

## 鞍山市普通高中 2022—2023 学年度高三第二次质量监测

# 数 学

考试时间：120 分钟 满分：150 分

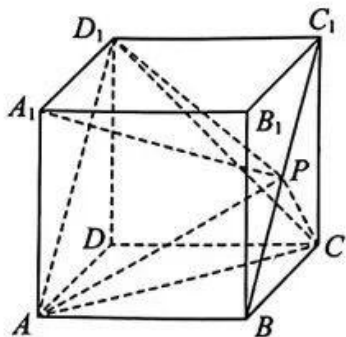
一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 集合  $A = \{x \mid |x-1| < 1\}$ ，集合  $B = \{y \mid y = x^2\}$ ，则  $A \cap B =$   
 A.  $(0, 2)$       B.  $[0, 2)$       C.  $(-\infty, 2)$       D.  $(-1, 2)$
- 已知  $z = (1-2i)(3-i)$ ，则  $z$  对应的点在  
 A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限
- 已知  $\theta \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ ，且  $\cos\theta - \sin\theta = -\frac{\sqrt{7}}{2}$ ，则  $2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) =$   
 A.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$       B.  $-\frac{1}{2}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 天干地支纪年法源于中国，中国自古便有十天干与十二地支。十天干即：甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸；十二地支即：子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥。天干地支纪年法是按顺序以一个天干和一个地支相配，排列起来，天干在前，地支在后，天干由“甲”起，地支由“子”起，比如第一年为“甲子”，第二年为“乙丑”，第三年为“丙寅”……，以此类推，排列到“癸酉”后，天干回到“甲”重新开始，即“甲戌”，“乙亥”，之后地支回到“子”重新开始，即“丙子”，……，以此类推，2023 年是癸卯年，请问：在 100 年后的 2123 年为  
 A. 壬午年      B. 癸未年      C. 己亥年      D. 戊戌年
- 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中，已知  $AA_1 = 7$ ，点  $O$  在棱  $AA_1$  上，且  $AO = 4$ ， $P$  为正方体表面上的动点，若  $PO = 5$ ，则点  $P$  的轨迹长度为  
 A.  $\frac{15\pi}{2}$       B.  $(4+3\sqrt{2})\pi$       C.  $\frac{17\pi}{2}$       D.  $(4+3\sqrt{3})\pi$
- 已知圆  $C: (x-5)^2 + (y-12)^2 = 1$  和两点  $A(0, -m)$ ， $B(0, m)$  ( $m > 0$ )，若圆  $C$  上存在点  $P$ ，使得  $\angle APB = 90^\circ$ ，则  $m$  的最小值为  
 A. 14      B. 13      C. 12      D. 11
- 已知  $x = 4 + 2^{2^2}$ ， $y = 6 + \frac{8}{5} \ln 2$ ， $z = 2^{3^1}$ ，则  
 A.  $z > y > x$       B.  $y > x > z$       C.  $x > z > y$       D.  $z > x > y$

8. 已知函数  $f(x)$  的图像是连续不断的, 其定义域为  $(-1,1)$ , 满足: 当  $x > 0$  时,  $f(x) > 0$ ; 任意的  $x, y \in (-1,1)$ , 均有  $f(x+y)[1-f(x)f(y)] = f(x)+f(y)$ . 若  $f(\ln x) > f\left(\frac{1}{2}\right)$ , 则  $x$  的取值范围是 ( $e$  是自然对数的底数)
- A.  $\left(\frac{1}{e}, \sqrt{e}\right)$       B.  $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e}\right)$       C.  $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \cup (\sqrt{e}, e)$       D.  $(\sqrt{e}, e)$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列选项中判断正确的是
- A. 当  $x < \frac{5}{4}$  时,  $y = 4x - 2 + \frac{1}{4x-5}$  的最小值是 5
- B. 若关于  $x$  的不等式  $ax^2 + bx + c \leq 0$  的解集是  $\{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 6\}$ , 则  $a+b+c > 0$
- C. 已知向量  $a = (2, m-1)$ ,  $b = (m, 1)$ , 若  $a \parallel b$ , 则  $m = 2$
- D. 已知向量  $a = (1, 3)$ ,  $b = (2, y)$ ,  $(a+b) \perp a$ , 则  $a$  与  $b$  的夹角为  $\frac{3\pi}{4}$
10. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{2} \sin x + \sqrt{3} \cos^2 \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 则
- A.  $f(x)$  的图象向右平移  $\frac{5\pi}{6}$  个单位长度后得到函数  $y = -\cos x$  的图象
- B.  $f(x)$  的图象与  $g(x) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$  的图象关于  $y$  轴对称
- C.  $f(x)$  的单调递减区间为  $\left[2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{7\pi}{6}\right] (k \in \mathbf{Z})$
- D.  $f(x)$  在  $[0, a]$  上有 3 个零点, 则实数  $a$  的取值范围是  $\left[\frac{8\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}\right]$
11. 如图, 正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 1,  $P$  是线段  $BC_1$  上的动点, 则下列结论正确的是
- A. 四面体  $A_1D_1AP$  的体积为定值
- B.  $AP+PC$  的最小值为  $2\sqrt{2}$
- C.  $A_1P \parallel$  平面  $ACD_1$
- D. 当直线  $A_1P$  与  $AC$  所成的角最大时, 四面体  $A_1PCA$  的外接球的体积为  $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$



12. 平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知点  $P$  在双曲线  $C: x^2 - y^2 = \lambda (\lambda > 0)$  的右支上运动, 平行四边形  $OAPB$  的顶点  $A, B$  分别在  $C$  的两条渐近线上, 则下列结论正确的为
- A. 直线  $AO, AP$  的斜率之积为  $-1$       B. 双曲线  $C$  的离心率为  $2$
- C.  $|PA| + |PB|$  的最小值为  $\sqrt{2\lambda}$       D. 四边形  $OAPB$  的面积可能为  $\frac{2\lambda}{3}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13.  $(1-2x)^{10}$  的二项展开式中  $x$  项的系数为\_\_\_\_\_.
14. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $S_n = n+1$ , 则数列  $\{a_n\}$  的通项公式为\_\_\_\_\_.
15. 冬季两项是冬奥会的项目之一, 是把越野滑雪和射击两种不同特点的竞赛项目结合在一起进行的运动. 其中冬季两项男子个人赛, 选手需要携带枪支和 20 发子弹, 每滑行 4 千米射击 1 次, 共射击 4 次, 每次 5 发子弹, 若每有 1 发子弹没命中, 则被罚时 1 分钟, 总用时最少者获胜. 已知某男选手在一次比赛中共被罚时 3 分钟, 假设其射击时每发子弹命中的概率都相同, 且每发子弹是否命中相互独立, 记事件  $A$  为其在前两次射击中没有被罚时, 事件  $B$  为其在第 4 次射击中被罚时 2 分钟, 那么  $P(A|B) =$ \_\_\_\_\_.

来源: 高三数学公众号

16. 已知  $A, B, C$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  上的三个点,  $O$  为坐标原点,  $A, B$  两点关于原点对称,  $AC$  经过右焦点  $F$ , 若  $|OA| = |OF|$  且  $\overline{AF} = 2\overline{FC}$ , 则该椭圆的离心率是\_\_\_\_\_.

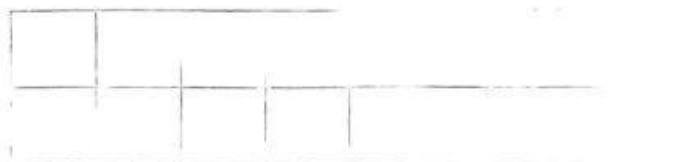
四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

数列  $\{a_n\}$  是正项等比数列, 已知  $a_1 = 2$  且  $a_3, 3a_2, a_4$  成等差数列.

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

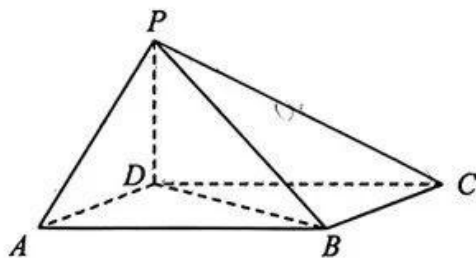
(2) 若  $b_n = \log_2 a_n, c_n = \frac{b_{n+1} - b_n}{b_n^2 + b_n}$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .





18. (本小题满分 12 分)

如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为平行四边形,  $\angle DAB = 60^\circ$ ,  $AB = 2$ ,  $AD = 1$ ,  $PD \perp$  底面  $ABCD$ .



(1) 证明:  $PA \perp BD$ ;

(2) 若  $PD = AD$ , 求二面角  $A-PB-C$  的余弦值.

19. (本小题满分 12 分)

请从①  $a \sin B - \sqrt{3} b \cos B \cos C = \sqrt{3} c \cos^2 B$ ; ②  $(\sin A - \sin C)^2 = \sin^2 B - \sin A \sin C$ ; ③  $\frac{\sqrt{3} b \sin A}{1 + \cos B} = a$  这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 并加以解答 (如未作出选择, 则按照选择①评分. 选择的编号请填写到答题卡对应位置上).

在  $\triangle ABC$  中,  $a, b, c$  分别是角  $A, B, C$  的对边, 若 \_\_\_\_\_,

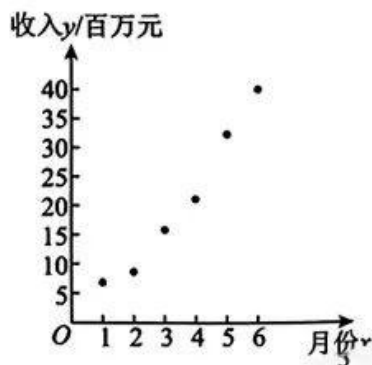
(1) 求角  $B$  的大小;

(2) 若  $\triangle ABC$  为锐角三角形,  $c = 1$ , 求  $a^2 + b^2$  的取值范围.

20. (本小题满分 12 分)

2020 年, 是人类首次成功从北坡登顶珠峰 60 周年, 也是中国首次精确测定并公布珠峰高程的 45 周年. 华为帮助中国移动开通珠峰峰顶 5G, 有助于测量信号的实时开通, 为珠峰高程测量提供通信保障, 也验证了超高海拔地区 5G 信号覆盖的可能性, 在持续高风速下 5G 信号的稳定性, 在条件恶劣地区通过简易设备传输视频信号的可能性. 正如任总在一次采访中所说: “华为公司价值体系的理想是为人类服务.” 有人曾问, “在珠峰开通 5G 的意义在哪里?” 我认为它是科学技术的一次珠峰登顶, 告诉全世界, 华为 5G、中国 5G 的底气来自哪里! 现在 5G 的到来给人们的生活带来更加颠覆性的变革, 某 IT 公司基于领先技术的支持, 5G 经济收入在短期内逐月攀升, 该 IT 公司在 1 月份至 6 月份的 5G 经济收入  $y$  (单位: 百万元) 关于月份  $x$  的数据如下表所示, 并根据数据绘制了如下图所示的散点图.

月份 $x$	1	2	3	4	5	6
收入 $y$ (百万元)	6.6	8.6	16.1	21.6	33.0	41.0



(1) 根据散点图判断,  $y=ax+b$  与  $y=c \cdot e^{dx}$  ( $a, b, c, d$  均为正常数) 哪一个更适宜作为 5G 经济收入  $y$  关于月份  $x$  的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由)

(2) 根据(1)的结果及表中的数据, 求出  $y$  关于  $x$  的回归方程, 并预测该公司 7 月份的 5G 经济收入. (结果保留小数点后两位)

(3) 从前 6 个月的收入中抽取 2 个, 记收入超过 20 百万元的个数为  $X$ , 求  $X$  的分布列和数学期望.

参考数据:

$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{u}$	$\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(u_i - \bar{u})$	$e^{1.52}$	$e^{2.66}$
3.50	21.15	2.85	17.70	125.35	6.73	4.57	14.30

其中, 设  $u = \ln y$ ,  $u_i = \ln y_i$  ( $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$ ).

参考公式: 对于一组具有线性相关关系的数据  $(x_i, v_i)$  ( $i=1, 2, 3, \dots, n$ ),

其回归直线  $\hat{v} = \hat{\beta}x + \hat{\alpha}$  的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为  $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ,

$$\hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta}\bar{x}.$$

21. (本小题满分 12 分)

抛物线  $C: y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 上的点  $M(1, y_0)$  到抛物线  $C$  的焦点  $F$  的距离为 2,  $A, B$  (不与  $O$  重合) 是抛物线  $C$  上两个动点, 且  $OA \perp OB$ .

(1) 求抛物线  $C$  的标准方程;

(2)  $x$  轴上是否存在点  $P$  使得  $\angle APB = 2\angle APO$ ? 若存在, 求出点  $P$  的坐标, 若不存在, 说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = e^{ax} - x$ ,  $g(x) = \sin x - \cos x - x + 2$ ,

(1) 求函数  $f(x)$  的单调区间;

(2) 若关于  $x$  的不等式  $f(x) \geq g(x)$  在  $x \in [0, +\infty)$  上恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线