b}{2})$,又点 A 在直线 $y=-\frac{b}{a}x$ 上,所以$\frac{b}{2}=-\frac{b}{a}\times\frac{a-c}{2}$,解得 $c=2a$,

所以 $e=\frac{c}{a}=2$,故选 B.

方法二 因为 O 是 F_1F_2 的中点,$F_1B\perp F_2B$,所以$|OB|=\frac{1}{2}|F_1F_2|=|OF_1|$,因为 A 是 F_1B 的中点,所以$\angle AOF_1=\angle AOB$,又$\angle AOF_1=\angle BOF_2$,所以$\angle AOF_1=\angle AOB=\angle BOF_2=60°$,所以$\frac{b}{a}=\tan 60°=\sqrt{3}$,所以 $b=\sqrt{3}a$,则 $c=2a$,所以 $e=\frac{c}{a}=2$. 故选 B.

12. D 【解析】当 $x>\frac{1}{2}$时,$1+\ln x>0$,则 $ax^2\geqslant 2(1+\ln x)e^{b-1}$可变形为$\frac{ax^2}{1+\ln x}\geqslant 2e^{b-1}$.

设$f(x)=\frac{ax^2}{1+\ln x}(a>0)$,则$f'(x)=\frac{ax(2\ln x+1)}{(1+\ln x)^2}$,令$f'(x)=0$,解得 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$,

当 $x\in(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{e}})$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,当 $x\in(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,

所以$f(x)$在 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$处有极小值$\frac{2a}{e}$,即最小值为$\frac{2a}{e}$.

因为不等式恒成立,所以$\frac{2a}{e}\geqslant 2e^{b-1}$,即 $a\geqslant e^b$. 故选 D.

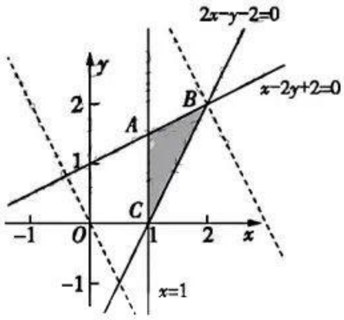
13. 2 【解析】$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4|\boldsymbol{b}|^2=19-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=11$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$.

14. $\frac{\pi}{2}$ 【解析】$1+\sin\beta=\tan\alpha\cos\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\beta$,即 $\cos\alpha+\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta$,

即 $\cos\alpha=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha-\beta)$，则 $\sin(\alpha-\beta)=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$，又 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则 $0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$，$0<\frac{\pi}{2}-\alpha<\frac{\pi}{2}$，则 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$，即 $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$.（写成 $90°$ 也给分）

15. $3\sqrt{2}$ 【解析】过点 $N(-2,2)$ 且与直线 $x+y=0$ 垂直的直线为 $y=x+4$，则圆心在直线 $y=x+4$ 上，又圆心在线段 MN 的垂直平分线上，即直线 $x=1$，所以圆心坐标为 $(1,5)$，则圆的半径为 $\sqrt{(4-1)^2+(2-5)^2}=3\sqrt{2}$.

16. 4 【解析】不等式组表示的平面区域如图所示，其中 $A(1,\frac{3}{2})$，$B(2,2)$，$C(1,0)$. 因为 $k>0$，直线 $l_0:y=-kx$ 平移到 B 点时目标函数取最大值，即 $2k+2=6$，解得 $k=2$.



因为 $a^2-5ab+9b^2-c+k=2$，所以 $a^2-5ab+9b^2-e=0$，

即 $c=a^2-5ab+9b^2$，所以 $\frac{ab}{c}=\frac{ab}{a^2-5ab+9b^2}=\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{9b}{a}-5}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{9b}{a}}-5}=1$，

当且仅当 $\frac{a}{b}=\frac{9b}{a}$，即 $a=3b$ 时取等号，此时 $c=3b^2$，则 $\frac{9}{a}+\frac{1}{b}-\frac{3}{c}=\frac{9}{3b}+\frac{1}{b}-\frac{3}{3b^2}=\frac{4}{b}-\frac{1}{b^2}=-(\frac{1}{b}-2)^2+4\leqslant4$，当且仅当 $b=\frac{1}{2}$ 时取等号，所以 $\frac{9}{a}+\frac{1}{b}-\frac{3}{c}$ 的最大值为 4.

17. (1) $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-2\times\frac{1+\cos 2x}{2}+1+a$

$=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+a$ ········· 2 分

$=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})+a$， ········· 3 分

由 $f(\frac{\pi}{6})=1$ 知 $1+a=1$，则 $a=0$，

所以 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$. ········· 4 分

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，则 $-\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi],k\in\mathbf{Z}$. ········· 6 分

(2) 由 (1) 知 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，则 $-\frac{\pi}{6}\leqslant2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$，

当 $2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$，即 $x=0$ 时，函数 $f(x)$ 有最小值 -1；

当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，函数 $f(x)$ 有最大值 2. ········· 10 分

18. (1) 当 $n=1$ 时，$a_1=3$.

$a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}=3n$ ①，当 $n\geqslant2$ 时，$a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n-1}=3(n-1)$ ②，

①-②得$\frac{a_n}{n}=3$,即$a_n=3n$,当$n=1$时,$a_1=3$满足公式,

所以$a_n=3n$. ………………………………………………………………………… 6分

(2)由(1)知$c_n=(a_n-1)\times 2^n=(3n-1)\times 2^n$,

则$T_n=2\times 2+5\times 2^2+8\times 2^3+\cdots+(3n-4)\times 2^{n-1}+(3n-1)\times 2^n$ ③,

$2T_n=2\times 2^2+5\times 2^3+8\times 2^4+\cdots+(3n-4)\times 2^n+(3n-1)\times 2^{n+1}$ ④, ………………………… 8分

③-④得$-T_n=4+3\times 2^2+3\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+3\times 2^n-(3n-1)\times 2^{n+1}$

$$=4+3\times\frac{2^2(1-2^{n-1})}{1-2}-(3n-1)\times 2^{n+1}=-8-(3n-4)\times 2^{n+1},$$

所以$T_n=(3n-4)\times 2^{n+1}+8$. ……………………………………………………………… 12分

19.(1)由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$和$a\cos B+b\sin A=c$,得$\sin A\cos B+\sin A\sin B=\sin C$,

又$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$, ……………………………………………… 3分

所以$\sin A\sin B=\cos A\sin B$,因为$B\in(0,\pi)$,所以$\sin B\neq 0$,则$\sin A=\cos A$,

又$A\in(0,\frac{\pi}{2})$,则$A=\frac{\pi}{4}$. ………………………………………………………………………… 6分

(2)由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,又$a^2=4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}bc\sin A=2\sqrt{3}bc\sin A$,

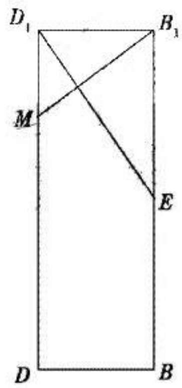
所以$b^2+c^2-2bc\cos A=2\sqrt{3}bc\sin A$,则$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=2\cos A+2\sqrt{3}\sin A=4\sin(A+\frac{\pi}{6})$, ………… 10分

又$A\in(0,\frac{\pi}{2})$,则$\frac{\pi}{6}<A+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$,

当$A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即$A=\frac{\pi}{3}$时,$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$取最大值,最大值为4. ……………………………… 12分

20.(1)由题知$BC\perp BB_1$,又$BC\perp A_1E$,且$BB_1\cap A_1E=E$,

所以$BC\perp$平面ABB_1A_1,则$BC\perp AB$. ……………………………………………… 2分



设$AB=BC=2$,$AA_1=4$,

连接B_1D_1,BD,因为D_1是A_1C_1的中点,

所以$B_1D_1=\sqrt{2}$,且$B_1D_1\perp A_1C_1$.

因为$CC_1\perp A_1C_1$,$CC_1/\!/DD_1$,所以$DD_1\perp A_1C_1$,因为$B_1D_1\cap DD_1=D_1$,

所以$A_1C_1\perp$平面BB_1D_1D,

因为$B_1M\subset$平面BB_1D_1D,所以$A_1C_1\perp B_1M$.

连接D_1E,如图,$B_1D_1=\sqrt{2}$,$B_1E=2$,

因为$\lambda=\frac{3}{4}$,所以$D_1M=1$,则$\frac{D_1M}{D_1B_1}=\frac{B_1D_1}{B_1E}$,

所以$\triangle D_1B_1M\backsim\triangle B_1ED_1$,则$\angle D_1B_1M=\angle B_1ED_1=\angle MD_1E$,

则$\angle B_1MD_1+\angle MD_1E=\angle B_1MD_1+\angle D_1B_1M=90°$,所以$D_1E\perp B_1M$.

因为$A_1C_1\cap D_1E=D_1$,所以$B_1M\perp$平面A_1C_1E. ……………………………………………… 6分

(说明:也可以直接建立空间直角坐标系,证明$B_1M\perp$平面A_1C_1E)

(2)以B为坐标原点,建立如图所示的空间直角坐标系,设$AB=BC=2$,$AA_1=4$,则$B(0,0,0)$,$A(0,2,0)$,$C(2,0,0)$,$M(1,1,4\lambda)$,$A_1(0,2,4)$,$C_1(2,0,4)$,$B_1(0,0,4)$.

设平面A_1B_1C的法向量为$\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

$\overrightarrow{B_1C}=(2,0,-4)$，$\overrightarrow{B_1A_1}=(0,2,0)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{B_1C}=2x_1-4z_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{B_1A_1}=2y_1=0,\end{cases}$

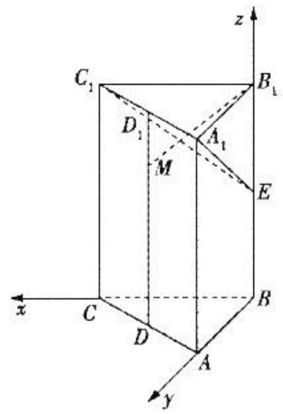
令 $z_1=1$，则 $\boldsymbol{m}=(2,0,1)$. …………………………………………… 8 分

设平面 ABM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

$\overrightarrow{BA}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BM}=(1,1,4\lambda)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}=2y_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BM}=x_2+y_2+4\lambda z_2=0,\end{cases}$

令 $z_2=1$，则$\boldsymbol{n}=(-4\lambda,0,1)$.

$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\dfrac{-8\lambda+1}{\sqrt{5}\sqrt{16\lambda^2+1}}\right|=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$,



解得 $\lambda=2$ 或 $\lambda=-\dfrac{1}{7}$，

所以当 $\lambda=2$ 或 $\lambda=-\dfrac{1}{7}$时，平面 ABM 与平面 A_1B_1C 所成锐二面角的余弦值为$\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$. …… 12 分

21.（1）设动圆 M 的半径为 r，圆 F_1，圆 F_2 的半径分别为$\dfrac{\sqrt6}{2}$，$\dfrac{3\sqrt6}{2}$，圆心分别为 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$.

由题知$|MF_1|=r+\dfrac{\sqrt6}{2}$，$|MF_2|=\dfrac{3\sqrt6}{2}-r$，则$|MF_1|+|MF_2|=2\sqrt6$，

则动圆 M 的圆心 M 到两个定点 F_1，F_2 的距离的和为定值 $2\sqrt6$，且 $2\sqrt6>4$，

所以点 M 的轨迹是以 F_1，F_2 为焦点的椭圆，

设椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则 $a=\sqrt6$，$c=2$，$b^2=a^2-c^2=2$，

所以曲线 E 的轨迹方程为$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$. ……………………………………………………………… 5 分

（2）假设存在点 $N(x_0,0)$，使得$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}$为定值.

当直线 l 的斜率不为零时，可设直线 l 的方程为$x=my+2$，

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1,\\ x=my+2,\end{cases}$得$(m^2+3)y^2+4my-2=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=-\dfrac{4m}{m^2+3}$，$y_1y_2=-\dfrac{2}{m^2+3}$. ………………………………… 7 分

$\overrightarrow{NA}=(x_1-x_0,y_1)$，$\overrightarrow{NB}=(x_2-x_0,y_2)$，

所以$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=(x_1-x_0)(x_2-x_0)+y_1y_2=(my_1+2-x_0)(my_2+2-x_0)+y_1y_2$

$=(m^2+1)y_1y_2+(2-x_0)m(y_1+y_2)+(2-x_0)^2$

$=\dfrac{-2(m^2+1)}{m^2+3}-\dfrac{4m\cdot m(2-x_0)}{m^2+3}+(2-x_0)^2=\dfrac{(4x_0-10)m^2-2}{m^2+3}+(2-x_0)^2$，………………… 9 分

要使上式为定值，即与 m 无关，应有$\dfrac{4x_0-10}{1}=-\dfrac{2}{3}$，解得 $x_0=\dfrac{7}{3}$，此时$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=-\dfrac{5}{9}$.

当直线 l 的斜率为零时，不妨设 $A(-\sqrt6,0)$，$B(\sqrt6,0)$，当点 N 的坐标为$(\dfrac{7}{3},0)$时，$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=-\dfrac{5}{9}$.

综上所述，存在点 $N(\dfrac{7}{3},0)$，使得$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=-\dfrac{5}{9}$. ……………………………………………… 12 分

22. (1)$g'(x)=\frac{3}{x}+1$,则 $g'(1)=4$,又 $g(1)=1$,

所以曲线 $y=g(x)$ 在点 $(1,g(1))$ 处的切线方程为 $y-1=4(x-1)$,即 $y=4x-3$.

令 $\frac{1}{2}ax^2+3ax=4x-3$,$a\neq0$,则 $\frac{1}{2}ax^2+(3a-4)x+3=0$,

则 $\Delta=(3a-4)^2-4\times\frac{1}{2}a\times3=9a^2-30a+16=0$,解得 $a=\frac{2}{3}$ 或 $a=\frac{8}{3}$. …………………… 4 分

(2)不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立,即 $\frac{1}{2}ax^2+3ax\geqslant3\ln x+x(x>0)$ 恒成立,

由于 $\frac{1}{2}x^2+3x>0$,则 $a\geqslant\frac{3\ln x+x}{\frac{1}{2}x^2+3x}$.

设 $h(x)=\frac{3\ln x+x}{\frac{1}{2}x^2+3x}$,则 $h'(x)=\frac{(\frac{3}{x}+1)(\frac{1}{2}x^2+3x)-(3\ln x+x)(x+3)}{(\frac{1}{2}x^2+3x)^2}$,$x>0$,

即 $h'(x)=\frac{(x+3)(3-\frac{1}{2}x-3\ln x)}{(\frac{1}{2}x^2+3x)^2}$.

设 $k(x)=3-\frac{1}{2}x-3\ln x$,则 $k'(x)=-\frac{1}{2}-\frac{3}{x}<0$,

所以 $k(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,

又 $k(1)=\frac{5}{2}>0$,$k(2)=2-3\ln 2=\ln e^2-\ln 8<0$,

所以存在 $x_0\in(1,2)$,使 $k(x_0)=3-\frac{1}{2}x_0-3\ln x_0=0$,即 $3\ln x_0=3-\frac{1}{2}x_0$. …………………… 8 分

当 $x\in(0,x_0)$ 时,$h'(x)>0$,函数 $h(x)$ 单调递增,

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时,$h'(x)<0$,函数 $h(x)$ 单调递减,

所以 $h(x)_{\max}=h(x_0)=\frac{3-\frac{1}{2}x_0+x_0}{\frac{1}{2}x_0^2+3x_0}=\frac{3+\frac{1}{2}x_0}{\frac{1}{2}x_0^2+3x_0}=\frac{1}{x_0}$.

又 $x_0\in(1,2)$,则 $\frac{1}{x_0}\in(\frac{1}{2},1)$,

由于 $a\geqslant h(x)$ 恒成立,$h(x)_{\max}\in(\frac{1}{2},1)$,所以实数 a 的最小整数值为 1. …………………… 12 分