2018—2019学年度高三教学质量检测

数学(理工类)试题参考答案

一、选择题(5分×12=60分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	A	C	A	C	D	D	B	C	B	B

二、填空题(5分×4=20分)

13. 1　　14. $2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+6$　　15. $e-\frac{5}{2}$　　16. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

三、解答题

17. 解:(Ⅰ)由题意 $f(x)=\sin x(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x-\frac{1}{2}\sin^2 x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x-\frac{1}{2}\times\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{4}$ ………………………… 2分

$=\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x)-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})-\frac{1}{4}$ ………………………… 4分

∴ 函数$f(x)$的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. ………………………… 5分

(Ⅱ)∵ $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$,∴ $2x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$,

∴ $\sin(2x+\frac{\pi}{6})\in[\frac{1}{2},1]$, ………………………… 8分

∴ $f(x)\in[0,\frac{1}{4}]$.

∴ 函数$f(x)$的值域为$[0,\frac{1}{4}]$. ………………………… 10分

18. 解:(Ⅰ)∵ $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 共线,∴ $S_n=2a_n-2$, ………………………… 1分

当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=2a_1-2$,得 $a_1=2$, ………………………… 2分

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$,即 $a_n=2a_{n-1}(n\geqslant 2)$

∴ 数列$\{a_n\}$是公比为2,首项为2的等比数列. ………………………… 4分

∴ $a_n=2^n$ ………………………… 6分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知

$b_n=\frac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}=\frac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}$, ………………………… 8分

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{2^1+1}-\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^2+1}-\frac{1}{2^3+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}$

$=\frac{1}{2^1+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}+1}$ …………………………………………… 11 分

$\therefore T_n<\frac{1}{3}.$ …………………………………………………………………………… 12 分

19. 解:(Ⅰ)由正弦定理得,$\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B\cos A$,

又 $\sin B\neq 0$,$\therefore \sin A=\sqrt{3}\cos A$,即 $\tan A=\sqrt{3}$,

又 $A\in(0,\pi)$,$\therefore A=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………… 2 分

$\because \cos B=\frac{1}{7}$,$B\in(0,\pi)$,$\therefore \sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

$\therefore \sin C=\sin(A+B)=\sin(\frac{\pi}{3}+B)=\sin\frac{\pi}{3}\cos B+\cos\frac{\pi}{3}\sin B$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{5\sqrt{3}}{14}.$ …………………………………………………… 4 分

由正弦定理得 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{4\sqrt{3}}{7}:\frac{5\sqrt{3}}{14}=7:8:5.$ ………………………… 6 分

(Ⅱ)设 $a=7x$,$b=8x$,$c=5x$.

在 ΔABD 中,由余弦定理得 $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\times AD\times\cos A$

即 $21=(5x)^2+(4x)^2-2\times 5x\times 4x\times\frac{1}{2}=21x^2$

解得 $x=1$.

$\therefore a=7$,$b=8$,$c=5$. ………………………………………………………………… 10 分

$\therefore \Delta ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 8\times 5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}.$ ……………………………… 12 分

20. 解:(Ⅰ)图 1 中,$\angle BAD=60°$,$AB=1$,$AD=2$,

由余弦定理得 $BD^2=1+4-2\times1\times2\times\cos60°=3$, ………………………………… 1 分

$\therefore BD^2+AB^2=AD^2$,$\therefore \angle ABD=90°$,即 $AB\perp BD$,同理 $CD\perp BD$. ………………………… 2 分

图 2 中,在 $\triangle PAD$ 中,$AD=2$,$PD=1$,$PA=\sqrt{5}$,$\therefore PD^2+AD^2=PA^2$

$\therefore \angle PDA=90°$,即 $AD\perp PD$, ……………………………………………………… 3 分

又 $PD\perp BD$,$AD\cap BD=D$,$\therefore PD\perp$平面 ABD. …………………………………………… 4 分

$AB\subset$平面 ABD,$\therefore PD\perp AB$, …………………………………………………………… 5 分

又 $AB\perp BD$,$PD\cap BD=D$. $\therefore AB\perp$平面 PBD,$AB\subset$平面 PAB,

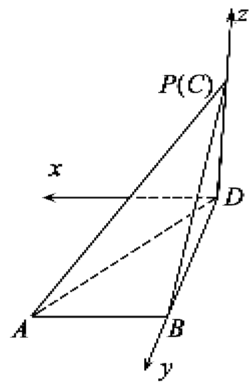
$\therefore$ 平面 $PAB\perp$平面 PBD. ……………………………………………………………… 6 分

(Ⅱ)如图,以 D 为坐标原点,DB,DP 所在直线分别为 y,z 轴,过点 D 在平面 ABD 内平行于 AB 的直线为 x 轴建立空间直角坐标系.

则 $D(0,0,0)$,$B(0,\sqrt{3},0)$$A(1,\sqrt{3},0)$,$P(0,0,1)$,$\overrightarrow{DA}=(1,\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{DP}=(0,0,1)$

设平面 PAD 的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DA}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0\end{cases}$得$\begin{cases}x+\sqrt{3}y=0\\ z=0\end{cases}$令 $y=1$,



得平面 PAD 的一个法向量为$\vec{n}=(-\sqrt{3},1,0)$ …………………… 8 分

同理可得平面 PAB 的一个法向量$\vec{m}=(0,1,\sqrt{3})$ ……………… 9 分

$\therefore |\cos<\vec{m},\vec{n}>|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{1}{2\times 2}=\dfrac{1}{4}$. …………………… 11 分

又二面角 $B-PA-D$ 的平面角为锐角,

所以,二面角 $B-PA-D$ 的余弦值为$\dfrac{1}{4}$. …………………… 12 分

21. 解:(Ⅰ)由题意得

$$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$$ 解得 $a^2=6,b^2=3$.

所以,椭圆 C 的方程是$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$. …………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)设直线 AP 的斜率为 k,由题意知,直线 BP 的斜率为 $-k$, ………………………… 5 分

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,直线 AP 的方程为 $y-1=k(x-2)$,即 $y=kx+1-2k$

联立方程组$\begin{cases}y=kx+1-2k\\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 消去 y 得

$(2k^2+1)x^2+4k(1-2k)x+8k^2-8k-4=0$, …………………………………………………… 6 分

因为 P,A 为直线 AP 与椭圆的交点,

所以 $2x_1=\dfrac{8k^2-8k-4}{2k^2+1}$,即 $x_1=\dfrac{4k^2-4k-2}{2k^2+1}$…………………………………………………… 8 分

把 k 换为 $-k$ 得,$x_2=\dfrac{4k^2+4k-2}{2k^2+1}$

所以 $x_2-x_1=\dfrac{8k}{2k^2+1}$, ………………………………………………………………………… 9 分

所以 $y_2-y_1=(-kx_2+1+2k)-(kx_1+1-2k)=k[4-(x_1+x_2)]=\dfrac{8k}{2k^2+1}$, ………… 11 分

所以直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=1$,故直线 AB 的斜率为定值. ……………………… 12 分

22. 解:(Ⅰ)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax=\dfrac{1-2ax^2}{x}$ ………………………… 1 分

①当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)>0$,$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. ……………………… 2 分

②当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$ 得 $0<x<\sqrt{\frac{1}{2a}}$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,\sqrt{\frac{1}{2a}})$ 上单调递增

由 $f'(x)<0$ 得 $x>\sqrt{\frac{1}{2a}}$，$\therefore f(x)$ 在 $(\sqrt{\frac{1}{2a}},+\infty)$ 上单调递减…………………… 4 分

综上所述：①当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$；

②当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\sqrt{\frac{1}{2a}})$，单调递减区间为 $(\sqrt{\frac{1}{2a}},+\infty)$ ……… 5 分

(Ⅱ) $g(x)=f(x)+\frac{3}{2}x^2-bx=\ln x+\frac{1}{2}x^2-bx\ (x>0)$

$g'(x)=\frac{1}{x}+x-b=\frac{x^2-bx+1}{x}$，$\because x_1,x_2$ 是函数 $g(x)$ 的两个极值点，

$\therefore x_1,x_2$ 是方程 $x^2-bx+1=0$ 的两根

由韦达定理可知 $\begin{cases}x_1+x_2=b\\x_1x_2=1\end{cases}$，………………………………………………………… 7 分

$\because x_1<x_2$，$\therefore 0<x_1<1$

又 $x_1+x_2=x_1+\frac{1}{x_1}=b\geqslant \mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}$，

且 $y=x+\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，可知 $0<x_1\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$，…………………………………… 9 分

所以 $g(x_1)-g(x_2)=\ln x_1+\frac{1}{2}{x_1}^2-bx_1-\ln x_2-\frac{1}{2}{x_2}^2+bx_2$

$$=\ln\frac{x_1}{x_2}+\frac{1}{2}(x_1-x_2)(x_1+x_2)-b(x_1-x_2)=\ln\frac{x_1}{x_2}-\frac{1}{2}(x_1-x_2)(x_1+x_2)$$

$$=\ln{x_1}^2-\frac{1}{2}{x_1}^2+\frac{1}{2{x_1}^2}$$ ……………………………………………… 10 分

设 $h(x)=\ln x^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2x^2}$，$x\in(0,\frac{1}{\mathrm{e}}]$

所以，$h'(x)=\frac{-(x^2-1)^2}{x^3}<0$，所以 $h(x)$ 单调递减.

故 $h(x)_{\min}=h(\frac{1}{\mathrm{e}})=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{1}{2\mathrm{e}^2}-2$

所以 $g(x_1)-g(x_2)$ 的最小值为 $\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{1}{2\mathrm{e}^2}-2$. ……………………………………………… 12 分