2017 年全国高中数学联赛（福建省赛区）预赛
暨 2017 年福建省高中数学竞赛试卷参考答案

（考试时间：2017 年 5 月 21 日上午 9：00—11：30，满分 160 分）

一、填空题（共 10 小题，每小题 6 分，满分 60 分。请直接将答案写在题中的横线上）

1．已知集合 $A=\{\,x \mid \log_2(x-1)<1\,\}$，$B=\{\,x \mid |\,x-a\,|<2\,\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，则实数 a 的取值范围为____________。

【答案】 $(-1,5)$

【解答】由 $\log_2(x-1)<1$，得 $0<x-1<2$，$1<x<3$，$A=(1,3)$。

由 $|\,x-a\,|<2$，得 $-2<x-a<2$，$a-2<x<a+2$，$B=(a-2,a+2)$。

若 $A\cap B=\varnothing$，则 $a+2\leq 1$ 或 $a-2\geq 3$，$a\leq -1$ 或 $a\geq 5$。

∴ $A\cap B\neq\varnothing$ 时，a 的取值范围为 $(-1,5)$。

2．已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且函数 $y=f(x+1)$ 为偶函数，当 $-1\leq x\leq 0$ 时，$f(x)=x^3$，则 $f(\frac{9}{2})=$____________。

【答案】 $\frac{1}{8}$

【解答】由函数 $y=f(x+1)$ 为偶函数，知 $f(-x+1)=f(x+1)$。

又 $f(x)$ 为奇函数，

∴ $f(x+2)=f(-x)=-f(x)$，$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$。

∴ $f(\frac{9}{2})=f(\frac{1}{2})=-f(-\frac{1}{2})=-(-\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$。

3．已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $a_1a_{2017}=1$，若 $f(x)=\frac{2}{1+x^2}$，则 $f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+\cdots+f(a_{2017})=$____________。

【答案】 2017

【解答】由 $f(x)=\frac{2}{1+x^2}$ 知，$f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{2}{1+x^2}+\frac{2}{1+(\frac{1}{x})^2}=\frac{2}{1+x^2}+\frac{2x^2}{x^2+1}=2$。

∵ $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $a_1a_{2017}=1$，

∴ $a_1a_{2017}=a_2a_{2016}=a_3a_{2015}=\cdots=a_{2017}a_1=1$。

∴ $f(a_1)+f(a_{2017})=f(a_2)+f(a_{2016})=f(a_3)+f(a_{2015})=\cdots=f(a_{2017})+f(a_1)=2$。

∴ $2\left[f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+\cdots+f(a_{2017})\right]$

$=\left[f(a_1)+f(a_{2017})\right]+\left[f(a_2)+f(a_{2016})\right]+\left[f(a_3)+f(a_{2015})\right]+\cdots+\left[f(a_{2017})+f(a_1)\right]$

$=2\times 2017$。

∴ $f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+\cdots+f(a_{2017})=2017$。

4．将 8 个三好生名额分配给甲、乙、丙、丁 4 个班级，每班至少 1 个名额，则甲班恰好分到 2 个名额的概率为________________。

【答案】 $\frac{2}{7}$

【解答】将 8 个三好生名额分配给甲、乙、丙、丁 4 个班级，每班至少 1 个名额的不同分配方案有 $C_7^3=35$ 种。（用隔板法：将 8 个名额排成一排，在它们形成的 7 个空挡中插入 3 块隔板，则每种插入隔板的方式对应一种名额分配方式，反之亦然。）

其中，甲班恰好分到 2 个名额的分配方案有 $C_5^2=10$ 种。（相当于将 6 个名额分配个 3 个班级，每班至少 1 个名额。）

所以，所求的概率为 $\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$。

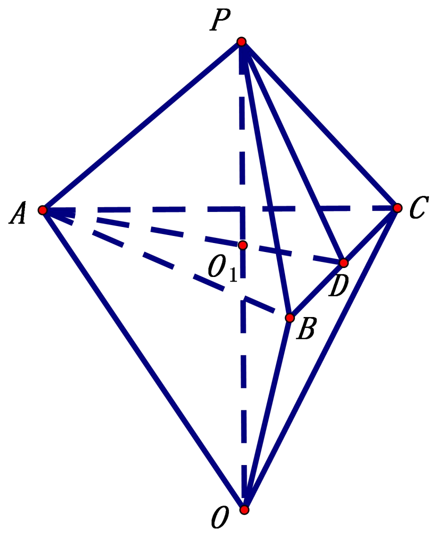
5．三棱锥 $P-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形，$PB=PC=\sqrt{5}$，且二面角 $P-BC-A$ 的大小为 $45°$，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为________________。

【答案】 25π

【解答】如图，取 BC 中点 D，连 AD，PD。

由 $\triangle ABC$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形，$PB=PC=\sqrt{5}$ 知，

$AD\perp BC$，$PD\perp BC$，$PD=\sqrt{2}$。



∴ $\angle PDA$ 为二面角 $P-BC-A$ 的平面角，$\angle PDA=45°$，$BC\perp$ 面 PAD，面 $PAD\perp$ 面 ABC。

作 $PO_1\perp AD$ 于 O_1，则 $PO_1\perp$ 面 ABC。

∴ $PO_1=O_1D=1$，$O_1A=2$，O_1 为 $\triangle ABC$ 的外心，三棱锥 $P-ABC$ 为正三棱锥。

设三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心为 O，半径为 R。

则 O 在直线 PO_1 上，且 $|PO_1-PO|^2+O_1A^2=OA^2$。

∴ $(R-1)^2+2^2=R^2$，$R=\frac{5}{2}$，三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=25\pi$。

6．已知 P 为双曲线 C：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 上一点，F_1、F_2 为双曲线 C 的左、右焦点，M、I 分别为 $\triangle PF_1F_2$ 的重心、内心，若 $MI\perp x$ 轴，则 $\triangle PF_1F_2$ 内切圆的半径为______________。

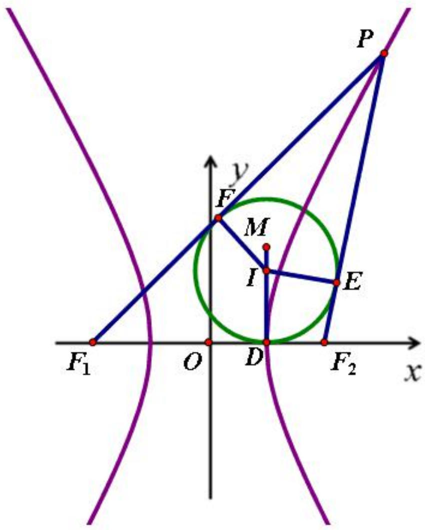
【答案】 $\sqrt{6}$

【解答】如图，不妨设点P在第一象限，D、E、F分别为$\odot I$与$\triangle PF_1F_2$三边相切的切点。

则由切线长定理以及双曲线定义，得

$$2a=|PF_1|-|PF_2|=(|PF|+|FF_1|)-(|PE|+|EF_2|)=|FF_1|-|EF_2|=|F_1D|-|F_2D|$$
$$=(x_D+c)-(c-x_D)=2x_D$$

∴ $x_D=a=2$，$x_M=x_I=x_D=2$。



设$P(x_0,y_0)$，由M为$\triangle PF_1F_2$重心，知$x_0=3x_M=6$，$y_0=4\sqrt{6}$。

∴ $|PF_1|=\sqrt{(6+4)^2+(4\sqrt{6}-0)^2}=14$，

$|PF_2|=\sqrt{(6-4)^2+(4\sqrt{6}-0)^2}=10$。

设$\triangle PF_1F_2$内切圆半径为r，则

$S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|)\times r=16r$。

另一方面，

$S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}\times|F_1F_2|\times y_0=\dfrac{1}{2}\times 8\times 4\sqrt{6}=16\sqrt{6}$。

∴ $16r=16\sqrt{6}$，$r=\sqrt{6}$。

7. 在$\triangle ABC$中，内角A、B、C所对的边分别是a、b、c，且$\sin C\cos\dfrac{A}{2}=(2-\cos C)\sin\dfrac{A}{2}$，$\cos A=\dfrac{3}{5}$，$a=4$，则$\triangle ABC$的面积为__________。

【答案】 6

【解答】由$\sin C\cos\dfrac{A}{2}=(2-\cos C)\sin\dfrac{A}{2}$，知$2\sin C\cos^2\dfrac{A}{2}=2(2-\cos C)\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$。

∴ $\sin C(1+\cos A)=(2-\cos C)\sin A$，$\sin C+\sin C\cos A=2\sin A-\cos C\sin A$。

∴ $\sin C+\sin C\cos A+\cos C\sin A=2\sin A$，$\sin C+\sin(C+A)=2\sin A$。

∴ $\sin C+\sin B=2\sin A$，即$c+b=2a$。

又$\cos A=\dfrac{3}{5}$，$a=4$。

∴ $4^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即$4^2=b^2+(8-b)^2-2b(8-b)\times\dfrac{3}{5}$，解得$b=3$或$b=5$。

∴ $\begin{cases} b=3 \\ c=5 \end{cases}$，或$\begin{cases} b=5 \\ c=3 \end{cases}$。

∴ $\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 3\times 5\times\dfrac{4}{5}=6$。

8．若关于x的方程$x^2+ax+b-3=0$（a，$b\in R$）在区间$[1,2]$上有实根，则$a^2+(b-4)^2$的最小值为________。

【答案】 2

【解答】由$x^2+ax+b-3=0$知，$b=-x^2-ax+3$。

∴ $a^2+(b-4)^2=a^2+(-x^2-ax-1)^2=a^2+(x^2+1)^2+2ax(x^2+1)+a^2x^2$

$=(x^2+1)(x^2+1+2ax+a^2)=(x^2+1)(x+a)^2+x^2+1$。

∵ $x\in[1,2]$，

∴ $a^2+(b-4)^2\geq x^2+1\geq 2$，当$x=1$，$a=-1$，$b=3$时，等号成立。

∴ $a^2+(b-4)^2$的最小值为2。

9．函数$f(x)=\sqrt{2x-7}+\sqrt{12-x}+\sqrt{44-x}$的最大值为________。

【答案】 11

【解答】由柯西不等式知，

$$(\sqrt{2x-7}+\sqrt{12-x}+\sqrt{44-x})^2=(\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{2x-7}{3}}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{12-x}{2}}+\sqrt{6}\cdot\sqrt{\frac{44-x}{6}})^2$$

$$\leq(3+2+6)(\frac{2x-7}{3}+\frac{12-x}{2}+\frac{44-x}{6})=11^2。$$

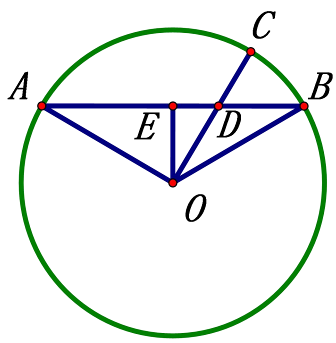
当且仅当$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{2x-7}{3}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{12-x}{2}}}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{\frac{44-x}{6}}}$，即$\dfrac{9}{2x-7}=\dfrac{4}{12-x}=\dfrac{36}{44-x}$，$x=8$时等号成立。

∴ $f(x)$的最大值为11。

10. A、B、C为圆O上不同的三点，且$\angle AOB=120^\circ$，点C在劣弧$\overset{\frown}{AB}$内（点C与A、B不重合），若$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$（$\lambda$，$\mu\in R$），则$\lambda+\mu$的取值范围为________。

【答案】 $(1,2]$

【解答】如图，连结OC交AB于点D。



设$\overrightarrow{OD}=m\overrightarrow{OC}$，则由$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，得$\overrightarrow{OD}=m\lambda\overrightarrow{OA}+m\mu\overrightarrow{OB}$。

∵ A、D、B三点共线，

∴ $m\lambda+m\mu=1$，$\lambda+\mu=\dfrac{1}{m}$。

不妨设圆的半径为 1，作 $OE \perp AB$ 于 E，由 $\angle AOB = 120^\circ$，知 $OE = \frac{1}{2}$。

∵ $OD \geq OE = \frac{1}{2}$，且点 C 在劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 内（点 C 与 A、B 不重合），

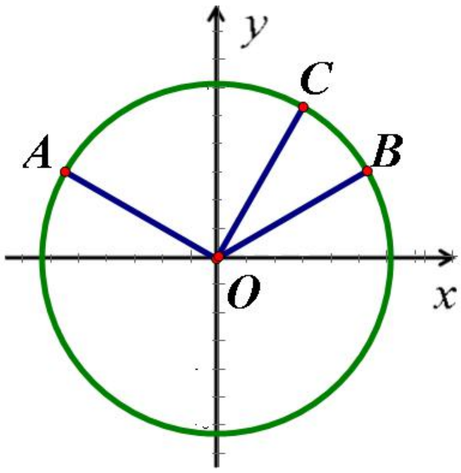
∴ $\frac{1}{2} \leq m < 1$。于是，$1 < \lambda + \mu \leq 2$。

∴ $\lambda + \mu$ 的取值范围为 $(1, 2]$。

另解：如图，以 O 为原点，线段 AB 的垂直平分线所在直线为 y 轴建立直角坐标系。

不妨设圆 O 半径为 2，则由 $\angle AOB = 120^\circ$，知 $A(-\sqrt{3}, 1)$，$B(\sqrt{3}, 1)$。

设 $C(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$。



则由 $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$，得

$(2\cos\alpha, 2\sin\alpha) = \lambda(-\sqrt{3}, 1) + \mu(\sqrt{3}, 1)$。

∴ $\lambda + \mu = 2\sin\alpha$。

∵ 点 C 在劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 内（点 C 与 A、B 不重合），

∴ $30^\circ < \alpha < 150^\circ$。

∴ $\frac{1}{2} < \sin\alpha \leq 1$，$\lambda + \mu = 2\sin\alpha \in (1, 2]$。

∴ $\lambda + \mu$ 的取值范围为 $(1, 2]$。

二、解答题（共 5 小题，每小题 20 分，满分 100 分。要求写出解题过程）

11．若数列$\{a_n\}$中的相邻两项a_n、a_{n+1}是关于x的方程$x^2-nx+c_n=0$（$n=1$，2，3，⋯）的两个实根，且$a_1=1$。

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=c_{2n-1}$，求数列$\{b_n\}$的通项公式及$\{b_n\}$的前n项的和T_n。

（必要时，可以利用：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$）

【解答】（1）依题意，由韦达定理，得$a_n+a_{n+1}=n$，$c_n=a_na_{n+1}$。

∴ $(a_{n+1}+a_{n+2})-(a_n+a_{n+1})=(n+1)-n=1$，即$a_{n+2}-a_n=1$。 ……………… **5 分**

∴ a_1，a_3，a_5，⋯；和a_2，a_4，a_6，⋯，都是公差为 1 的等差数列。

又$a_1=1$，$a_2=1-a_1=0$。

∴ 对$\forall k\in N^*$，$a_{2k-1}=k$，$a_{2k}=k-1$。

即$a_n=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2}，& n\text{为奇数}\\ \dfrac{n-2}{2}，& n\text{为偶数}\end{cases}$。 ………………………… **10 分**

（2）由（1）知，$b_n=c_{2n-1}=a_{2n-1}\cdot a_{2n}=\dfrac{2n-1+1}{2}\cdot\dfrac{2n-2}{2}=n(n-1)=n^2-n$。

………………………………… **15 分**

∴ $T_n=(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-(1+2+3+\cdots+n)=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\dfrac{n(n+1)}{2}$

$=\dfrac{n(n-1)(n+1)}{3}$。

………………………………… **20 分**

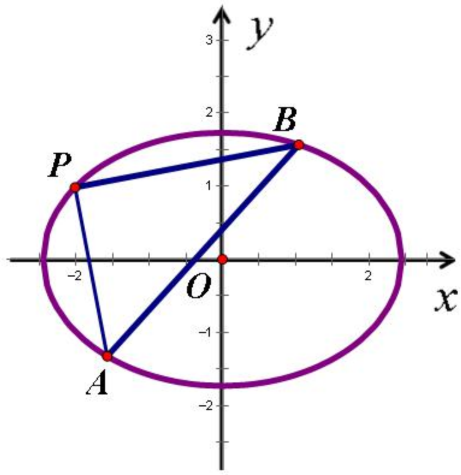
12．已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）过点$P(-2,1)$，且离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$。过点$P$作两条互相垂直的直线分别交椭圆于$A$、$B$两点（$A$、$B$与点$P$不重合）。求证：直线$AB$过定点，并求该定点的坐标。

【解答】依题意，有$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，且$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

解得$a^2=6$，$b^2=3$。

∴ 椭圆C的方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$。 ……………………………… **5 分**

易知直线AB斜率存在，设AB方程为$y=kx+m$。



由$\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，得

$(2k^2+1)x^2+4mkx+2m^2-6=0$ ……… ①

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则$x_1+x_2=-\frac{4mk}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-6}{2k^2+1}$。

……………………………… **10 分**

由$PA\perp PB$知，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$。

∴ $(x_1+2)(x_2+2)+(y_1-1)(y_2-1)=(x_1+2)(x_2+2)+(kx_1+m-1)(kx_2+m-1)=0$，

即 $(k^2+1)x_1x_2+(km-k+2)(x_1+x_2)+m^2-2m+5=0$。

∴ $(k^2+1)\times\frac{2m^2-6}{2k^2+1}+(km-k+2)\times(-\frac{4mk}{2k^2+1})+m^2-2m+5=0$。

∴ $3m^2-8mk+4k^2-2m-1=0$。 ……………………………… **15 分**

∴ $(3m-2k+1)(m-2k-1)=0$。

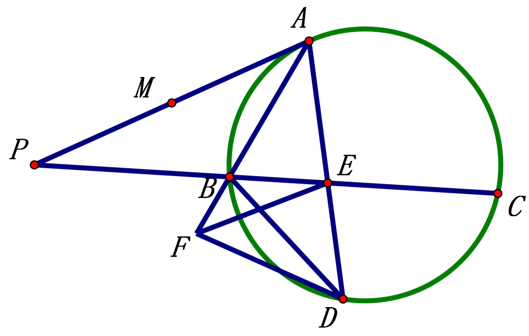
由直线AB不过点$P(-2,1)$，知$m-2k-1\neq 0$。

∴ $3m-2k+1=0$，$m=\frac{2}{3}k-\frac{1}{3}$，直线$AB$方程化为$y=kx+\frac{2}{3}k-\frac{1}{3}$。

∴ 直线AB过定点$D(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$。 ……………………………… **20 分**

13．如图，PA、PBC 分别是圆 O 的切线和割线，其中 A 为切点，M 为切线 PA 的中点，弦 AD、BC 相交于点 E，弦 AB 延长线上的点 F，满足 $\angle FBD=\angle FED$。

求证：P、F、D 三点共线的充分必要条件是 M、B、D 三点共线。



（第 13 题）

【解答一】 由 PA 为圆 O 的切线知，$\angle PAD+\angle ABD=180^\circ$。

又 $\angle FBD+\angle ABD=180^\circ$，

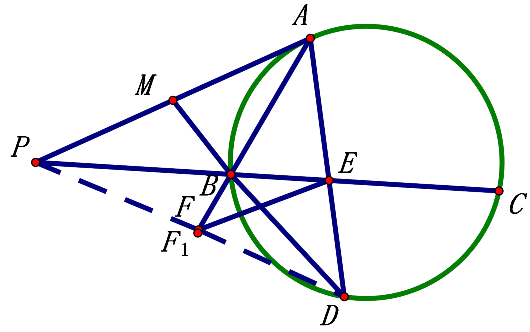
∴ $\angle PAD=\angle FBD=\angle FED$。

∴ $EF/\!/AP$。 ······················ **5 分**

（1）若 M、B、D 三点共线。

设直线 AB，DP 交于点 F_1。

则由塞瓦定理知，$\dfrac{AM}{MP}\cdot\dfrac{PF_1}{F_1D}\cdot\dfrac{DE}{EA}=1$。



································ **10 分**

∵ $AM=MP$，

∴ $\dfrac{PF_1}{F_1D}=\dfrac{AE}{ED}$，$EF_1/\!/AP$。

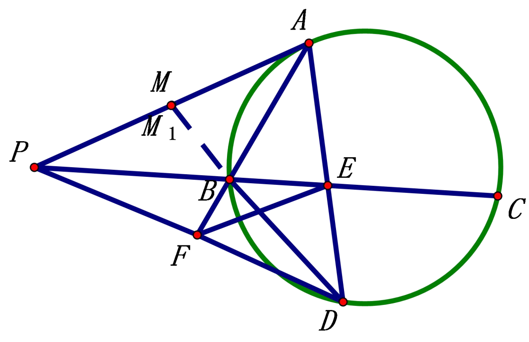
又点 F、F_1 均在直线 AB 上，因此 F、F_1 重合。

∴ P、F、D 三点共线。 ···································· **15 分**

（2）若 P、F、D 三点共线。

设直线 DB、AP 相交于点 M_1。

则由塞瓦定理知，$\dfrac{AM_1}{M_1P}\cdot\dfrac{PF}{FD}\cdot\dfrac{DE}{EA}=1$。



∵ $EF/\!/AP$，$\dfrac{PF}{FD}=\dfrac{AE}{ED}$，

∴ $\dfrac{AM_1}{M_1P}=1$，$AM_1=M_1P$，M_1 为 PA 的中点

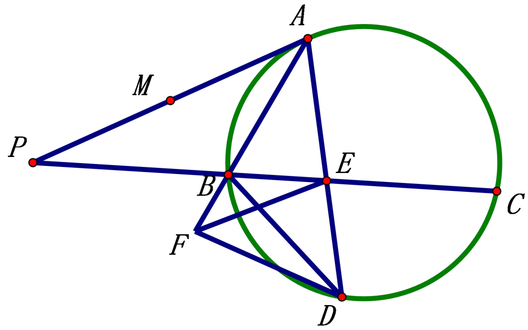
M、M_1 重合。

∴ M、B、D 三点共线。

由（1）、（2）可得，P、F、D 三点共线的充分必要条件是 M、B、D 三点共线。

··· **20 分**

【解答二】 由$\angle FBD=\angle FED$知，B、F、D、E四点共圆。



∴　$\angle AFE=\angle BDE$。

由PA为圆O的切线知，$\angle BDE=\angle PAF$。

∴　$\angle AFE=\angle BDE=\angle PAF$。

∴　$EF /\!/ AP$。…………………… **5 分**

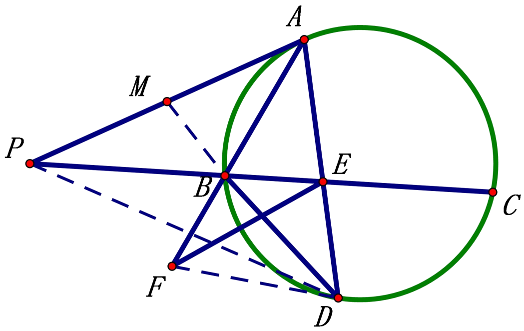
（1）若M、B、D三点共线。

连结BM、DP、DF。

由M为切线PA的中点知，

$MP^2=MA^2=MB\cdot MD$，即$\dfrac{MP}{MD}=\dfrac{MB}{MP}$。

…………………… **10 分**



∴　$\triangle MPB \backsim \triangle MDP$。

∴　$\angle MDP=\angle MPB=\angle APB$。

又由B、F、D、E四点共圆以及$EF /\!/ AP$知，

$\angle MDF=\angle BDF=\angle BEF=\angle APB$。

∴　$\angle MDF=\angle MDP$。

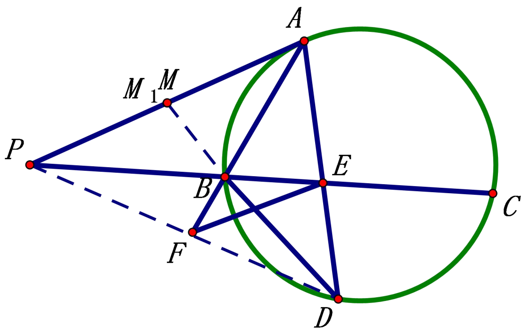
∴　P、F、D三点共线。　　…………………… **15 分**

（2）若P、F、D三点共线。

设直线DB、AP相交于点M_1，则$\angle PDM_1=\angle FDB=\angle FEB=\angle M_1PB$。

又$\angle PM_1B=\angle DM_1P$，

∴　$\triangle M_1PB \backsim \triangle M_1DP$。



∴　$M_1P^2=M_1B\cdot M_1D$。

又$M_1A^2=M_1B\cdot M_1D$，

∴　$M_1P^2=M_1A^2$，$M_1P=M_1A$。

因此，M_1为PA的中点，M、M_1重合。

∴　M、B、D三点共线。

由（1）、（2）可得，P、F、D三点共线的充分必要条件是M、B、D三点共线。

…………………………………… **20 分**

14．已知$a>0$，$f(x)=\ln(2x+1)+2ax-4ae^{x}+4$ 。

（1）当$a=1$时，求$f(x)$的最大值；

（2）判断函数$f(x)$零点的个数，并说明理由。

【解答】（1）当$a=1$时，$f(x)=\ln(2x+1)+2x-4e^{x}+4$，$f'(x)=\dfrac{2}{2x+1}+2-4e^{x}$ 。

∵ $x>-\dfrac{1}{2}$时，$f''(x)=-\dfrac{4}{(2x+1)^{2}}-4e^{x}<0$，

∴ $f'(x)$在$(-\dfrac{1}{2},+\infty)$上为减函数。

又$f'(0)=2+2-4=0$，

∴ $-\dfrac{1}{2}<x<0$时，$f'(x)>0$；$x>0$时，$f'(x)<0$ 。

∴ $f(x)$在区间$\left(-\dfrac{1}{2},0\right]$上为增函数，在$\left[0,+\infty\right)$上为减函数。

∴ $a=1$时，$f(x)$的最大值为$f(0)=0$。 ………………………………… **5 分**

（2）$f'(x)=\dfrac{2}{2x+1}+2a-4ae^{x}$，$f''(x)=-\dfrac{4}{(2x+1)^{2}}-4ae^{x}$

当$a>0$，且$x>-\dfrac{1}{2}$时，$f''(x)<0$ 。

∴ $f'(x)$在$(-\dfrac{1}{2},+\infty)$上为减函数。

∵ $x\to-\dfrac{1}{2}$时，$f'(x)\to+\infty$；$x\to+\infty$时，$f'(x)\to-\infty$ 。

∴ $f'(x)$存在唯一实根，设此根为x_0。

则 $-\dfrac{1}{2}<x<x_0$时，$f'(x)>0$；$x>x_0$时，$f'(x)<0$ 。

∴ $f(x)$在区间$\left(-\dfrac{1}{2},x_0\right]$上为增函数，在$\left[x_0,+\infty\right)$上为减函数。$f(x)$有最大值$f(x_0)$。

……………………………………… **10 分**

① 当$a=1$时，由（1）知，$f(x)$有唯一零点。

② 当$0<a<1$时，由$f'(0)=2+2a-4a=2-2a>0$知，$x_0>0$。

∴ $f(x_0)>f(0)=-4a+4>0$ 。

又$x\to-\dfrac{1}{2}$时，$f(x)\to-\infty$；$x\to+\infty$时，$f(x)\to-\infty$ 。

∴ $f(x)$ 在区间 $(-\frac{1}{2},x_0)$，$(x_0,+\infty)$ 内各有一个零点。

∴ 当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 有两个零点。 ························ **15 分**

③ 当 $a>1$ 时，由 $f'(0)=2-2a<0$，知 $-\frac{1}{2}<x_0<0$。

由 $f'(x_0)=\frac{2}{2x_0+1}+2a-4ae^{x_0}=0$，知 $4ae^{x_0}=\frac{2}{2x_0+1}+2a$。

∴ $f(x_0)=\ln(2x_0+1)+2ax_0-4ae^{x_0}+4=\ln(2x_0+1)+2ax_0-(\frac{2}{2x_0+1}+2a)+4$

$=\ln(2x_0+1)+2ax_0-\frac{2}{2x_0+1}-2a+4$，（$-\frac{1}{2}<x_0<0$）。

设 $g(x)=\ln(2x+1)+2ax-\frac{2}{2x+1}-2a+4$。

∵ $-\frac{1}{2}<x<0$ 时，$g'(x)=\frac{2}{2x+1}+2a+\frac{4}{(2x+1)^2}>0$，

∴ $g(x)$ 在区间 $\left(-\frac{1}{2},0\right]$ 上为增函数。

∴ $-\frac{1}{2}<x<0$ 时，$g(x)<g(0)=2-2a<0$。于是，$f(x_0)<0$。

∴ $a>1$ 时，$f(x)$ 不存在零点。

综合得，当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 有两个零点；当 $a=1$ 时，$f(x)$ 只有 1 个零点；当 $a>1$ 时，$f(x)$ 不存在零点。 ································ **20 分**

15．设a_1，a_2，a_3，a_4，a_5是5个正实数（可以相等）。证明：一定存在4个互不相同的下标i，j，k，l，使得$\left|\frac{a_i}{a_j}-\frac{a_k}{a_l}\right|<\frac{1}{2}$。

【解答】不妨设$a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$，考虑以下5个分数：

$\frac{a_1}{a_2}$，$\frac{a_3}{a_4}$，$\frac{a_1}{a_5}$，$\frac{a_2}{a_3}$，$\frac{a_4}{a_5}$，…………………………①

它们都属于区间$(0,1]$。 ……………………………………… **5分**

把区间$(0,1]$分成两个区间：$\left(0,\frac{1}{2}\right]$和$\left(\frac{1}{2},1\right]$，由抽屉原理知，区间$\left(0,\frac{1}{2}\right]$或$\left(\frac{1}{2},1\right]$中一定有一个区间至少包含①中的3个数（记这3个数依次为a，b，c）。

……………………………………………… **10分**

将①中的5个数依次围成一个圆圈，则①中任意三个数中都有两个数是相邻的（$\frac{a_1}{a_2}$与$\frac{a_4}{a_5}$是相邻的）。即a，b，c中至少有两个数是相邻的。

……………………………………………… **15分**

假设a与b相邻，则$|a-b|<\frac{1}{2}$。

另一方面，由①中5个分数的分子、分母的下标特征知，围成的圆圈中，任意相邻两个分数的分子、分母的4个下标互不相同。

于是，a、b对应的分数的分子、分母的4个下标符合要求。

因此，结论成立。 …………………………………… **20分**