巢湖一中 合肥八中 淮南二中 六安一中 南陵中学 舒城中学 太湖中学

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择

第Ⅰ卷（选择题 共60分）

一、选择题(本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 若复数 $z=\dfrac{2i+1}{1+i}$，则 $\left|z^2\right|=$（ ）

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\sqrt{10}$ C. $\dfrac{5}{2}$ D. 10

若集合 $A=\{x|x<a\}$，$B=\{x|\lg x\geq 0\}$，且满足 $A\cup B=\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是（ ）

A. $(1,+\infty)$ B. $[1,+\infty)$ C. $(0,+\infty)$ D. $[0,+\infty)$

3. 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=1$，$S_4+1=a_5$，则 $a_6=$（ ）

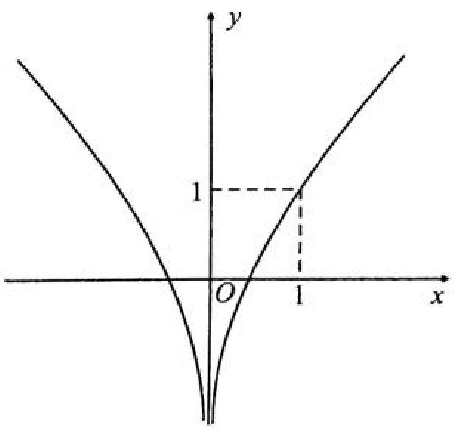
A. 27 B. 32 C. 64 D. 81

已知直线 l 与曲线 $y=x^2+\ln x$ 相切，则下列直线不可能与 l 平行的是（ ）

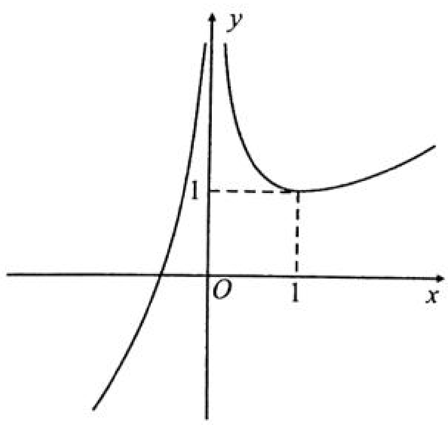
A. $y=3x-1$ B. $y=7x+1$

C. $y=\sqrt{2}x-1$ D. $y=2\sqrt{2}x+1$

5. 函数 $f(x)=x+\ln|x|$ 的图象大致是（ ）



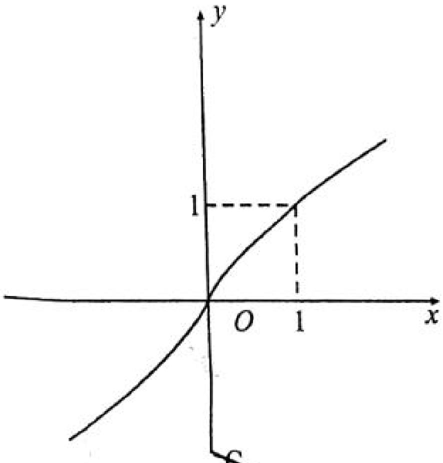
A



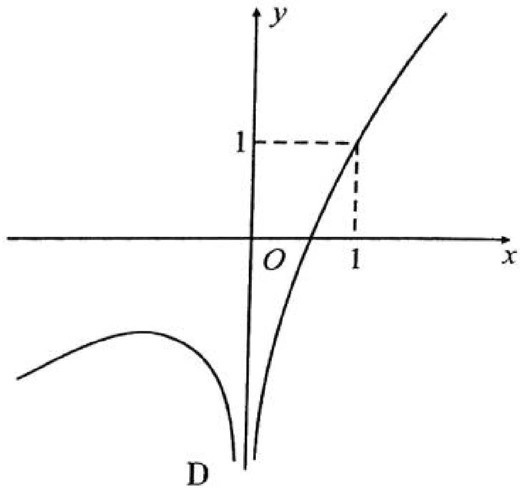
B

屯溪一中 宣城中学 滁州中学 池州一中 阜阳一中 灵璧中学 宿城一中

部分。满分150分，考试时间120分钟。请在答题卷上作答。



C



D

6. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 64，若点 $M\in$ 平面 A_1BD，点 $N\in$ 平面 B_1CD_1，则 MN 的最小值为（　　）

A. $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　　C. $\dfrac{8}{3}$　　D. $\dfrac{4}{3}$

7. 下图是国家统计局发布的生产资料出厂价格涨跌幅以及生活资料出厂价格涨跌幅的统计图，现有如下说法：

①2020年下半年生产资料出厂价格的环比涨幅呈现上升趋势；

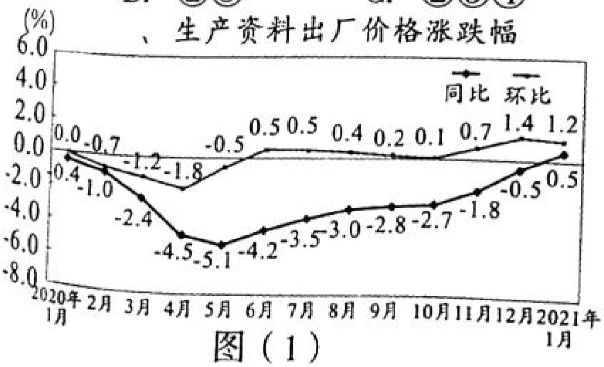
②可以预测，在市场平稳的前提下，2021年2月生活资料出厂价格的环比可能为正数；

③从2020年1月～12月生活资料出厂价格同比的数据中随机抽取3个，恰有2个是正数的概率为 $P=\dfrac{28}{55}$；

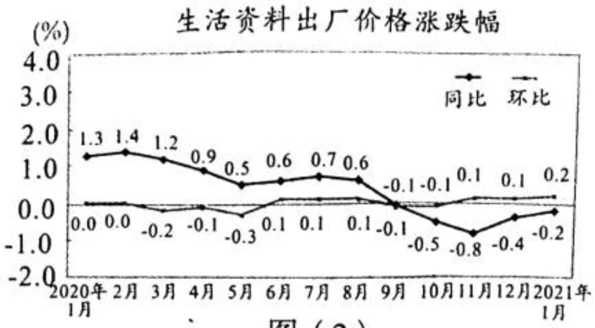
④将2020年1月～2021年1月生产资料出厂价格的环比涨跌幅从小到大排列后，所得的中位数为0.2%，

则正确的有（　　）

A. ①③④　　B. ②③　　C. ②③④　　D. ②④



图（1）



图（2）

<1

8. 已知$a=0.3^{-\log_{0.3}e}$，$b=\log_3 2$，$c=\log_{30}20$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $b<c<a$　　D. $b<a<c$

9. 关于函数$f(x)=|\sin 2x|+|\cos 2x|$，下列结论正确的是（　　）

A. $f(x)$的最小正周期为$\dfrac{\pi}{2}$

B. $f(x)$的最大值为2

C. $f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$上单调递减

D. $x=\dfrac{\pi}{8}$是$f(x)$的一条对称轴

10. 已知偶函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，导函数为$f'(x)$，若对任意$x\in\mathbf{R}$都有$2f(x)+xf'(x)>x^2$恒成立，则下列结论正确的是（　　）

A. $4f(-2)<f(-1)$　　B. $25f(5)>f(1)$

C. $25f(5)<f(-1)$　　D. $f(0)<0$

11. 已知双曲线C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别是$F_1$，$F_2$，点$A$在双曲线$C$上，$AF_2\perp x$轴，若点$B(2c,0)$使得$\angle F_1AB$是钝角，其中$c$是双曲线$C$的半焦距，则$C$的离心率的取值范围是（　　）

A. $\left(1,\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)$　　B. $\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2},+\infty\right)$

C. $\left(1,\dfrac{\sqrt{2}+2}{2}\right)$　　D. $\left(\dfrac{\sqrt{2}+2}{2},+\infty\right)$

12. 已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=1$，$a_{n+1}(a_{n+1}-1)=a_n(a_n+1)$.若$[x]$表示不超过$x$的最大整数，$b_n=\left[\dfrac{(n+1)^2}{2S_n}\right]$，则数列$\{b_n\}$的前2021项和$T_{2021}=$（　　）

A. 1010　　B. 1011　　C. 2021　　D. 2022

第 II 卷（非选择题　共 90 分）

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13 题~第 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22 题~第 23 题为选考题，考生根据要求作答.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,3)$，若 $(k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，则实数 $k=$________.

14. $\left(x^2+2\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中常数项为________.（用数字作答）

15. 已知球 O 是圆锥 PO_1 的外接球，圆锥 PO_1 的母线长是底面半径的 3 倍，且球 O 的表面积为 $\dfrac{81\pi}{8}$，则圆锥 PO_1 的侧面积为________.

16. 已知抛物线 $C:y^2=16x$ 的焦点为 F，点 $A(-4,0)$，点 P 是抛物线 C 上的动点，则 $\dfrac{|PF|}{|PA|}$ 的最小值为________.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $(\sin B+\sin C)^2=\sin^2(B+C)+3\sin B\sin C$，$a=\sqrt{6}$.

（Ⅰ）求 A 的值；

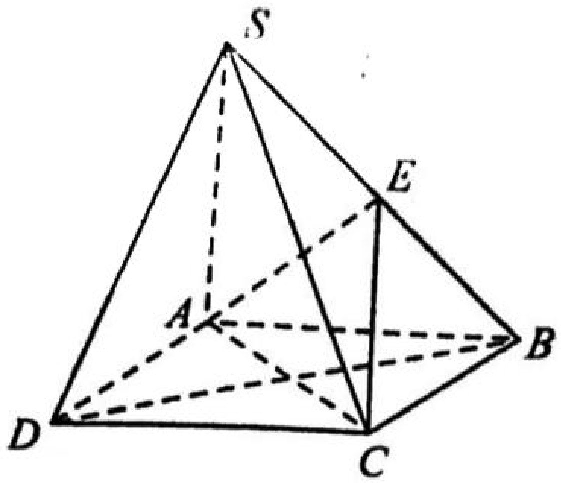
（Ⅱ）求 $\triangle ABC$ 的周长的最大值.

18.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle CAD=60^{\circ}$，$\angle SBA=45^{\circ}$，$SB=SC=SD$.

（Ⅰ）求证：$SA\perp BD$；

（Ⅱ）设 E 是线段 SB 的中点，求二面角 $S-AC-E$ 的余弦值



19.（本小题满分 12 分）

学期结束时，学校对食堂进行测评，测评方式：从全校学生中随机抽取100人给食堂打分，打分在60以下视为“不满意”，在60～80视为“基本满意”，在80分及以上视为“非常满意”．现将他们给食堂打的分数分组：

$[20,30),[30,40),[40,50),[50,60),[60,70),[70,80),[80,90]$，

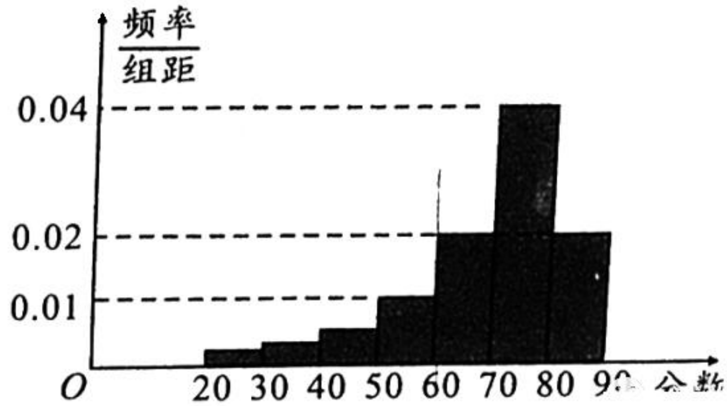
得到如下频率分布直方图：

（Ⅰ）求这100人中“不满意”的人数并估计食堂得分的中位数；

（Ⅱ）若按满意度采用分层抽样的方法，从这100名学生中抽取15人，再从这15人中随机抽取3人，记这3人中对食堂“非常满意”的人数为 X．

（ⅰ）求 X 的分布列；

（ⅱ）若抽取的3人中对食堂“非常满意”的同学将获得食堂赠送的200元现金，其他同学将获得100元现金，请估计这3人将获得的现金总额．



20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点为 N，长轴长为 $4\sqrt{2}$，P 为椭圆上一点，O 为坐标原点，且 $\triangle OPN$ 重心的横坐标为 $\sqrt{2}$，$\triangle OPN$ 的面积为 $\sqrt{6}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点，以 OA,OB 为邻边作平行四边形 $OAMB$，且 $k_{OA}\cdot k_{OB}=-\frac{1}{2}$，试判断 $|OM|^2+|AB|^2$ 是否为定值？若是，求出定值；若不是，请说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+\sin x-1$.

（Ⅰ）判断函数 $f(x)$ 在 $\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的零点个数，并说明理由；

（Ⅱ）当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)+mx\geqslant 0$，求实数 m 的取值范围.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答．注意：只能做选定的题目，如果多做，则按所做的第一题记分，解答时请写清题号．

22.（本小题满分 10 分）选修 4–4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=t \\ y=\sqrt{3}t \end{cases}$（$t$ 为参数）. 以原点为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho(1-\cos\theta)=2$，$A\left(2,\dfrac{\pi}{6}\right)$.

（Ⅰ）求曲线 C 的直角坐标方程以及直线 l 的普通方程；

（Ⅱ）若直线 l 与曲线 C 交于 M,N 两点，求 $\triangle AMN$ 的面积.

23.（本小题满分 10 分）选修 4–5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x-1|-2|x-2|$ 的最大值为 t.

（Ⅰ）求 t 的值；

（Ⅱ）设 a,b,c 均为正实数，且满足 $2a+b+2c=3t$，求证：

$a^2+b^2+c^2\geqslant t$.

1号卷·A10联盟2021年高考最后一卷

理科数学参考答案

一、选择题(本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	B	C	D	B	C	A	D	B	A	D

1. C $\because z=\dfrac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{3+i}{2}$，$\therefore z^2=\dfrac{4+3i}{2}$，$\therefore |z^2|=\dfrac{5}{2}$. 故选 C.

2. B 由题意得，$B=\{x|x\geq 1\}$，若 $A\cup B=\mathbf{R}$，则 $a\geq 1$，故选 B.

3. B 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，显然 $q\neq 1$. $\because S_4=a_5-1$，则 $\dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=a_1q^4-1$，

即 $\dfrac{q^4-1}{q-1}=q^4-1$，又 $q>0$，得 $q-1=1$，即 $q=2$，$\therefore a_6=a_1q^5=32$，故选 B.

4. C $y'=2x+\dfrac{1}{x}\geq 2\sqrt{2}$，即直线 l 的斜率 $k\geq 2\sqrt{2}$，故直线 $y=\sqrt{2}x-1$ 不可能与 l 平行. 故选 C.

5. D 易知 $f(x)=x+\ln|x|$ 是非奇非偶函数，所以排除选项 A，C.当 $x>0$ 时，$f(x)=x+\ln x$ 单调递增，所以排除选项 B. 故选 D.

6. B 由题意得，MN 的最小值为平面 A_1BD 到平面 B_1CD_1 的距离. $\because$ 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 64，易得 $AC_1=4\sqrt{3}$，则 $MN_{\min}=\dfrac{1}{3}AC_1=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，故选 B.

7. C 由图（1）可知，2020 年下半年生产资料出厂价格环比涨幅先下降后上升，故①错误；由图（2）中的环比折线可知，生活资料出厂价格的环比涨跌幅后一个月与前一个月的差介于 $-0.2\%\sim 0.4\%$ 之间，由于 2021 年 1 月环比的涨幅为 0.2%，故可以预测在市场平稳的前提下，2021 年 2 月生活资料出厂价格的环比可能为正数，故②正确；从 2020 年 1 月 ~ 12 月生活资料出厂价格同比的数据中随机抽取 3 个，恰有 2 个是正数的概率 $P=\dfrac{C_8^2C_4^1}{C_{12}^3}=\dfrac{28}{55}$，故③正确；将 2020 年 1 月 ~ 2021 年 1 月生产资料出厂价格的环比涨跌幅从小到大排列后，所得的中位数为 0.2%，故④正确. 故选C.

8. A $\because a=0.3^{-\log_{0.3}e}=\dfrac{1}{e}<\dfrac{1}{2}$，$b=\log_3 2>\log_3\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore a<b$；$\because b=\log_3 2=\dfrac{\lg 2}{\lg 3}$，

$c=\dfrac{\lg 20}{\lg 30}=\dfrac{1+\lg 2}{1+\lg 3}$，$\therefore c-b=\dfrac{1+\lg 2}{1+\lg 3}-\dfrac{\lg 2}{\lg 3}=\dfrac{\lg 3-\lg 2}{\lg 3(1+\lg 3)}>0$，$\therefore b<c$，

$\therefore a<b<c$，故选 A.

9\. D　$\because f\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|+\left|\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|=|\cos 2x|+|\sin 2x|=f(x)$，$\therefore \dfrac{\pi}{4}$是

$f(x)$的一个周期，故 A 错误；要使$f(x)=2$，即$|\sin 2x|+|\cos 2x|=2$，即

$|\sin 2x|=|\cos 2x|=1$，显然不成立，故 B 错误；当$0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}$时，

$f(x)=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\dfrac{\pi}{4}\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{3\pi}{4}$，$\therefore f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$

上先增后减，故 C 错误；$\because f\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)\right|+\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)\right|=|\cos 2x|+$

$|\sin 2x|=f(x)$，故 D 正确．故选 D.

10\. B　令$x=0$，则$2f(0)+0>0$，$\therefore f(0)>0$，则 D 错误；令$g(x)=x^2f(x)$，则

$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$，当$x>0$时，$\because 2f(x)+xf'(x)>x^2$，

$\therefore 2xf(x)+x^2f'(x)>x^3>0$，则$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$\therefore g(5)>g(1)$，

即$25f(5)>f(1)=f(-1)$，故 B 正确，C 错误；$\because f(x)$是偶函数，$\therefore g(x)$也是

偶函数，$\therefore g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，$\therefore g(-2)>g(-1)$，即$4f(-2)>f(-1)$，

故 A 错误．故选 B.

11\. A　当$x=c$时，$\dfrac{c^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，解得$y=\pm\dfrac{b^2}{a}$，不妨设点$A$在第一象限，则$A\left(c,\dfrac{b^2}{a}\right)$.

由$\angle F_1AB$是钝角，可得$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AB}<0$，即$-2c^2+\dfrac{b^4}{a^2}<0$，$\therefore b^2<\sqrt{2}ac$，

$\therefore c^2-a^2<\sqrt{2}ac$，整理得$e^2-\sqrt{2}e-1<0$，$\therefore 1<e<\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$．故选 A.

12\. D　$\because a_{n+1}(a_{n+1}-1)=a_n(a_n+1)$，$\therefore a_{n+1}^2-a_n^2=a_{n+1}+a_n$，即

$(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)=a_{n+1}+a_n$，$\because a_n>0$，$\therefore a_{n+1}+a_n>0$，$\therefore a_{n+1}-a_n=1$，

$\because a_1=1$，$\therefore$数列$\{a_n\}$是首项为 1、公差为 1 的等差数列，$\therefore a_n=n$，

$\therefore S_n=\dfrac{n(1+n)}{2}$，$\therefore \dfrac{(n+1)^2}{2S_n}=\dfrac{(n+1)^2}{n(1+n)}=\dfrac{n+1}{n}$，

$\therefore b_n=\left[\dfrac{(n+1)^2}{2S_n}\right]=\left[\dfrac{n+1}{n}\right]=\begin{cases}2,n=1\\1,n\geqslant 2\end{cases}$，

$\therefore T_{2021}=2+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{2020个}=2+2020=2022$．故选 D.

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分.）

13. $-\dfrac{4}{5}$

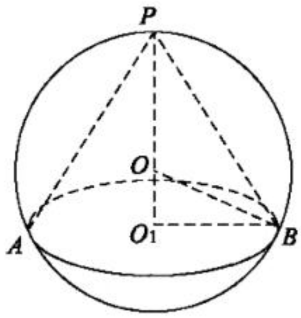
由题意得，$k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(k-2,-2k-3)$，又$(k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，则$k-2+2(2k+3)=0$，解得$k=-\dfrac{4}{5}$.

14. -25

展开式中常数项为$x^2\cdot C_6^4x^2\left(-\dfrac{1}{x}\right)^4+2C_6^3x^3\left(-\dfrac{1}{x}\right)^3=-25$.

15. 3π

设$O_1B=r$，球O的半径为R，则$PB=3r$，由球O的表面积为$4\pi R^2=\dfrac{81\pi}{8}$，得$R^2=\dfrac{81}{32}$. 在Rt$\triangle OO_1B$中，$R^2=(PO_1-R)^2+r^2$，即$R^2=(2\sqrt{2}r-R)^2+r^2$，解得$r=1$，故圆锥$PO_1$的侧面积为$\pi r\cdot PB=3\pi$.



16. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

点$A(-4,0)$在抛物线C的准线$x=-4$上，设点P在准线上的射影为Q，则$\dfrac{|PF|}{|PA|}=\dfrac{|PQ|}{|PA|}=\sin\angle PAQ$，当直线$AP$与抛物线$C$相切时$\angle PAQ$最小，$\sin\angle PAQ$也最小. 设$PA$的方程为$y=k(x+4)$，与$y^2=16x$联立得$k^2x^2+(8k^2-16)x+16k^2=0$，由$\Delta=(8k^2-16)^2-64k^4=0$得$k=\pm1$，当$k=\pm1$时，$\sin\angle PAQ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

三、解答题（本大题共6小题，共70分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分12分）

（Ⅰ）由题意得，$(\sin B+\sin C)^2=\sin^2A+3\sin B\sin C$，

$\therefore\sin^2B+\sin^2C=\sin^2A+\sin B\sin C$，…………………3分

$\therefore$由正弦定理可得$b^2+c^2=a^2+bc$，$\therefore\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$. ……………5分

又$A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$. …………………6分

（Ⅱ）由$a=\sqrt{6}$，$A=\dfrac{\pi}{3}$及正弦定理得$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}=2\sqrt{2}$，

$\therefore b=2\sqrt{2}\sin B$，$c=2\sqrt{2}\sin C=2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-B\right)$，…………………8分

$\therefore a+b+c=\sqrt{6}+2\sqrt{2}\sin B+2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-B\right)=2\sqrt{6}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{6}$.…10 分

由 $0<B<\dfrac{2\pi}{3}$ 得，$\dfrac{\pi}{6}<B+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，

$\therefore$ 当 $B+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $B=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$(a+b+c)_{\max}=3\sqrt{6}$. ………………12 分

18.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）证明：取 BC 中点 M，连接 SM,AM，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形且 $\angle CAD=60^\circ$，$\therefore AM\perp BC$，

$\because SB=SC$，$\therefore SM\perp BC$. ……………2 分

又 $AM\cap SM=M$，$\therefore BC\perp$ 平面 SAM，

$\because SA\subset$ 平面 SAM，$\therefore SA\perp BC$.

同理可证 $SA\perp DC$，$\because DC\cap BC=C$，$\therefore SA\perp$ 平面 $ABCD$. ……………4 分

又 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore SA\perp BD$. ………………5 分

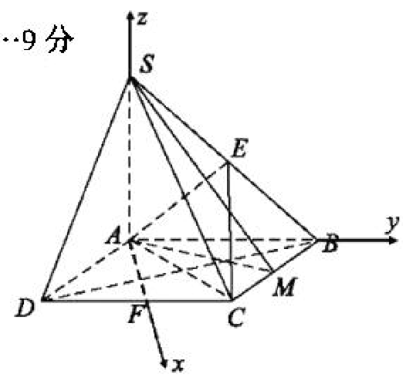
（Ⅱ）取 CD 的中点 F，以 A 为坐标原点，直线 AF,AB,AS 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系 $Axyz$.

不妨设 $AB=2$，$\because SA\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore SA\perp AB$，

又 $\angle SBA=45^\circ$，$\therefore SA=AB=2$，

则 $A(0,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(\sqrt{3},1,0)$，$D(\sqrt{3},-1,0)$，$E(0,1,1)$，

$\therefore \overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{AE}=(0,1,1)$. ………………8 分



易得平面 SAC 的一个法向量为 $\overrightarrow{BD}=(\sqrt{3},-3,0)$，……9 分

设平面 AEC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y=0\\ y+z=0\end{cases}$，

取 $y=1$，则 $\boldsymbol{n}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},1,-1\right)$. ……………10 分

由图可知，二面角 $S-AC-E$ 为锐角，

故二面角 $S-AC-E$ 的余弦值为 $\left|\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{BD}>\right|=\dfrac{\left|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}\right|}{|\boldsymbol{n}|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. …………12 分

19.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）这100人中“不满意”的人数为 $100\times[1-(0.02+0.04+0.02)\times10]=20$. ……2 分

由频率分布直方图易得，食堂得分的中位数为 $70+\dfrac{0.5-0.4}{0.04}=72.5$. …………4 分

（Ⅱ）（ⅰ）若按满意度采用分层抽样的方法，从这100名学生中抽取15人，

则“不满意”与“基本满意”的学生应抽取$100\times0.8\times\frac{3}{20}=12$（人），

“非常满意”的学生应抽取$100\times0.2\times\frac{3}{20}=3$（人），……………6分

$\therefore X$的取值为0，1，2，3，

$P(X=0)=\frac{C_{12}^3}{C_{15}^3}=\frac{44}{91}$，$P(X=1)=\frac{C_{12}^2C_3^1}{C_{15}^3}=\frac{198}{455}$，

$P(X=2)=\frac{C_{12}^1C_3^2}{C_{15}^3}=\frac{36}{455}$，$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_{15}^3}=\frac{1}{455}$，

故X的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{44}{91}$	$\frac{198}{455}$	$\frac{36}{455}$	$\frac{1}{455}$

…………9分

（ⅱ）由（ⅰ）得$E(X)=1\times\frac{198}{455}+2\times\frac{36}{455}+3\times\frac{1}{455}=\frac{3}{5}$，

则3人获得的现金总额$Y=200X+100(3-X)=100X+300$，

$\therefore E(Y)=E(100X+300)=100E(X)+300=360$（元），

即3人获得的现金总额估计为360元. ………………12分

20.（本小题满分12分）

（Ⅰ）由题意得，$2a=4\sqrt{2}$，则$a=2\sqrt{2}$，$\therefore N(2\sqrt{2},0)$.

设$P(x_0,y_0)$，则$\frac{0+x_0+2\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$，$\therefore x_0=\sqrt{2}$，………………2分

$\because\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times|y_0|=\sqrt{6}$，$\because|y_0|=\sqrt{3}$，$\therefore\frac{2}{8}+\frac{3}{b^2}=1$，$\therefore b=2$，

$\therefore$椭圆C的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. …………………5分

（Ⅱ）设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由余弦定理得，$|OM|^2=|OA|^2+|AM|^2-2|OA|\cdot|AM|\cdot\cos\angle OAM$，

$|AB|^2=|OA|^2+|OB|^2-2|OA|\cdot|OB|\cdot\cos\angle AOB$，

两式相加得，$|OM|^2+|AB|^2=2(|OA|^2+|OB|^2)$. ………………8分

$\because k_{OA}\cdot k_{OB}=-\frac{1}{2}$，$\therefore\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-\frac{1}{2}$，$\therefore x_1x_2=-2y_1y_2$. ………………9分

$\because$点A,B在椭圆C上，$\therefore\frac{x_1^2}{8}+\frac{y_1^2}{4}=1$，$\frac{x_2^2}{8}+\frac{y_2^2}{4}=1$，

$\therefore x_1^2-8=-2y_1^2$，$x_2^2-8=-2y_2^2$，$\therefore\begin{cases}\left(x_1^2-8\right)\left(x_2^2-8\right)=4y_1^2y_2^2\\\left(x_1^2-8\right)+\left(x_2^2-8\right)=-2\left(y_1^2+y_2^2\right)\end{cases}$，（*）

将 $x_1x_2=-2y_1y_2$ 代入（*）式，得 $\begin{cases}x_1^2+x_2^2=8\\y_1^2+y_2^2=4\end{cases}$，

$\therefore|OM|^2+|AB|^2=2\left(|OA|^2+|OB|^2\right)=2\left(x_2^2+x_1^2+y_1^2+y_2^2\right)=24$，

$\therefore|OM|^2+|AB|^2$ 是定值，定值为 24．……………12 分

21.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）解法一：由题意得，$f'(x)=e^x+\cos x$，

当 $x\in\left[-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，易得函数 $f'(x)$ 单调递增，

而 $f'(-\pi)=e^{-\pi}-1<0$，$f'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}>0$，

故 $\exists x_0\in\left[-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f'(x_0)=0$，当 $x\in[-\pi,x_0)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in\left(x_0,-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，而 $f(-\pi)=e^{-\pi}-1<0$，$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}-2<0$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\left[-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上无零点；……………3 分

当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$f'(x)=e^x+\cos x>0$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，

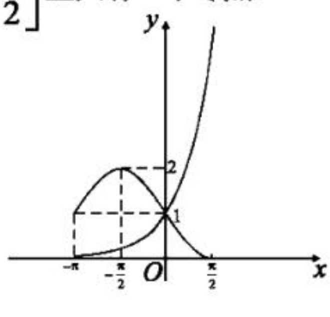
而 $f(0)=0$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上有 1 个零点．

综上所述，函数 $f(x)$ 在 $\left[-\pi,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上有 1 个零点．………………6 分

解法二：由 $f(x)=0$，得 $e^x+\sin x-1=0$，则 $e^x=1-\sin x$．

在同一直角坐标系中，作出 $y_1=e^x$ 和 $y_2=1-\sin x$ 的图象，$x\in\left[-\pi,\dfrac{\pi}{2}\right]$，

由图象易知函数 $f(x)$ 在 $\left[-\pi,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上只有一个零点．………………6 分



（Ⅱ）令 $g(x)=f(x)+mx=e^x+\sin x+mx-1$，$x\in[0,+\infty)$，则 $g'(x)=e^x+\cos x+m$.

$\because g(0)=e^0+\sin 0+0\times m-1=0$，$g'(0)=e^0+\cos 0+m=2+m$. ················8 分

令 $h(x)=g'(x)=e^x+\cos x+m$，$\therefore h'(x)=e^x-\sin x>0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

则 $h(x)$ 为增函数，即 $g'(x)$ 为增函数，

①当 $m+2\geqslant 0$，即 $m\geqslant -2$ 时，$g'(x)\geqslant g'(0)=2+m\geqslant 0$，$\therefore g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，$\therefore g(x)\geqslant g(0)=0$，即 $g(x)\geqslant 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立；················10 分

②当 $m+2<0$，即 $m<-2$ 时，$g'(0)=2+m<0$，$\therefore \exists x_0\in(0,+\infty)$，使 $g'(x_0)=0$，

当 $x\in(x_0,+\infty)$，$g'(x_0)>0$，$g(x)$ 为增函数；

当 $x\in[0,x_0)$，$g'(x_0)<0$，$g(x)$ 为减函数，

$\therefore g(x_0)<g(0)=0$，与 $g(x)\geqslant 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立相矛盾，$\therefore m<-2$ 不成立.

综上所述，实数 m 的取值范围是 $[-2,+\infty)$. ··················12 分

请考生从第 22、23 题中任选一题作答. 注意：只能做选定的题目，如果多做，则按所做的第一题记分，解答时请写清题号.

22.（本小题满分 10 分）选修 4–4：坐标系与参数方程

（Ⅰ）$\because$ 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho(1-\cos\theta)=2$，$\therefore \rho^2=(\rho\cos\theta+2)^2$，

将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入，得 $y^2=4(x+1)$，

$\therefore$ 曲线 C 的直角坐标方程为 $y^2=4(x+1)$. ··················3 分

由题意得，直线 l 的普通方程为 $y=\sqrt{3}x$. ················5 分

（Ⅱ）解法一：直线 l 的方程为 $\sqrt{3}x-y=0$，$\therefore$ 直线 l 分成两条射线，

其极坐标方程分别为 $\theta=\dfrac{\pi}{3}(\rho\geqslant 0)$ 或 $\theta=\dfrac{4\pi}{3}(\rho\geqslant 0)$. ··············· 6 分

联立 $\begin{cases}\theta=\dfrac{\pi}{3}\\ \rho(1-\cos\theta)-2=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}\theta=\dfrac{4\pi}{3}\\ \rho(1-\cos\theta)-2=0\end{cases}$，

分别解得 $\rho=4$ 和 $\rho=\dfrac{4}{3}$，$\therefore |MN|=4+\dfrac{4}{3}=\dfrac{16}{3}$. ··············· 8 分

而 $A\left(2,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 到 $\theta=\dfrac{\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$ 的距离为 $2\times\sin\dfrac{\pi}{6}=1$，

$\therefore \triangle AMN$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{16}{3}\times 1=\dfrac{8}{3}$. ··················10 分

解法二：联立 $\begin{cases}y=\sqrt{3}x\\ y^2=4(x+1)\end{cases}$，整理得 $3x^2-4x-4=0$，··············· 6 分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{4}{3}$，$x_1x_2=-\dfrac{4}{3}$，

$\therefore |MN|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{16}{3}$，……………8 分

又点 $A(\sqrt{3},1)$ 到直线 l 的距离 $d=1$，

$\therefore S_{\triangle AMN}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{16}{3}\times1=\dfrac{8}{3}$. ……………10 分

23.（本小题满分 10 分）选修 4-5：不等式选讲

（Ⅰ）由题意得，$f(x)=|x-1|-2|x-2|=\begin{cases}x-3, x<1\\ 3x-5, 1\leqslant x\leqslant 2\\ -x+3, \quad x>2\end{cases}$，…………………3 分

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,2]$ 时，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递减，

$\therefore f(x)_{\max}=f(2)=1$，$\therefore t=1$. ……………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得，$2a+b+2c=3$，……………6 分

由柯西不等式得，$(a^2+b^2+c^2)(2^2+1^2+2^2)\geqslant(2a+b+2c)^2$，

当且仅当 $\dfrac{a}{2}=b=\dfrac{c}{2}$ 时取等号，

$\therefore a^2+b^2+c^2\geqslant1$，即 $a^2+b^2+c^2\geqslant t$. ………………………10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》