

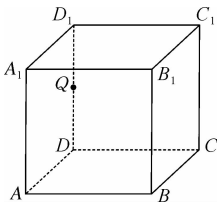
高一数学

考生注意:

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 答题前,考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本卷命题范围:湘教版必修第二册第 1 章~第 4 章。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z = m(m-1) + mi$ 为纯虚数,则实数 m 的值为
A. 1 B. -1 C. 1 或 -1 D. -1 或 0
2. 下列结论错误的是
A. 圆柱的每个轴截面都是全等矩形
B. 长方体是直四棱柱,直四棱柱不一定是长方体
C. 用一个平面截圆锥,必得到一个圆锥和一个圆台
D. 四棱柱、四棱台、五棱锥都是六面体
3. 已知向量 $\mathbf{a} = (0, 1)$, $\mathbf{b} = (2-m, 2+m)$,若 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$,则 $2\mathbf{a} - \mathbf{b} =$
A. $(2, -4)$ B. $(-4, 2)$ C. $(2, 4)$ D. $(-2, -4)$
4. 下列能得出直线 m 与平面 α 平行的是
A. 直线 m 与平面 α 内的所有直线平行
B. 直线 m 与平面 α 内的无数条直线平行
C. 直线 m 与平面 α 没有公共点
D. 直线 m 与平面 α 内的一条直线平行
5. 若 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\sin(\alpha - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3}$,则 $\cos \alpha$ 的值为
A. $\frac{2\sqrt{6}+1}{6}$ B. $\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$
C. $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$
6. 如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, DD_1 的中点为 Q ,过 A, Q, B_1 三点的截面是
A. 三角形 B. 矩形
C. 菱形 D. 梯形



7. 某车间生产一种圆锥型高脚杯, 杯口直径为 $2R$, 高为 R , 将该高脚杯装满水(水面与杯口齐平), 现将一直径为 $2r$ 的小铁球缓慢放入杯中, 待小铁球完全沉入(整个铁球在水面以下)水中并静止后, 从杯口溢出水的体积为高脚杯容积的 $\frac{1}{8}$, 则 $\frac{r}{R} =$

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{\sqrt[3]{32}}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, 且 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}$, M 是 BC 的中点, O 是线段 AM 的中点, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ 的值为

- A. 0 B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. 2

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知 a, b, c 是 3 条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 则下列说法不正确的有

- A. 若 $a \parallel b, b \parallel c$, 则 $a \parallel c$
 B. 若 a 与 b 垂直, b 与 c 垂直, 则 a 与 c 垂直
 C. 若 $a \subset \alpha, b \subset \beta, \alpha \parallel \beta$, 则 a 与 b 一定是异面直线
 D. 若 a, b 与 α 所成的角均为 $\frac{\pi}{2}$, 则 $a \parallel b$

10. 下列说法正确的是

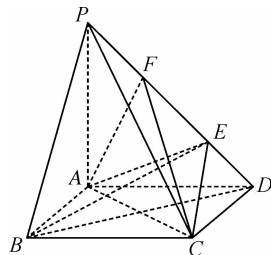
- A. 复数 $z = 3i - 2i^2$ 的虚部为 -2
 B. 方程 $x^2 - 4x + 5 = 0$ 的复数根为 $2 \pm i$
 C. 若 $z = (1 + i)^2$, 则复平面内 $\bar{z}$ 对应的点位于第二象限
 D. 复平面内, 实轴上的点对应的复数是实数

11. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a - b = 2b \cos C$, 则

- A. $C = 2B$ B. B 的取值范围是 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$
 C. $B = 2C$ D. $\frac{c}{b}$ 的取值范围是 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

12. 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $PA = AB = 1$, E, F 为线段 PD 上的点(不包括端点), 则

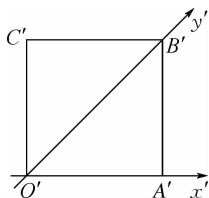
- A. $AC \perp EF$
 B. $PB \parallel$ 平面 AEC
 C. 二面角 $E-BD-C$ 的大小为定值
 D. $AE + CE$ 的最小值为 $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$



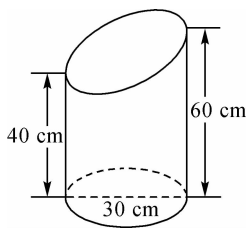
三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 设复数 z 满足 $zi+1=z$, 则 $\bar{z}=\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 如图,正方形 $O'A'B'C'$ 的边长为 1,它是水平放置的一个平面图形的直观图,则原图形较长的对角线的长度为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



第 14 题图



第 15 题图

15. 如图所示的斜截圆柱是用一个平面从圆柱上截取而来,其侧面可看成圆柱侧面的一部分,已知圆柱底面的半径为 15 cm,母线长最短 40 cm,最长 60 cm,则该斜截圆柱的侧面积为 $\underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$.

16. 已知 a, b, c 分别为锐角 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边,且 $b\sin C + a\sin A = b\sin B + c\sin C$, 则 $\frac{b}{c}$ 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知复数 $z_1 = a + 2 + (a-1)i, z_2 = 2 + (3a+1)i, a \in \mathbf{R}$.

(1) 若复数 $z_1 - z_2$ 在复平面内的对应点落在第二象限,求实数 a 的取值范围;

(2) 若虚数 z_1 是方程 $x^2 - 8x + m = 0$ 的一个根,求实数 m 的值.

18. (本小题满分 12 分)

已知 $|a| = |b| = 1, |a+b| = \sqrt{3}$.

(1) 求 $|a-b|$;

(2) 求证: $(a+b) \perp (a-b)$.

19. (本小题满分 12 分)

已知 $\cos 2x = \frac{4}{5}, \tan y = -\frac{1}{7}$, 其中 $0 < x < \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6} < y < \pi$.

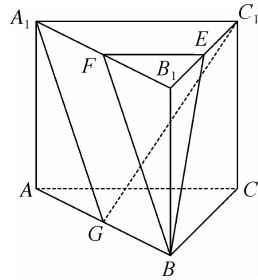
(1) 求 $\sin(x-y)$ 的值;

(2) 求 $2x-y$ 的值.

20. (本小题满分 12 分)

如图,正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的所有棱长都等于 2, E, F, G 分别为 B_1C_1, A_1B_1, AB 的中点.

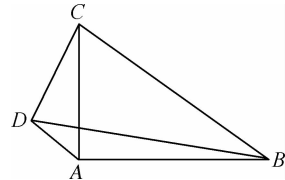
- (1) 求证: 平面 $A_1C_1G \parallel$ 平面 BEF ;
- (2) 求 C_1G 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值.



21. (本小题满分 12 分)

如图,在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB = 2\sqrt{3}$, $\angle ADC = \angle CAB = 90^\circ$, 设 $\angle DAC = \theta$.

- (1) 若 $\theta = 60^\circ$, $AB = 2CD$, 求 BD 的长度;
- (2) 若 $\angle ADB = \angle ABC = 30^\circ$, 求 $\tan \theta$.



22. (本小题满分 12 分)

如图,四棱锥 $P - ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $\triangle ABD$ 为等边三角形, $BC = CD = 1$, $\angle ABC = 90^\circ$, M 是 PB 上一点, 且 $PB = 3MB$, N 是 PC 的中点.

- (1) 求证: $PC \perp BD$;
- (2) 若二面角 $P - BC - A$ 的大小为 45° , 求三棱锥 $C - AMN$ 的体积.

