赤峰市高三年级 4·20 模拟考试试题
文科数学答案　　2023．04

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	C	D	B	A	C	A	D	B	C	B

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．-2.　　14．$m+n=11$.　　15．$\sqrt{6}\pi$.　　16．$6+2\sqrt{2}$．

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17．（12 分）

选择条件①

解：（1）由已知，对任意的 $p,q\in \mathrm{N}^*$ 都有 $a_{p+q}=a_p+a_q$，令 $p=n,q=1$ ……………1 分

则 $a_{n+1}-a_n=a_1=\dfrac{1}{2}$，……………2 分

故数列 $\{a_n\}$ 为以 $a_1=\dfrac{1}{2}$ 为首项，$d=\dfrac{1}{2}$ 为公差的 $A.P.$ ……………4 分

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=\dfrac{n}{2}$. ……………6 分

（2）由（1）知 $a_n=\dfrac{n}{2}$，$\therefore b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{4}{n(n+1)}$ ……………7 分

又 $\therefore b_n=\dfrac{4}{n(n+1)}=4\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$ ……………9分

$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=4\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$ ……………10 分

$\therefore T_n=4\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$ ……………11 分

$=\dfrac{4n}{n+1}$. ……………12 分

选择条件②

解：（1）由已知得，

$$a_n=f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)\qquad (1)$$

$a_n = f(1) + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f(0)$　（2）……………………………………1 分

两式相加，得

$2a_n = [f(0)+f(1)] + \left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] + \cdots + \left[f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)\right] + [f(1)+f(0)]$ ……………2 分

由 $f(x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 有 $f(x)+f(1-x)=1$，得

$f(0)+f(1) = f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right) = f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{n-2}{n}\right) = \cdots\cdots = 1$ ……………………………………4 分

$\therefore a_n = \frac{n+1}{2}(n\in N^*)$ ……………………………………………………5 分

由 $a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{2} - \frac{n+1}{2} = \frac{1}{2}$ 得，

数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1 = 1$ 为首项，$d = \frac{1}{2}$ 的等差数列. ……………………………………6 分

（2）由（1）知 $a_n = \frac{n+1}{2}$，$\therefore b_n = \frac{1}{\left(a_n - \frac{1}{2}\right)\left(a_{n+1} - \frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{n(n+1)}$ ……………………7 分

又 $\therefore b_n = \frac{4}{n(n+1)} = 4\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ ……………………………………………9 分

$\therefore T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 4\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ ………………10 分

$\therefore T_n = 4\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ …………………………………………………………11 分

$= \frac{4n}{n+1}$. ……………………………………………………………………12 分

18.（12 分）

解：（1）根据题意，可得男、女生分别选择“大理”和非“大理”的数据，得如下 2×2 列联表：

	选择“大理”	选择非“大理”	合计
男生	40	15	55
女生	20	25	45
合计	60	40	100

…………………………………………………………………………………… 2 分

$K^2 = \frac{100(40\times25-20\times15)^2}{60\times40\times55\times45}$=8.250 > 7.879. ………………………………4 分

所以，在犯错误的概率不超过 0.5% 的前提下认为选择“大理”与性别有关. …6 分

（2）设 4 名男生为 a,b,c,d，……………………………………………………7 分

2 名女生为 m,n，……………………………………………………………8 分

则从中随机选 2 人的的选法为：

$ab,ac,ad,am,an,bc,bd,bm,bn,cd,cm,cn,dm,dn,mn$，共 15 种. ……………………9 分

至少有一名女生的情况是：$am,an,bm,bn,cm,cn,dm,dn,mn$，共 9 种. ……………10 分

所以，至少抽到一名女生的概率 $P=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$.……………………………………………………12 分

19.（12 分）

（1）证明：$\because$ $DE\perp AB$

$\therefore$ 折叠后，$DE\perp A'E,DE\perp BE,A'E\bigcap BE=E$ ……………………………………………2 分

$\therefore DE\perp$ 平面$A'BE$ ………………………………………………………………………………………………3 分

又 $DE\subset$ 平面 $BCDE$ ……………………………………………………………………………………4 分

$\therefore$ 平面 $A'BE\perp$ 平面 $BCDE$. …………………………………………………………………………5 分

（2）解：由于四棱锥 $A'-BPDE$ 和四棱锥 $A'-BCDE$，底在同一平面上，高相同. …6 分

则由 $V_{A'-BPDE}=\dfrac{1}{2}V_{A'-BCDE}$ 可得，$S_{\text{四边形}BPDE}=\dfrac{1}{2}S_{\text{四边形}BCDE}$.………………………………7 分

即 $S_{\triangle PCD}=\dfrac{1}{2}S_{\text{四边形}BCDE}$.……………………………………………………………………8 分

$\because S_{\text{四边形}BCDE}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AED}=4\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ ………………………………………9 分

$\therefore S_{\triangle PCD}=\dfrac{7\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{2}|CD||CP|\sin 60^\circ$ ……………………………………………10 分

$\therefore |CP|=\dfrac{7}{2}$ ………………………………………………………………………………………11 分

则 $\dfrac{|BP|}{|PC|}=\dfrac{4-\dfrac{7}{2}}{\dfrac{7}{2}}=\dfrac{1}{7}$. …………………………………………………………………12 分

20.（12 分）

解：（1）当 $a=-1$ 时，$f(x)=2x+1$，

又 $y=g(x)$ 的导函数为 $g'(x)=\dfrac{1}{x}$ ……………………………………………………………1 分

设 $N(x_0,y_0)$ 是 $y=g(x)$ 上一点，则在 $N(x_0,y_0)$ 的切线斜率为 $\dfrac{1}{x_0}$. ………………2 分

当 $N(x_0,y_0)$ 处的切线与 $f(x)=2x+1$ 平行时，M,N 两点之间距离最小. …………3 分

令 $\dfrac{1}{x_0}$=2，则 $x_0=\dfrac{1}{2}$，………………………………………………………………………4 分

$N\left(\dfrac{1}{2},-\ln 2\right)$ 到 $y=2x+1$ 的距离为所求. ………………………………………………5 分

$d=\frac{|2+\ln 2|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}(2+\ln 2)$……………………………………………………6 分

（2）由已知得，$h(x)=(a-2x)\ln x$

要使 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，只需 $h'(x)\le 0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立. ……………………7 分

$\because h'(x)=-2\ln x+\frac{a-2x}{x}$，

$\therefore h'(x)\le 0\Leftrightarrow a\le 2x+2x\ln x$.……………………………………………………8 分

令 $\varphi(x)=2x+2x\ln x$，只需求其在 $(0,+\infty)$ 上的最小值. ……………………………………9 分

令 $\varphi'(x)=4+2\ln x=0\Rightarrow x=\frac{1}{e^2}$，……………………………………………………10 分

当 $x\in\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 为减函数；

当 $x\in\left(\frac{1}{e^2},+\infty\right)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 为增函数.

则 $\varphi_{\min}(x)=\varphi\left(\frac{1}{e^2}\right)=-\frac{2}{e^2}$ ……………………………………………………11 分

所以，实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{2}{e^2}\right]$. ………………………………………12 分

21.（12 分）

解（1）由已知得，$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\\ bc=\sqrt{3}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，……………………………………………………2 分

$\therefore a=2,b=\sqrt{3},c=1$.……………………………………………………………………3 分

故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………4 分

（2）设过 $T(-1,0)$ 的直线方程为 $x=my-1$……………………………………………………5 分

联立 $\begin{cases}x=my-1\\ 3x^2+4y^2-12=0\end{cases}$ 得，$(3m^2+4)y^2-6my-9=0$.………………………6 分

令 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则

则 $\triangle>0$ 恒成立，$y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4},y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$.（*） ……………………………7 分

$\because A(-2,0),B(2,0)$

$\therefore$ 直线 AM 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，

直线 BN 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$. ……………………………………………………8 分

联立两条直线方程，得 $x=\frac{2y_1(x_2-2)+2y_2(x_1+2)}{y_2(x_1+2)-y_1(x_2-2)}$ ………………………………9 分

把 $x_1=my_1-1,x_2=my_2-1$ 代入上式，整理得

$x=\frac{4my_1y_2-6y_1+2y_2}{3y_1+y_2}$ ……………………………………………………………………10 分

$x=\frac{4my_1y_2-6(y_1+y_2)+8y_2}{3(y_1+y_2)-2y_2}$ ……………………………………………………11 分

把（*）代入上式，得 $x=\frac{-12(y_1+y_2)+8y_2}{3(y_1+y_2)-2y_2}=-4$.……………………………………12 分

所以，直线 AM 与直线 BN 的交点的横坐标为定值.

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 二题中任选一题做答，如果多做，则按所做的第一题计分. 做答时，用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（本小题满分 10 分）

解（1）由 $t=x-1$ 代入 $y=1+2t$ 得，……………………………………………………………1 分

$C_1:2x-y-1=0$. …………………………………………………………………………………2 分

由 $\rho(1-\sin\theta)=1$ 得，$\rho=y+1$ ……………………………………………………………3 分

两边平方，得 $x^2+y^2=(y+1)^2$ …………………………………………………………………4 分

化简，得 C_2：$x^2=2y+1$ …………………………………………………………………………5 分

（2）点 $M(0,-1)$ 在直线 $C_1:2x-y-1=0$ 上，…………………………………………………6 分

设直线 C_1 的倾斜角为 α，由斜率 $k=2$ 知，$\sin\alpha=\frac{\sqrt5}{5},\cos\alpha=\frac{2\sqrt5}{5}$.

$\therefore$ 设直线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\frac{\sqrt5}{5}t \\ y=-1+\frac{2\sqrt5}{5}t \end{cases}$ $(t为参数)$ ……………………………………7 分

代入 C_2：$x^2=2y+1$，得 $t^2-4\sqrt5 t+5=0$ ……………………………………………………8 分

由 $\Delta>0,t_1+t_2=4\sqrt5,t_1t_2=5$ ………………………………………………………………9 分

$|MA|\cdot|MB|=|t_1t_2|=5$ ……………………………………………………………………………10 分

23．[选修 4-5：不等式选讲]（本小题满分 10 分）

解：（1）因为 $f(x)\le3$ 的解集为 $[b,1]$，所以 $f(1)\le3$，即 $3+|1+a|\le3$，

得$|1+a|\le 0$，故$a=-1$.……1分

则$f(x)=|2x+1|+|x-1|$，

$\therefore$①$\begin{cases} x<-\dfrac{1}{2} \\ -3x\le 3 \end{cases} \Rightarrow -1\le x<-\dfrac{1}{2}$.……2分

②$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\le x\le 1 \\ x+2\le 3 \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{1}{2}\le x\le 1$.……3分

③$\begin{cases} x>1 \\ 3x\le 3 \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing$.……4分

综上，$f(x)\le 3$的解集为$[-1,1]$，则$b=-1$.……5分

（2）由（1）知$a=-1$，则$\dfrac{1}{2m}+\dfrac{2}{n}=2(m>0,n>0)$，……6分

故$2=\dfrac{1}{2m}+\dfrac{2}{n}\ge 2\sqrt{\dfrac{2}{2mn}}=\dfrac{2}{\sqrt{mn}}$，$mn\ge 1$，……7分

当且仅当$m=\dfrac{1}{2},n=2$时，等号成立.……8分

所以，$4m^2+n^2\ge 2\sqrt{4m^2n^2}=4mn\ge 4$，……9分

当且仅当$m=\dfrac{1}{2},n=2$时，等号成立.……10分