浙江省新阵地教育联盟 2024 届第二次联考

数学参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	C	C	B	B	D	C	CD	BD	ACD	BCD

三、填空题

13．56π　　　　14．252　　　　15．$\dfrac{2}{3}$　　　　16．2

四、解答题

17.（1）证：找 AC 中点 O，连接 BO,SO.

$\because BA=BC$

$\therefore BO\perp AC$..............(1)..1分

在$Rt\triangle SAB$与$Rt\triangle SBC$中

$BA=BC,SB=SB$

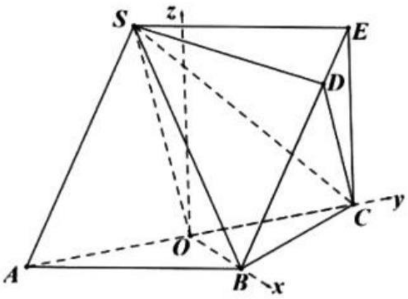
$\therefore Rt\triangle SAB\doteq Rt\triangle SCB$

$\therefore SA=SC$..2分

$\therefore SO\perp AC$............(2)

由（1）（2）知：$AC\perp$ 平面SOB.......................3分

$\therefore AC\perp SB$...4分



（2）过点O作$OZ\perp$平面ABC.

由（1）知，建立如图空间坐标系o-xyz,如图：

则$A(0,-\sqrt{2},0),B(\sqrt{2},0,0),C(0,\sqrt{2},0)$...5分

$\because SA=2\sqrt{2},SB=2\sqrt{3},SC=2\sqrt{2}$

$\therefore$ 设$S(x,y,z)$,得：

$$\begin{cases}x^2+(y+\sqrt{2})^2+z^2=8\\(x-\sqrt{2})^2+y++z^2=12\\x^2+(y-\sqrt{2})^2+z^2=8\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x=-\sqrt{2}\\y=0\\z=2\end{cases}$$

$\therefore S(-\sqrt{2},0,2)$ 6分

$\therefore \overrightarrow{AS}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},2),\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0),\overrightarrow{BS}=(-2\sqrt{2},0,2)$

设$\vec{m}\perp$平面BCS,且$\vec{m}=(a,b,c)$

$$\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\vec{m}=0\\\overrightarrow{BS}\cdot\vec{m}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a,b,c)(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)=0\\(a,b,c)(-2\sqrt{2},0,2)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-b=0\\\sqrt{2}a-c=0\end{cases}\Rightarrow\text{取}\vec{m}=(1,1,\sqrt{2})$$ 7分

同理：设$\vec{n}\perp$平面BCD,且$\vec{n}=$（d, e, f）

$$\begin{cases}(d,e,f)(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)=0\\(d,e,f)(-\sqrt{2},\sqrt{2},2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d-e=0\\d-e-\sqrt{2}f=0\end{cases}$$

$\Rightarrow$取$\vec{n}=$（1，1,0）...8分

$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{mn}}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$....................................9分

$\therefore$二面角$S-BC-D$夹角为45^0.......................10分

18. 解

$\because \dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{1}{\tan C}=\dfrac{2}{\tan A}$

$\therefore \dfrac{\cos B}{\sin B}+\dfrac{\cos C}{\sin C}=\dfrac{2\cos A}{\sin A}$

$\therefore \dfrac{\cos B\sin C+\cos C\sin B}{\sin B\sin C}=\dfrac{2\cos A}{\sin A}$

$\therefore \dfrac{\sin A}{\sin B\sin C}=\dfrac{2\cos A}{\sin A}$

即$\sin^2 A=2\cos A\sin B\sin C$..3分

$\therefore a^2=2bc\cos A$

$\because A=\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore a^2=bc$..4分

又$\because a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$\therefore a^2=b^2+c^2-bc=bc$

$\therefore b=c$..5分

$\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$..6分

(2)$\because \sin^2 A=2\cos A\sin B\sin C$

$\therefore a^2=2bc\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\therefore b^2+c^2=2a^2$...7分

又$\because \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ 8分

$\therefore \overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}(b^2+c^2+2bc\cdot\cos A)$..9分

$\therefore \overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}(b^2+c^2+2bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})$

$=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)$..11分

$=\frac{3}{4}a^2=\frac{3}{4}$

$\therefore AD=\frac{\sqrt{3}}{2}$..12分

19．解：

（1）$f'(x)=\frac{a}{x}-1=\frac{a-x}{x}$，$x>0$ ....1 分

当$a\le 0$时，$f'(x)\le 0$，则$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减........................2 分

当$a>0$时，令$f'(x)=\frac{a-x}{x}=0$，解得$x=a$.

当$0<x<a$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$在$(0,a)$上单调递增......................3 分

当$x>a$时，$f'(x)<0$，则$f(x)$在$(a,+\infty)$上单调递减.......................4 分

综上：当$a\le 0$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减；当$a>0$时，$f(x)$在$(0,a)$上单调递增，$f(x)$在$(a,+\infty)$上单调递减..5 分

（2）由（1）得：$f(x)_{\max}=f(a)=a(\ln a-a)-a$ ....6 分

要证：$f(x)<-3a+2$，即证：$a\ln a-a^2+2a-2<0(a>0)$ ....7 分

即证：$\ln a-a-\frac{2}{a}+2<0$ ....8 分

令$g(a)=\ln a-a-\frac{2}{a}+2(a>0)$，$g'(a)=\frac{(2-a)(1+a)}{a^2}$ ....9 分

当$0<a<2$时，$g'(a)>0$，则$g(a)$在$(0,2)$上单调递增；................10 分

当$a>2$时，$g'(a)<0$，则$g(a)$在$(2,+\infty)$上单调递减；..................11 分

所以，$g(a)_{\max}=g(2)=\ln 2-1<0$

从而命题得证..12 分

20．解：

（1）当n=1时，$a_1b_1=2$，$b_1=2$

$\therefore a_1=1$..1分

$\because a_1b_1+a_2b_2+\ldots\ldots+a_nb_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$

$\therefore a_1b_1+a_2b_2+\ldots\ldots+a_{n-1}b_{n-1}=(n-2)\cdot 2^n+2(n\ge 2)$

两式相减得：$a_nb_n=n\cdot 2^n(n\ge 2)$

设数列$\{a_n\}$的公差为d，数列$\{b_n\}$的公比为q. 则

$\begin{cases}(1+d).(2q)=8\\(1+2d)(2q^2)=24\end{cases}$解得$\begin{cases}d=1\\q=2\end{cases}$或$\begin{cases}d=-\dfrac{2}{3}\\q=6\end{cases}$......................................4分

当$\begin{cases}d=-\dfrac{2}{3}\\q=6\end{cases}$时，$a_4=1+3d=-1,a_4.b_4<0$不合题意，舍去..........5分

$\therefore a_n=n,\ b_n=2^n$..6分

(2) $\because S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$..7分

$c_n=\dfrac{4S_n\cdot t^{n-1}}{n(n+1)b_n}=(\dfrac{t}{2})^{n-1}(t\neq 0)$..8分

$\therefore \dfrac{c_mb_{n-m+1}}{c_{m-1}b_{n-m}}=\dfrac{t}{4}(2\le m<n,m\in N_+)$

$\therefore$数列$\{c_mb_{n-m+1}\}(1\le m<n,m\in N_+)$是

以$c_1b_n=2^n$为首项，以$\dfrac{t}{4}$为公比的等比数列..10分

$\therefore$原式$=\begin{cases}n\cdot 2^n\text{..................}t=4\\\dfrac{2^n\cdot[1-(\frac{t}{4})^n]}{1-\frac{t}{4}}\text{..........}t\neq 0,4\end{cases}$..12分

21．解：

（1）由题意知：$p_2=\dfrac{4}{5}.\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$ ....3 分

$(2)p_n=p_{n-1}\cdot\dfrac{1}{4}+(1-p_{n-1}).\dfrac{2}{3}$..5分

$=-\dfrac{5}{12}p_{n-1}+\dfrac{2}{3}(n=2,3....16)$

$\therefore p_n-\dfrac{8}{17}=-\dfrac{5}{12}(p_{n-1}-\dfrac{8}{17})$

又$\because p_1-\dfrac{8}{17}=\dfrac{28}{65}\neq 0$

$\therefore \dfrac{p_n-\frac{8}{17}}{p_{n-1}-\frac{8}{17}}=-\dfrac{5}{12}(n=2,3......16)$..5分

$\therefore$数列$\left\{p_n-\dfrac{8}{17}\right\}$是以$\dfrac{28}{65}$为首项，以$-\dfrac{5}{12}$为公比的等比数列

$\therefore p_n=\dfrac{8}{17}+\dfrac{28}{65}.(-\dfrac{5}{12})^{n-1}(n=1,2,3.......16)$..7分

(3)由题意知，只需$p_n > 1 - p_n$

即$p_n > \frac{1}{2}(n = 1, 2......16)$..8分

$\frac{8}{17} + \frac{28}{65}.(-\frac{5}{12})^{n-1} > \frac{1}{2}$

$(-\frac{5}{12})^{n-1} > \frac{65}{34 \times 28}(n = 1, 2......16)$...9分

显然n必为奇数，偶数不成立

当n=1, 3, 5. . . . . 15时，有

$(\frac{5}{12})^{n-1} > \frac{65}{34 \times 28}$即可. 10分

$\because (\frac{5}{12})^{n-1}$单调递减

$n = 1$，显然成立.

$n = 3, (\frac{5}{12})^2 = \frac{25}{144}$

$\frac{25}{144} - \frac{65}{34 \times 28} = \frac{5}{2 \times 4}(\frac{5}{18} - \frac{13}{17 \times 7})$

$\frac{5}{18} - \frac{13}{17 \times 7} = \frac{35 \times 17 - 18 \times 13}{18 \times 17 \times 7} > 0$

故n=3时成立

$n = 5, (\frac{5}{12})^4 = \frac{625}{144 \times 144}$与$\frac{65}{34 \times 28}$比较大小

$\frac{625}{144 \times 144} - \frac{65}{34 \times 28} = \frac{5}{2 \times 4}(\frac{125}{72 \times 36} - \frac{13}{17 \times 7})$

$< \frac{5}{2 \times 4}(\frac{130}{72 \times 36} - \frac{13}{17 \times 7})$

$< \frac{5 \times 13}{2 \times 4}(\frac{10}{72 \times 36} - \frac{1}{17 \times 7})$

$= \frac{5 \times 13}{2 \times 4}(\frac{70 \times 17 - 72 \times 36}{72 \times 36 \times 17 \times 7}) < 0$

$\therefore n = 5$时不成立. 11分

又$\because (\frac{5}{12})^{n-1}$单调递减

$\therefore n > 5$时不成立.

综上，只有2晚. 12分

22.（1）由已知得：$\dfrac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{\left|x-\frac{1}{2}\right|}=2$ ------------2 分

两边平分并化简得：$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 即为曲线 C 的方程. ------------4 分

（2）设点 $G(x_1,y_1)$，$H(x_2,y_2)$.

直线 $GH:y=k(x-t)$（$k>0$）与双曲线 C 的方程 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 联立，消去 y 得

$(3-k^2)x^2+2k^2tx-(3+k^2t^2)=0$.

由韦达定理：$x_1+x_2=\dfrac{-2k^2t}{3-k^2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{-(3+k^2t^2)}{3-k^2}$. ------------6 分

由条件，直线 AG 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+1}(x+1)$，直线 AH 的方程为 $y=\dfrac{y_2}{x_2+1}(x+1)$，于是可得

$y_M=\dfrac{y_1(t+1)}{x_1+1}$，$y_N=\dfrac{y_2(t+1)}{x_2+1}$ ------------8 分

因为 A,O,M,N 四点共圆，所以，$\angle ANO=\angle AMO,\angle MNO=\angle MAO$，

所以 $\angle ANO+\angle MNO=\angle AMO+\angle MAO$

所以 $\angle ANP=\angle MOP$，于是 $\tan\angle ANP=\tan\angle MOP$.

即 $\dfrac{t+1}{y_N}=\dfrac{y_M}{t}$，化简得 $\dfrac{y_1y_2}{(x_1+1)(x_2+1)}=\dfrac{t}{t+1}$ ------------10 分

又 $y_1=k(x_1-t)$，$y_2=k(x_2-t)$，代入整理得：$\dfrac{k^2(x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2)}{x_1x_2+(x_1+x_2)+1}=\dfrac{t}{t+1}$

将韦达定理代入化简得：$t=\dfrac{3}{4}$. ------------12 分