机密★启用前 〔考试时间:2023年7月2日下午3:00—5:00〕

乐山市高中2024届期末教学质量检测

理科数学

(本试卷共4页,满分:150分 考试时间:120分钟)

本试题卷分第一部分(选择题)和第二部分(非选择题)两部分.第一部分1至2页,第二部分3至4页.考生作答时,须将答案答在答题卡上,在本试题卷.草稿纸上答题无效.满分150分,考试时间120分钟.考试结束后,将本试题卷和答题卡一并交回.

第一部分(选择题 共60分)

注意事项:

1. 选择题必须用2B铅笔将答案标号填涂在答题卡对应题目标号的位置上.
2. 第一部分共12小题,每小题5分,共60分.

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 计算:$(3-4i)(3+4i)=$

A. -7　　B. 7　　C. 25　　D. -25

2. 下列变量间的关系,不是相关关系的是

A. 一块农田的水稻产量与施肥之间的关系

B. 正方形的面积与边长之间的关系

C. 商品销售收入与其广告费支出之间的关系

D. 人体内的脂肪含量与年龄之间的关系

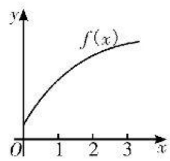
3. 函数$y=f(x)$的图象如图所示,它的导函数为$y=f'(x)$,下列正确的是

A. $f'(1)>f'(2)>f'(3)>0$

B. $f'(1)<f'(2)<f'(3)<0$

C. $0<f'(1)<f'(2)<f'(3)$

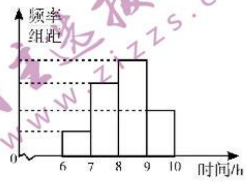
D. $f'(1)>f'(2)>0>f'(3)$



4. 小李打开计算机时,忘记了开机密码的前两位,他只记得第一位是M,N,R中的一个字母,第二位是1,2,3,4中的一个数字,则小李输入一次密码能成功开机的概率是

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{12}$　　D. $\frac{7}{12}$

5. 某地为了解中学生的日均睡眠时间(单位:h),随机选择了 n 位中学生进行调查,根据所得数据画出样本的频率分布直方图,如图所示,且从左到右的第 1 个,第 4 个,第 2 个,第 3 个小长方形的面积依次构成公差为 0.1 的等差数列,又第四小组的频数是 10,则 n 等于



A. 30　　B. 40
C. 50　　D. 60

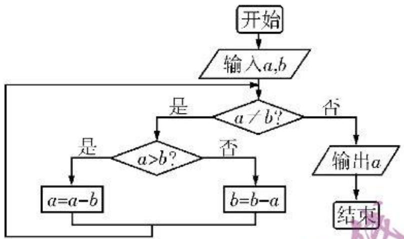
6. 在一次实验中,测得 (x,y) 的四组数值分别是 $A(1,3)$,$B(2,3.8)$,$C(3,5.2)$,$D(4,6)$,则 x 与 y 之间的回归直线方程可能是

A. $\hat{y}=-x+7$　　B. $\hat{y}=1.04x+1.9$　　C. $\hat{y}=1.9x+1.04$　　D. $\hat{y}=1.05x-0.9$

7. 函数 $f(x)=x^3-3x$ 在区间 $[-2,0]$ 的最大值和最小值分别为

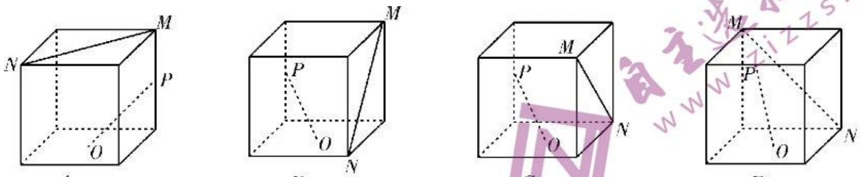
A. 2 和 -2　　B. 2 和 0　　C. 1 和 0　　D. 0 和 -2

8. 如图所示程序框图的算法思路源于我国古代数学名著《九章算术》中的"更相减损术".执行该程序框图,若输入的 a,b 分别为 63,49,则输出的 $a=$



A. 2　　B. 3
C. 5　　D. 7

9. 如图,在正方体中,O 为底面的中心,P 为所在棱的中点,M,N 为正方体的顶点.则满足 $MN\perp OP$ 的是



A.　　B.　　C.　　D.

10. 已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2-x$ 存在单调递减区间,则实数 a 的取值范围是

A. $[-\frac{1}{4},+\infty)$　　B. $(-\frac{1}{4},+\infty)$　　C. $[0,+\infty)$　　D. $(0,+\infty)$

11. 设函数 $f(x)=a^2x+\frac{1}{x-1}+1(x>1)$,在区间 $(0,3)$ 内随机抽取两个实数分别记为 a,b,则 $f(x)>b^2$ 恒成立的概率是

A. $\frac{2}{9}$　　B. $\frac{4}{9}$　　C. $\frac{5}{9}$　　D. $\frac{7}{9}$

12. 已知 $a=(\sin\frac{1}{5}+\cos\frac{1}{5})^2-1$,$b=\frac{2}{3}$,$c=\frac{1}{2}\ln\frac{7}{3}$,则

A. $c>a>b$　　B. $a>c>b$　　C. $b>c>a$　　D. $b>a>c$

第二部分（非选择题　90分）

注意事项：

1. 考生须用0.5毫米黑色墨迹签字笔在答题卡上题目所指示的答案区域作答，作图可用铅笔画线，确认后用0.5毫米黑色墨迹签字笔描清楚，答在试题卷上无效.

2. 本部分共10小题，共计90分.

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 在一次月考中，高二年级8个班的数学平均分如茎叶图所示，这组数字的中位数和平均数分别为 a,b，则 $a-b=$__________.

8	9 9
9	3 1 6 4 0 2

14. $(x-y)(x+2y)^5$ 展开式中 x^4y^2 的系数为__________.

15. 已知正△ABC 边长为1，将△ABC 绕 BC 旋转至△DBC，使得平面 $ABC\perp$ 平面 BCD，则三棱锥 $D-ABC$ 的外接球表面积为__________.

16. 已知正实数 a,b，满足 $ae^2(\ln b-\ln a+a-1)\geqslant be^a$，则 ab 的最大值为__________.

三、解答题：共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或推演步骤.

17.（本小题10分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x-6$.

(1)求 $f(x)$ 在点 $(3,f(3))$ 处的切线方程；

(2)求函数 $f(x)$ 的单调区间.

18.（本小题12分）

某电器公司的市场研究人员为了解公司的经营状况，对该公司最近七个月内的市场占用有率进行了统计，结果如下表所示：

月份	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月
月份代码 x	1	2	3	4	5	6	7
市场占有率 $y(\%)$	11	13	16	15	20	21	23

(1)用相关系数说明市场占有率 y 与月份代码 x 之间的关系是否可用线性回归模型拟合？(结果保留两位小数)

(2)求 y 关于 x 的线性回归方程，并预测该公司10月份的市场占有率.

参考依据：$\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})^2=28$，$\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\overline{y})^2=118$，$\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=56$，$\sqrt{826}\approx28.7$.

参考公式：相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$，线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘法估计分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}$.

19.（本小题12分）

已知函数 $f(x)=x\cdot e^x$.

(1)求 $f(x)$ 的极值；

(2)求方程 $f(x)=a(a\in\mathbf{R})$ 的解的个数.

20.（本小题 12 分）

为了研究学生每天整理数学错题情况，某课题组在某市中学生中随机抽取了 100 名学生调查了他们期中考试的数学成绩和平时整理数学错题情况，并绘制了下列两个统计图表，图 1 为学生期中考试数学成绩的频率分布直方图，图 2 为学生一个星期内整理数学错题天数的扇形图. 若本次数学成绩在 110 分及以上视为优秀，将一个星期有 4 天及以上整理数学错题视为“经常整理”，少于 4 天视为“不经常整理”. 已知数学成绩优秀的学生中，经常整理错题的学生占 70%.

	数学成绩优秀	数学成绩不优秀	合计
经常整理			
不经常整理			
合计			

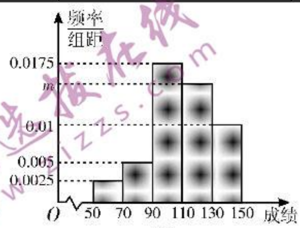


图1

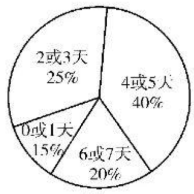


图2

(1)求图 1 中 m 的值；

(2)根据图 1、图 2 中的数据，补全上方 2×2 列联表，判断能否有 95% 的把握认为学生数学成绩优秀与经常整理数学错题有关？

(3)在全市“经常整理错题”的中学生中随机抽取 2 名学生，记数学成绩优秀的人数为 X，求 X 的分布列和数学期望.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

α	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

21.（本小题 12 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BCC_1B_1 为正方形，$AB=BC=2$，$AC=2\sqrt{3}$，M，N 分别为 A_1B_1，AC 的中点.

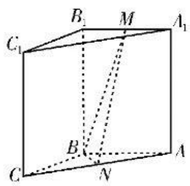
(1)求证：$MN\parallel$ 平面 BCC_1B_1；

(2)再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求二面角 $A-BM-N$ 的平面角的余弦值.

条件①：$BN\perp$ 平面 AA_1C_1C；

条件②：$B_1N=\sqrt{5}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.



22.（本小题 12 分）

已知函数 $f(x)=e^x-a$ 和 $g(x)=ax-\ln x$ 有相同的最小值.

(1)求 a；

(2)若直线 $y=b$ 与 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图象共有四个不同的交点，试探究：从左到右四个交点横坐标之间的等量关系.

乐山市高中 2024 届期末教学质量检测

理科数学参考答案及评分意见

2023. 7

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

1. C　2. B　3. A　4. C　5. C
6. B　7. A　8. D　9. C　10. B
11. D　12. C

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. -0.25；　14. 30；
15. $\frac{5}{3}\pi$；　16. 4.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.

17. 解：（1）$\because f(x)=\frac{1}{3}x^3-x-6$，$\therefore f'(x)=x^2-1$，　……………………1 分

$\therefore x=3$ 时，$f'(3)=8$，$f(3)=0$.　……………………3 分

$\therefore$切线方程为：$y-0=8(x-3)$，即：$8x-y-24=0$.　……………………5 分

（2）令 $f'(x)>0$，解得 $x<-1$ 或 $x>1$.　……………………7 分

令 $f'(x)<0$，解得 $-1<x<1$.　……………………8 分

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(-\infty,-1)$ 单调递增，在 $(-1,1)$ 单调递减.　……………………10 分

18. 解：（1）$\because \sum_{i=1}^{7}\left(x_i-\bar{x}\right)^2=28$，$\sum_{i=1}^{7}\left(y_i-\bar{y}\right)^2=118$，$\sum_{i=1}^{7}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)=56$，

$$\therefore r=\frac{\sum_{i=1}^{7}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{7}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}}=\frac{56}{\sqrt{28\times118}}=\frac{56}{2\sqrt{826}}\approx\frac{56}{57.4}\approx0.98,$$

……………………4 分

$\therefore$两变量之间具有较强的线性相关关系，
故市场占有率 y 与月份代码 x 之间的关系可用线性回归模型拟合.　……………………5 分

（2）$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)}{\sum_{i=1}^{7}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}=\frac{56}{28}=2$，　……………………7 分

又 $\bar{x}=\frac{1}{7}\times\left(1+2+3+4+5+6+7\right)=4$，$\bar{y}=\frac{1}{7}\times\left(11+13+16+15+20+21+23\right)=17$，

$\therefore \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=17-2\times4=9$，　……………………9 分

故 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=2x+9$，　……………………10 分

当 $x=10$ 时，$\hat{y}=2\times10+9=29$，

$\therefore$预测该公司 10 月份的市场占有率为 29%.　……………………12 分

19. 解：（1）$\because f(x)=x\cdot e^x$，$\therefore f'(x)=(1+x)e^x$，　……………………1 分

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-1$.　……………………2 分

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 单调递增. ……………………4 分

$\therefore$ 当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 有极小值 $-\dfrac{1}{e}$. ……………………6 分

（2）$\because x\to-\infty$ 时，$f(x)\to 0$，

$\therefore$①当 $a<-\dfrac{1}{e}$ 时，方程无解； ……………………8 分

②当 $a=-\dfrac{1}{e}$ 或 $a\geqslant 0$ 时，方程有一个解； ……………………10 分

③当 $-\dfrac{1}{e}<a<0$ 时，方程有两个解. ……………………12 分

20. 解：（1）$\because (0.0025+0.005+0.0175+m+0.01)\times 20=1$， ……………………1 分

$\therefore m=0.015$. ……………………2 分

（2）数学成绩优秀的有 $100\times 50\%=50$ 人，不优秀的人 $100\times 50\%=50$ 人，

经常整理错题的有 $100\times(40\%+20\%)=60$ 人，不经常整理错题的是 $100-60=40$ 人，

经常整理错题且成绩优秀的有 $50\times 70\%=35$ 人. ……………………3 分

	数学成绩优秀	数学成绩不优秀	合计
经常整理	35	25	60
不经常整理	15	25	40
合计	50	50	100

……………………4 分

$\therefore K^2=\dfrac{100(35\times 25-15\times 25)^2}{50\times 50\times 60\times 40}=\dfrac{25}{6}>3.841$， ……………………5 分

即有 95% 的把握认为数学成绩优秀与经常整理数学错题有关联. ……………………6 分

（3）在“经常整理错题”抽到数学成绩优秀的学生概率为 $\dfrac{7}{12}$. ……………………7 分

又 X=0,1,2

则 $P(X=0)=C_2^0(\dfrac{5}{12})^2=\dfrac{25}{144}$， ……………………8 分

$P(X=1)=C_2^1\dfrac{7}{12}\cdot\dfrac{5}{12}=\dfrac{35}{72}$， ……………………9 分

$P(X=2)=C_2^2(\dfrac{7}{12})^2=\dfrac{49}{144}$. ……………………10 分

则 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\dfrac{25}{144}$	$\dfrac{35}{72}$	$\dfrac{49}{144}$

……………………11 分

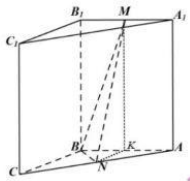
$\therefore E(X)=0\times\dfrac{25}{144}+1\times\dfrac{35}{72}+2\times\dfrac{49}{144}=\dfrac{7}{6}$. ……………………12 分

21. 证明：（1）取 AB 的中点为 K，连接 MK,NK，

$\because$ 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，$\therefore$ 四边形 ABB_1A_1 为平行四边形，

$\because B_1M=MA_1, BK=KA$，

$\therefore MK // BB_1$.



又 $MK \not\subset$ 平面 BCC_1B_1， $BB_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1，

$\therefore MK //$ 平面 BCC_1B_1. ……………………2 分

$\because N, K$ 分别为 AC, AB 中点，

$\therefore NK // BC$.

又 $NK \not\subset$ 平面 BCC_1B_1， $BC \subset$ 平面 BCC_1B_1，

$\therefore NK //$ 平面 BCC_1B_1. ……………………4 分

$\because NK \cap MK = K, NK, MK \subset$ 平面 MKN，

$\therefore$ 平面 $MKN //$ 平面 BCC_1B_1. ……………………5 分

又 $MN \subset$ 平面 MKN，

$\therefore MN //$ 平面 BCC_1B_1. ……………………6 分

（2）选条件①

$\because BN \perp$ 平面 AA_1C_1C，

$\therefore BN \perp CC_1$.

又 $\because$ 侧面 BCC_1B_1 为正方形，

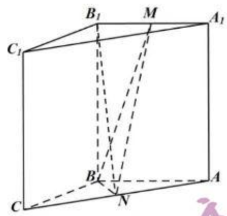
$\therefore CC_1 \perp BC$.

$\because BC \cap BN = B$，

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC. ……………………8 分

选条件②

$\because$ 在 ΔB_1BN 中， $BB_1 = 2, BN = 1, B_1N = \sqrt{5}$，



$\therefore BB_1^2 + BN^2 = B_1N^2$.

$\therefore BB_1 \perp BN$.

又 $\because$ 侧面 BCC_1B_1 为正方形，

$\therefore BB_1 \perp BC$.

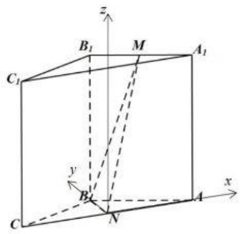
$\because BC \cap BN = B$，

$\therefore BB_1 \perp$ 平面 ABC. ……………………8 分

解法一：如图建立空间直角坐标系，

设 $AB = 2$，则 $A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,1,0)$，$N(0,0,0)$，$M(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},2)$

$\overrightarrow{NB} = (0,1,0)$，$\overrightarrow{NM} = (\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},2)$



设平面 NBM 的法向量为 $\vec{m} = (x,y,z)$

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{NB} = y = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{NM} = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 2z = 0 \end{cases}$$

令 $x = 2$ 得 $y = 0, z = -\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\vec{m} = (2,0,-\frac{\sqrt{3}}{2})$. ……………………9 分

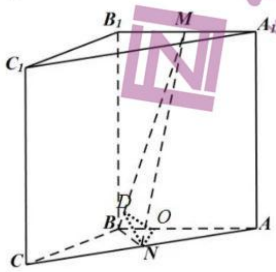
同理可得平面 ABM 的法向量为 $\vec{n} = (1,\sqrt{3},0)$ ……………………10 分

$\therefore \cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{2}{\dfrac{\sqrt{19}}{2}\times 2}=\dfrac{2\sqrt{19}}{19}$.

即二面角 $A-BM-N$ 的平面角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{19}}{19}$. ……………………12 分

解法二： 过点 N 作 $NO\perp AB$ 交 AB 于点 O，

过点 O 作 $OD\perp BM$ 交 BM 于点 D，连结 DN



$\because BB_1\perp$ 平面 ABC，

$\therefore BB_1\perp NO$.

$\because BB_1\cap AB=B$，

$\therefore NO\perp$ 平面 ABB_1A_1.

$\therefore NO\perp BM$.

$\because OD\cap NO=O$，

$\therefore BM\perp$ 平面 NOD.

$\therefore BM\perp ND$.

$\therefore \angle NDO$ 即为所求角. ……………………10 分

$\because NO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$ND=\dfrac{\sqrt{19}}{2\sqrt{5}}$，$OD=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，

$\therefore \cos\angle NDO=\dfrac{OD}{ND}=\dfrac{2\sqrt{19}}{19}$.

即二面角 $A-BM-N$ 的平面角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{19}}{19}$. ……………………12 分

22. **解：**（1）$\because f(x)=e^x-ax$，$\therefore f'(x)=e^x-a$. ……………………1 分

$\because f(x)$ 有最小值，$\therefore a>0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 单调递增.

$\therefore f(x)_{\min}=f(\ln a)=a-a\ln a$. ……………………2 分

$\because g(x)=ax-\ln x$，$\therefore g'(x)=\dfrac{ax-1}{x}$.

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty,\dfrac{1}{a})$ 单调递减，在 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 单调递增.

$\therefore g(x)_{\min}=g(\dfrac{1}{a})=1+\ln a$. ……………………3 分

$\because f(x)_{\min}=g(x)_{\min}$，

$\therefore a-a\ln a=1+\ln a$，即 $\dfrac{a-1}{1+a}=\ln a$. ……………………4 分

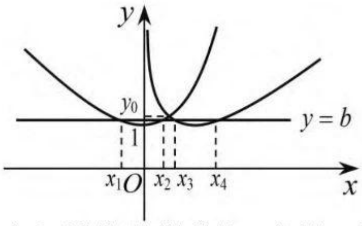
令 $h(a)=\dfrac{a-1}{1+a}-\ln a$，

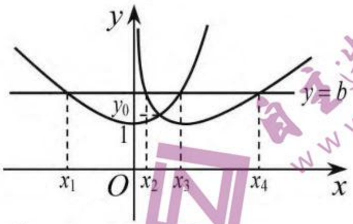
$\therefore h'(a)=\dfrac{2}{(1+a)^2}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{-a^2-1}{a(1+a)^2}\leqslant 0$.

$\therefore h(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减. ……………………5 分

又$\because h(1)=0$，$\therefore a=1$. ……………………6 分

（2）直线$y=b$与$y=f(x)$和$y=g(x)$的图象有四个不同的交点，存在以下两种情况：





由于两种情况证法类似，下证第一种情况：

设直线$y=b$与$y=f(x)$的图象交点横坐标从左到右依次为x_1,x_2，

直线$y=b$与$y=g(x)$的图象交点横坐标从左到右依次为x_3,x_4.

$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=g\left(x_3\right)=g\left(x_4\right)=b$且$x_1<0<x_2<x_3<1<x_4$. ……………………7 分

$\because f(\ln x_3)=x_3-\ln x_3=g\left(x_3\right)=f\left(x_1\right)$且$\ln x_3<0$. ……………………8 分

$\therefore \ln x_3=x_1$. ……………………9 分

同理，$\ln x_4=x_2$. ……………………10 分

$\therefore x_1+x_4=\ln x_3+x_4$，$x_2+x_3=\ln x_4+x_3$

又$\because g\left(x_3\right)=g\left(x_4\right)$，即：$x_3-\ln x_3=x_4-\ln x_4$. ……………………11 分

$\therefore \ln x_3+x_4=\ln x_4+x_3$.

$\therefore x_1+x_4=x_2+x_3$. ……………………12 分

（注：未说明有两种情况，扣 1 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。