

江苏南师大附中 2022—2023 学年高三一模适应性考试 数 学

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40.0 分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 若集合 $M = \{x | \log_2 x < 4\}$, $N = \{x | 2x \geq 1\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{x | 0 \leq x < 8\}$ B. $\{x | \frac{1}{2} \leq x < 8\}$ C. $\{x | 2 \leq x < 16\}$ D. $\{x | \frac{1}{2} \leq x < 16\}$

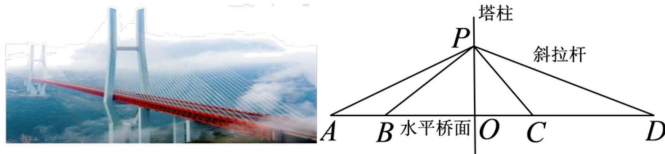
2. 已知 $m \in R$, 且 $\frac{m+3i}{1+i} = 1+2i$, 其中 i 是虚数单位, 则 $|m-2i|$ 等于 ()

- A. 5 B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{2}$ D. 1

3. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_3 = 15, a_3 = 5$, 则公比 q 的值为 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. 1 C. $-\frac{1}{2}$ 或 1 D. $\frac{1}{2}$ 或 1

4. 下如图是世界最高桥——贵州北盘江斜拉桥。下如图是根据下如图作的简易侧视图（为便于计算，侧视图与实物有区别）。在侧视图中，斜拉杆 PA, PB, PC, PD 的一端 P 在垂直于水平面的塔柱上，另一端 A, B, C, D 与塔柱上的点 O 都在桥面同一侧的水平直线上。已知 $AB = 8m, BO = 16m, PO = 12m, \overline{PB} \cdot \overline{PC} = 0$ 。根据物理学知识得 $\frac{1}{2}(\overline{PA} + \overline{PB}) + \frac{1}{2}(\overline{PC} + \overline{PD}) = 2\overline{PO}$, 则 $CD =$ ()



- A. 28m B. 20m C. 31m D. 22m

5. 已知实数 $a > 0, b < 0$, 则 $\frac{\sqrt{3}b-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 的取值范围是 ()

- A. $[-2, -1]$ B. $(-2, -1)$ C. $(-2, -1]$ D. $[-2, -1]$

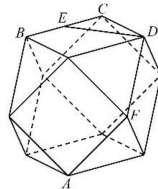
6. 函数 $f(x)$ 的定义域为 R , 且 $f(2x+1)$ 为偶函数, $f(x) = f(x+1) - f(x+2)$, 若 $f(1) = 2$, 则 $f(18) =$ ()

- A. 1 B. 2 C. -1 D. -2

7. 已知 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 11$, $f(x)$ 的一条切线 $g(x) = kx + b$ 与 $f(x)$ 有且仅有一个交点, 则 ()

- A. $k = -3, b = 3$ B. $k = -3, b = -3$ C. $k = 3, b = 3$ D. $k = 3, b = -3$

8. 有很多立体图形都体现了数学的对称美, 其中半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体, 半正多面体因其最早由阿基米德研究发现, 故也被称作阿基米德体。如图, 这是一个棱数为 24, 棱长为 $\sqrt{2}$ 的半正多面体, 它的所有顶点都在同一个正方体的表面上, 可以看成是由一个正方体截去八个一样的四面体所得。若点 E 为线段 BC 上的动点, 则直线 DE 与直线 AF 所成角的余弦值的取值范围为 ()



- A. $[\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ B. $[\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$

C. $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

D. $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

二、多选题（本大题共 4 小题，共 20.0 分。在每小题有多项符合题目要求）

9. 已知事件 A, B 满足 $P(A)=0.5, P(B)=0.2$, 则 ()

A. 若 $B \subseteq A$, 则 $P(AB)=0.5$

B. 若 A 与 B 互斥, 则 $P(A+B)=0.7$

C. 若 A 与 B 相互独立, 则 $P(A\bar{B})=0.9$

D. 若 $P(B|A)=0.2$, 则 A 与 B 相互独立

10. 已知随机变量 X 的概率密度函数为 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}$ ($a > 0, b > 0$), 且 $\varphi(x)$ 的极大值点为

$x=2a$, 记 $f(k) = P(X < k), g(k) = P(X > k+a)$, 则 ()

A. $X \sim N(b, a)$

B. $X \sim N(2a, a^2)$

C. $f(a) = g(2a)$

D. $f(2a) + g(2a) = f(a) + g(a)$

11. 下列说法中, 其中正确的是 ()

A. 命题: “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^3 - x - 1 = 0$ ” 的否定是 “ $\forall x < 0, x^3 - x - 1 < 0$ ”

B. 化简 $\frac{\cos^2 5^\circ - \sin^2 5^\circ}{\sin 40^\circ \sin 50^\circ}$ 的结果为 2

C. $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + 2^3 C_n^3 + \dots + 2^n C_n^n = 3^n$

D. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA=AB=PB=AC=2\sqrt{3}, CP=2\sqrt{6}$, 点 D 是侧棱 PB 的中点, 且 $CD=\sqrt{21}$, 则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球 O 的体积为 $\frac{28\sqrt{7}\pi}{3}$.

12. 同学们, 你们是否注意到, 自然下垂的铁链; 空旷的田野上, 两根电线杆之间的电线; 峡谷的上空, 横跨深涧的观光索道的钢索. 这些现象中都有相似的曲线形态. 事实上, 这些曲线在数学上常常被称为悬链线. 悬链线的相关理论在工程、航海、光学等方面有广泛的应用. 在恰当的坐标系中, 这类函数的表达式可以为 $f(x) = ae^x + be^{-x}$ (其中 a, b 是非零常数, 无理数 $e = 2.71828\dots$), 对于函数 $f(x)$ 以下结论正确的是 ()

A. $a=b$ 是函数 $f(x)$ 为偶函数的充分不必要条件;

B. $a+b=0$ 是函数 $f(x)$ 为奇函数的充要条件;

C. 如果 $ab < 0$, 那么 $f(x)$ 为单调函数;

D. 如果 $ab > 0$, 那么函数 $f(x)$ 存在极值点.

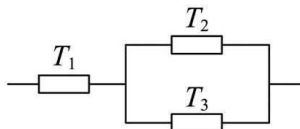
三、填空题 全科试题免费下载公众号《高中僧课堂》(本大题共 4 小题, 共 20.0 分)

13. 过点 $P(3, -2)$ 且与圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ 相切的直线方程为 _____

14. 数论领域的四平方和定理最早由欧拉提出, 后被拉格朗日等数学家证明. 四平方和定理的内容是任意正整数都可以表示为不超过四个自然数的平方和, 例如正整数 $12 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2$. 设 $25 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, 其中 a, b, c, d 均为自然数, 则满足条件的有序数组 (a, b, c, d) 的个数是 _____.

15. 已知直线 $l: y = -1$, 抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点为 F , 过点 F 的直线交抛物线 C 于 A, B 两点, 点 B 关于 y 轴对称的点为 P . 若过点 A, B 的圆与直线 l 相切, 且与直线 PB 交于点 Q , 则当 $\overline{QB} = 3\overline{PQ}$ 时, 直线 AB 的斜率为 _____.

16. 三个元件 a, b, c 独立正常工作的概率分别是 P_1, P_2, P_3 ($0 < P_1 < P_2 < P_3 < 1$), 把它们接入如图所示电路的三个接线盒 T_1, T_2, T_3 中 (一盒接一个元件), 各种连接方法中, 此电路正常工作的最大概率是 _____.



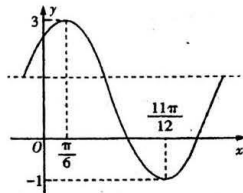
四、解答题(本大题共6小题,共70.0分。解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤)

17. (本小题10.0分)

已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) + B$ ($A > 0, B > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 在一个周期内的图象如图所示.

(1) 求函数 $f(x)$ 的表达式;

(2) 把 $y = f(x)$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{2}{3}$ (纵坐标不变), 再把得到的图象向下平移一个单位, 再向左平移 $\frac{\pi}{36}$ 个单位, 得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 若 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 求函数 $y = g(x)$ 的值域.



18. (本小题12.0分)

已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = -2b_1 = 4$, 且 $\{a_n\}$ 是公差为1的等差数列, $\{a_n + b_n\}$ 是公比为2的等比数列.

(1) 求 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (本小题12.0分)

某百科知识竞答比赛的半决赛阶段, 每两人一组进行PK, 胜者晋级决赛, 败者终止比赛. 比赛最多有三局, 第一局限时答题, 第二局快问快答, 第三局抢答. 比赛双方首先各自进行一局限时答题, 依据答对题目数量, 答对多者获胜, 比赛结束, 答对数量相等视为平局, 则需进入快问快答局; 若快问快答平局, 则需进入抢答局, 两人进行抢答, 抢答没有平局. 已知甲、乙两位选手在半决赛相遇, 且在与乙选手的比赛中, 甲限时答题局获胜与平局的概率分别为 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 快问快答局获胜与平局的概率分别为 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, 抢答局获胜的概率为 $\frac{1}{3}$, 且各局比赛相互独立.

(1) 求甲至多经过两局比赛晋级决赛的概率;

(2) 知乙最后晋级决赛, 但不知甲、乙两人经过几局比赛, 求乙恰好经过三局比赛才晋级决赛的概率.

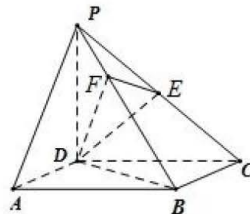
20. (本小题12.0分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧棱 $PD \perp$ 矩形 $ABCD$, 且 $PD = CD$, 过棱 PC 的中点 E , 作 $EF \perp PB$ 交 PB 于点 F , 连接 DE, DF, BD, BE .

(I) 证明: $PB \perp DF$.

(II) 若 $PD = 1$, 平面 DEF 与平面 $ABCD$ 所成二面角的大小为

$\frac{\pi}{3}$, 求 V_{P-DEF} 的值.



21. (本小题12.0分)

已知 $F_1(-\sqrt{6}, 0)$, $F_2(\sqrt{6}, 0)$ 为双曲线 C 的焦点, 点 $P(2, -1)$ 在 C 上.

(1) 求 C 的方程;

(2) 点 A, B 在 C 上, 直线 PA, PB 与 y 轴分别相交于 M, N 两点, 点 Q 在直线 AB 上, 若 $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$, $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, 是否存在定点 T , 使得 $|QT|$ 为定值? 若有, 请求出该定点及定值; 若没有, 请说明理由.

22. (本小题12.0分)

已知函数 $f(x) = x + k \sin x$, 其中 $0 < k \leq 1$.

(1) 设函数 $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - f(x)$, 证明:

① $g(x)$ 有且仅有一个极小值点;

② 记 x_0 是 $g(x)$ 的唯一极小值点, 则 $g(x_0) < -\frac{1}{2}x_0$;

(2) 若 $k=1$, 直线 l 与曲线 $y=f(x)$ 相切, 且有无穷多个切点, 求所有符合上述条件的直线 l 的方程.

关于我们



自主选拔在线
微信号: zizzs

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

