考号________ 姓名________ 班级________ 学校________

密封线内不要答题

绝密★启用前

高三数学考试

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x+1>3\}$，$B=\{x|x^2<5x\}$，则 $A\cap B=$

A. $(0,+\infty)$　　B. $(5,+\infty)$　　C. $(0,2)$　　D. $(2,5)$

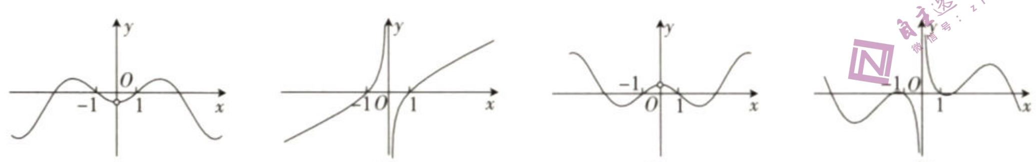
2. 已知 $a\in\mathbf{R}$，$\dfrac{a+\mathrm{i}}{2-4\mathrm{i}}$为纯虚数，则 $a=$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 设△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $A+B=\dfrac{5\pi}{6}$，$a=3$，$c=2$，则 $\sin A=$

A. $\dfrac{4}{5}$　　B. $\dfrac{3}{5}$　　C. $\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

4. 函数 $f(x)=(x-\dfrac{1}{x})\sin x$ 的部分图象大致为



5. 已知圆 $O:x^2+y^2=1$ 与圆 $C:(x-3)^2+y^2=r^2$ 外切，直线 $l:x-y-5=0$ 与圆 C 相交于 A,B 两点，则 $|AB|=$

A. 4　　B. 2　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{2}$

6. 已知某圆锥的高为 $2\sqrt{2}$ cm，体积为$\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}$ cm^3，则该圆锥的侧面积为

A. $\dfrac{3\pi}{2}$ cm^2　　B. 3π cm^2　　C. 6π cm^2　　D. 12π cm^2

7. 甲、乙、丙三人玩传球游戏，每个人都等可能地把球传给另一人，由甲开始传球，作为第一次传球，经过 3 次传球后，球回到甲手中的概率为

A. $\dfrac{1}{8}$　　B. $\dfrac{5}{16}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

8. 已知双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2，P 是双曲线 E 上一点，$PF_2\perp F_1F_2$，$\angle F_1PF_2$ 的平分线与 x 轴交于点 Q，$\dfrac{S_{\triangle PF_1Q}}{S_{\triangle PF_2Q}}=\dfrac{5}{3}$，则双曲线 E 的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

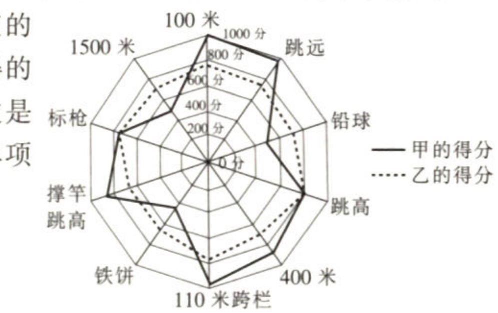
二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 给出下列说法，其中正确的是

A. 若 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$，则 $\cos 2\theta=-\dfrac{7}{9}$　　B. 若 $\tan 2\theta=\dfrac{4}{3}$，则 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$

C. 若 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$，则 $x+\dfrac{1}{x}$的最小值为 2　　D. 若 $0<x\leqslant\dfrac{1}{2}$，则 $x+\dfrac{1}{x}$的最小值为 2

10. 十项全能是田径运动中全能项目的一种，是由跑、跳、投等 10 个田径项目组成的综合性男子比赛项目，比赛成绩是按照国际田径联合会制定的专门田径运动会全能评分表将各个单项成绩所得的评分加起来计算的，总分多者为优胜者. 如图，这是某次十项全能比赛中甲、乙两名运动员的各个单项得分的雷达图，则下列说法正确的是



A. 在 400 米跑项目中，甲的得分比乙的得分低

B. 在跳高和标枪项目中，甲、乙水平相当

C. 甲的各项得分比乙的各项得分更均衡

D. 甲的各项得分的极差比乙的各项得分的极差大

11. 古希腊数学家普洛克拉斯指出："哪里有数，哪里就有美."“对称美”是数学美的重要组成部分，在数学史上，人类对数学的对称问题一直在思考和探索，图形中对称性的本质就是点的对称、线的对称. 如正方形既是轴对称图形，又是中心对称图形，对称性也是函数一个非常重要的性质. 如果一个函数的图象经过某个正方形的中心并且能够将它的周长和面积同时平分，那么称这个函数为这个正方形的“优美函数”. 下列关于“优美函数”的说法中正确的有

A. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{2^x+2^{-x}}(-1\leqslant x\leqslant 1)$可以是某个正方形的“优美函数”

B. 函数 $f(x)=4\cos(2x-\dfrac{\pi}{6})+3$ 只能是边长不超过$\dfrac{\pi}{2}$的正方形的“优美函数”

C. 函数 $f(x)=\ln(\sqrt{4x^2+1}-2x)-1$ 可以是无数个正方形的“优美函数”

D. 若函数 $y=f(x)$是“优美函数”，则 $y=f(x)$的图象一定是中心对称图形

12. 已知正数 x,y 满足 $x^2=y^3<1$，则下列结论正确的是

A. $0<x<y<1$　　B. $0<y<x<1$

C. $|y-x|\leqslant\dfrac{4}{27}$　　D. $|y^2-x^2|\leqslant\dfrac{4}{27}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(m+2,1)$，$\boldsymbol{b}=(5-2m,-5)$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $m=$ ▲ .

14. 设 E,F 分别在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 C_1D_1，A_1B_1 上，且 $D_1E=\frac{1}{3}D_1C_1$，$B_1F=\frac{1}{3}B_1A_1$，则直线 DE 与 BF 所成角的余弦值为___▲___.

15. 已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，过 F 且被 C 截得的弦长为 4 的直线有且仅有两条，写出一个满足条件的抛物线 C 的方程：___▲___，此时该弦的中点到 x 轴的距离为___▲___.（本题第一空 2 分，第二空 3 分）

16. 对 20 不断进行"乘以 2"或"减去 3"的运算，每进行一次记为一次运算，若运算 n 次得到的结果为 23，则 n 的最小值为___▲___.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知等差数列$\{a_n\}$满足 $a_2=4$，$2a_4-a_5=7$，公比不为 -1 的等比数列$\{b_n\}$满足 $b_3=4$，$b_4+b_5=8(b_1+b_2)$.

(1)求$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；

(2)设 $c_n=\frac{3}{a_na_{n+1}}+b_n$，求$\{c_n\}$的前 n 项和 S_n.

18.（12 分）

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的图象是由 $y=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到的.

(1)若 $f(x)$ 的最小正周期为 π，求 $f(x)$ 图象的对称轴中，与 y 轴距离最近的对称轴的方程；

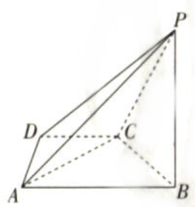
(2)若 $f(x)$ 图象相邻两个对称中心之间的距离大于 $\frac{2\pi}{7}$，$\omega\in\mathbf{N}^*$ 且 $\omega>2$，求 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{9}]$ 上的值域.

19.（12 分）

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，$AB/\!/CD$，$AD=DC=1$，$AB=2$，$AC\perp PC$.

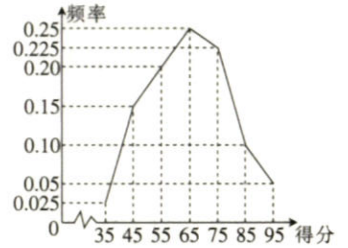
(1)证明：平面 $ABCD\perp$ 平面 PBC.

(2)若 $PB\perp BC$，$PB=2\sqrt{3}$，求直线 PA 与平面 PCD 所成角的正弦值.



20.（12 分）

2023 年，全国政协十四届一次会议于 3 月 4 日下午 3 时在人民大会堂开幕，3 月 11 日下午闭幕，会期 7 天半；十四届全国人大一次会议于 3 月 5 日上午开幕，13 日上午闭幕，会期 8 天半. 为调查学生对两会相关知识的了解情况，某高中学校开展了两会知识问答活动，现从全校参与该活动的学生中随机抽取 320 名学生，他们的得分（满分 100 分）的频率分布折线图如下.



(1)若此次知识问答的得分 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，用样本来估计总体，设 μ,σ 分别为被抽取的 320 名学生得分的平均数和标准差，求 $P(50.5<X\leqslant 94)$ 的值.

(2)学校对这些被抽取的 320 名学生进行奖励，奖励方案如下：用频率估计概率，得分小于或等于 55 的学生获得 1 次抽奖机会，得分高于 55 的学生获得 2 次抽奖机会. 假定每次抽奖抽到价值 10 元的学习用品的概率为 $\frac{3}{4}$，抽到价值 20 元的学习用品的概率为 $\frac{1}{4}$. 从这 320 名学生中任取一位，记该同学在抽奖活动中获得学习用品的价值总额为 ξ 元，求 ξ 的分布列和数学期望（用分数表示），并估算此次抽奖要准备的学习用品的价值总额.

参考数据：$P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)\approx 0.6827$，$P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)\approx 0.9545$，$P(\mu-3\sigma<X\leqslant\mu+3\sigma)\approx 0.9973$，$\sqrt{210}\approx 14.5$，$0.375=\frac{3}{8}$.

21.（12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，且椭圆 C 经过点 $(\sqrt{3},1)$，过右焦点 F 的直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)设 O 为坐标原点，求$\triangle OAB$ 面积的最大值以及此时直线 l 的方程.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=e^x+\cos x-\sin x$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1)证明：当 $x\geqslant 0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$.

(2)判断函数 $g(x)=e^{2x-\frac{\pi}{2}}[f(x)+f(2x)-e^{2x}]-1$ 的零点个数.