七校联合体 2021 届高三第三次联考试卷（5 月） 数学 参考答案

1.【答案】C【详解】因为$\left(2+i\right)i=-1+2i$，所以虚部为 2.

2.【答案】D【详解】$A=R,B=\left[1,+\infty\right)$，$\therefore A\cap B=\left[1,+\infty\right)$.

3.【答案】B【详解】由题得$\mu=300$，$\sigma=10$，所以$P(300-20\le\xi\le300+20)=P(280\le\xi\le320)=0.9545$，

所以$P(x>320)=\dfrac{1-0.9545}{2}\approx0.023$，所以求用电量在 320 度以上的居民户数为 1000×0.023=23.

4.【答案】C【详解】因为函数$f\left(x\right)=\left(2^x+2^{-x}\right)\ln|x|$定义域为$\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$，且$f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，

所以函数$f\left(x\right)=\left(2^x+2^{-x}\right)\ln|x|$为偶函数，其图象关于$y$轴对称，排除 D；

又因为$f\left(1\right)=0$，可排除 B；$f\left(e\right)>f\left(1\right)=0$，可排除 A.

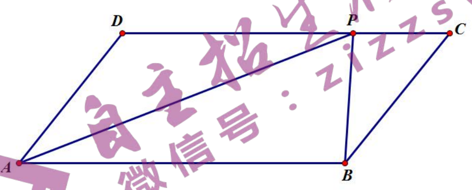
5.【答案】D【详解】由题意可得：$3^a3^b=\left(\sqrt{3}\right)^2=3,\therefore a+b=1$，则：

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\left(a+b\right)=2+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\ge2+2\sqrt{\dfrac{b}{a}\times\dfrac{a}{b}}=4$，当且仅当$a=b=\dfrac{1}{2}$时等号成立，

综上可得：$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$的最小值是 4.

6.【答案】A【详解】记取到的四味药刚好组成“四君子汤”或“四物汤”为事件M.依题得$P\left(M\right)=\dfrac{2}{C_8^4}=\dfrac{1}{35}$.

7.【答案】A【解析】设$\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{AB},\lambda\in[0,1]$



$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB})$

$=((\lambda-1)\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})(\lambda\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$

$=(\lambda^2-\lambda)\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+(1-2\lambda)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=(\lambda^2-\lambda)16+4+(1-2\lambda)4=16\lambda^2-24\lambda+8\ \lambda\in[0,1]$

则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的取值范围是[−1,8]

8.【答案】B【详解】令$h\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{\sin x}$，$\because f\left(x\right)$是定义在$\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上的奇函数，

$\therefore h\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{\sin x}$是定义在$\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上的偶函数.

当$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$\sin x>0$，由$f'\left(x\right)-f\left(x\right)\dfrac{\cos x}{\sin x}<0$，得$f'\left(x\right)\cdot\sin x-f\left(x\right)\cdot\cos x<0$，

$\therefore h'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot\sin x-f(x)\cdot\cos x}{\sin^2 x}<0$，则 $h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减.

将 $f(x)<\dfrac{2\sqrt{3}}{3}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\sin x$ 化为 $\dfrac{f(x)}{\sin x}<\dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$，即 $h(x)<h\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$，则 $\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{\pi}{2}$.

又 $h(x)=\dfrac{f(x)}{\sin x}$ 是定义在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的偶函数.

$\therefore h(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递增，且 $h\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=h\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

当 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 时，$\sin x<0$，将 $f(x)<\dfrac{2\sqrt{3}}{3}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\sin x$ 化为 $\dfrac{f(x)}{\sin x}>\dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$，

即 $h(x)>h\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=h\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$，则 $-\dfrac{\pi}{3}<x<0$.

综上，所求不等式的解集为 $\left(-\dfrac{\pi}{3},0\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

9.【答案】AD【详解】对 A：若 $m\perp\alpha$，$\alpha//\beta$，则 $m\perp\beta$，又 $n\perp\beta$，所以 $m//n$，故正确；

对 B：若 $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则 α 与 β 可能平行，也可能相交，故错误；

对 C：若 $m//\beta$，$n//\beta$，$m,n\subset\alpha$，由于没有强调 m 与 n 相交，故不能推出 $\alpha//\beta$，故错误；

对 D：若 $n\subset\alpha$，$n\perp\beta$，根据面面垂直的判定定理，可得 $\alpha\perp\beta$，故正确.

10.【答案】BD【详解】由函数的图象可得 $A=2$，周期 $T=4\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{12}\right)=\pi$，所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$，

当 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 时，函数取得最大值，即 $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{12}+\varphi\right)=2$，

所以 $2\times\dfrac{\pi}{12}+\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，则 $\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{3}$，又 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，得 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，故函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

对于 A，$f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\neq0$，故 A 不正确；

对于 B，当 $x=-\frac{5\pi}{12}$ 时，$f\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=2\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\times 2+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2$，

即直线 $x=-\frac{5\pi}{12}$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴，故 B 正确；

对于 C，当 $-\frac{2\pi}{3}\le x\le -\frac{\pi}{6}$ 时，$-\pi\le 2x+\frac{\pi}{3}\le 0$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$ 不单调，故 C 错误；

对于 D，将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后，得 $y=2\sin\left(2x-2\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin 2x$ 的图象，即 D 正确.

11.【答案】BCD【详解】当 $PF_2\perp x$ 轴时，$|PF_2|=\frac{b^2}{a}=c=\frac{1}{2}|F_1F_2|$，此时 $\tan\angle PF_1F_2=\frac{1}{2}$，所以 *A* 错误；

$\because |F_1F_2|=\frac{2b^2}{a}$，$\therefore 2c=\frac{2b^2}{a}=\frac{2c^2-2a^2}{a}$，整理得 $e^2-e-1=0$（e 为双曲线的离心率），

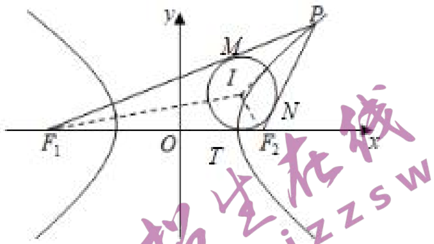
$\because e>1$，$\therefore e=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，所以 *B* 正确.

设 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径为 *r*，由双曲线的定义得 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，$|F_1F_2|=2c$，

$S_{\triangle IPF_1}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot r$，$S_{\triangle IPF_2}=\frac{1}{2}|PF_2|\cdot r$，$S_{\triangle IF_1F_2}=\frac{1}{2}\cdot 2cr=cr$，

$\because S_{\triangle IPF_1}=S_{\triangle IPF_2}+lS_{\triangle IF_1F_2}$，$\therefore \frac{1}{2}|PF_1|\cdot r=\frac{1}{2}|PF_2|\cdot r+\lambda cr$，

故 $\lambda=\frac{|PF_1|-|PF_2|}{2c}=\frac{a}{c}=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以 *C* 正确.



设内切圆与 PF_1、PF_2、F_1F_2 的切点分别为 *M*、*N*、*T*，可得 $|PM|=|PN|\cdot|F_1M|=|F_1T|$，$|F_2N|=|F_2T|$.

由 $|PF_1|-|PF_2|=|F_1M|-|F_2N|=|F_1T|-|F_2T|=2a$，$|F_1F_2|=|F_1T|+|F_2T|=2c$，

可得 $|F_2T|=c-a$，可得 *T* 的坐标为 $(a,0)$，即 *I* 的横坐标为 *a*，故 *D* 正确；

12. 【答案】ACD【详解】设直线 $l_n: y=k_n(x+1)$，联立 $x^2-2nx+y^2=0$，得 $(1+k_n^2)x^2+(2k_n^2-2n)x+k_n^2=0$，

则由 $\Delta=0$，即 $\Delta=(2k_n^2-2n)^2-4k_n^2(1+k_n^2)=0$，得 $k_n=\frac{n}{\sqrt{2n+1}}$（负值舍去）

所以可得 $x_n=\frac{n-k_n}{1+k_n^2}=\frac{n}{n+1}$，$y_n=k_n(1+x_n)=\frac{n\sqrt{2n+1}}{n+1}$，所以 *A* 对，B 错；

因为 $\frac{1-x_n}{1+x_n}=\frac{1}{2n+1}$，$\frac{2n-1}{2n}>\frac{2n-1}{2n+1}$

所以$x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdots x_{2n-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}>\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdots\frac{2n-1}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}$，故 C 对；

因为$\frac{x_n}{y_n}=\sqrt{\frac{1}{2n+1}}=\sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}}$，令$f(x)=x-\sqrt{2}\sin x$，$f'(x)=1-\sqrt{2}\cos x$，

可得$f\left(x\right)$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上递减，可知$x<\sqrt{2}\sin x$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上恒成立.

又$\sqrt{\frac{1}{2n+1}}\le\sqrt{\frac{1}{3}}<\frac{\pi}{4}$. 所以$\sqrt{\frac{1}{2n+1}}<\sqrt{2}\sin\sqrt{\frac{1}{2n+1}}$成立. 故 D 正确.

13.【答案】-2【详解】令$x=0$得：$1=a_0$，令$x=1$得：$-1=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_7$，$\therefore a_1+a_2+\ldots+a_7=-2$.

14.【答案】1【详解】因为$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{QP}|$，表示两点间的距离，

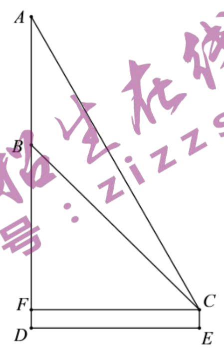
又因为P,Q分别是圆$C:(x+2)^2+(y-1)^2=1$及直线$l:3x-4y=0$上的动点，

所以$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{QP}|$的最小值为圆心到直线的距离减半径，圆心到直线的距离$d=\frac{10}{5}=2$

所以圆上的点到直线的最小值为$d-r=1$所以$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}|$最小值为 1

15. 【答案】12【详解】由题设，如图：$AB=7,BD=10,CE=DF=1$，且$\angle ACB=\angle ACF-\angle BCF$，

$\therefore\tan\angle ACB=\tan(\angle ACF-\angle BCF)=\frac{\tan\angle ACF-\tan\angle BCF}{1+\tan\angle ACF\cdot\tan\angle BCF}$，

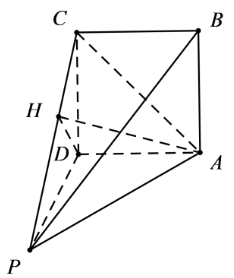


若设$DE=CF=x$米，则$\tan\angle ACF=\frac{AF}{CF}=\frac{16}{x},\tan\angle BCF=\frac{BF}{CF}=\frac{9}{x}$，

$\therefore\tan\angle ACB=\frac{\frac{7}{x}}{1+\frac{144}{x^2}}=\frac{7}{x+\frac{144}{x}}$，而$x>0$，

$\therefore\tan\angle ACB=\frac{7}{x+\frac{144}{x}}\le\frac{7}{2\sqrt{x\cdot\frac{144}{x}}}=\frac{7}{24}$当且仅当$x=12$时等号成立.

$\therefore$由题意，$\angle ACB\in[0,\frac{\pi}{2})$最大时，有$\tan\angle ACB=\frac{7}{24}$，此时人的脚到 D 点的距离为 12 米.



16. 【答案】6π，$\sqrt{5}$　【详解】(1). 因为 CD=1, 则 PD=2 $CD=x\left(0<x<3\right)$

$\because AB\perp$平面PAD，$\therefore AB\perp PD$，又$PD\perp AC$，$\therefore PD\perp$平面$ABCD$，

则四棱锥 $P-ABCD$ 可补形成一个长方体，球 O 的球心为 PB 的中点，

从而球 O 的表面积为 $4\pi(\frac{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}{2})^2=6\pi$.

(2). 设 $CD=x\left(0<x<3\right)$，则 PD=3−x, 四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times\left(3-x\right)x^2\left(0<x<3\right)$，

则 $V'=-x^2+2x$，当 $0<x<2$ 时，$V'>0$；当 $2<x<3$ 时，$V'<0$.

故 $V_{\max}=V\left(2\right)$，此时 $AD=CD=2$，$PD=1$.

过 D 作 $DH\perp PC$ 于 H，连接 AH，则 $\angle AHD$ 为二面角 $A-PC-D$ 的平面角.

$\because DH=\frac{1\times 2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\therefore \tan\angle AHD=\frac{AD}{DH}=\sqrt{5}$.

17.【答案】条件性选择见解析，$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【详解】选①，由正弦定理得 $\sin A\sin B=\sin B\cos\left(A-\frac{\pi}{6}\right)$，因为 $0<B<\pi$，所以 $\sin B\neq 0$，

所以 $\sin A=\cos\left(A-\frac{\pi}{6}\right)$，化简得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A$，所以 $\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=0$，

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$， ……5 分

因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}=(b+c)^2-2bc-2bc\cos\frac{\pi}{3}, a=\sqrt{6}, b+c=2\sqrt{3}$，

所以 $bc=2$， ……8 分

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 2\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$； ……10 分

选②因为 $1+2\cos C\cos B=\cos\left(C-B\right)-\cos\left(C+B\right)$，

所以 $1-\cos\left(C-B\right)+\cos\left(C+B\right)+2\cos C\cos B=1+2\cos\left(C+B\right)=1-2\cos A=0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，

因为 C 为三角形的内角，所以 $A=\frac{\pi}{3}$， ……5 分

因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}=(b+c)^2-2bc-2bc\cos\frac{\pi}{3}, a=\sqrt{6}, b+c=2\sqrt{3}$，

所以 $bc=2$， ……8 分

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 2\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$； ……10 分

选③因为 $\frac{2\tan B}{\tan A+\tan B}=\frac{b}{c}$，所以由正弦定理可得：$\frac{2\tan B}{\tan A+\tan B}=\frac{\sin B}{\sin C}$，

可得 $\frac{2\times\frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}}=\frac{\sin B}{\sin C}$，

可得 $\frac{\frac{2\sin B}{\cos B}}{\frac{\sin A\cos B+\sin B\cos A}{\cos A\cos B}}=\frac{\frac{2\sin B}{\cos B}}{\frac{\sin C}{\cos A\cos B}}=\frac{2\sin B\cos A}{\sin C}=\frac{\sin B}{\sin C}$，

因为 $\sin B\neq 0,\sin C\neq 0$，所以解得 $\cos A=\frac{1}{2}$，因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$， ……5 分

因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}=(b+c)^2-2bc-2bc\cos\frac{\pi}{3},a=\sqrt{6},b+c=2\sqrt{3}$，

所以 $bc=2$， ……8 分

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 2\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……10 分

18.【答案】（1）表格见解析，有；（2）2.

【详解】（1）由题意得列联表如下：

	不太了解	比较了解	总计
男性	250	400	650
女性	150	400	550
总计	400	800	1200

……2 分

K^2 的观测值 $k=\frac{1200\times(250\times 400-150\times 400)^2}{400\times 800\times 650\times 550}\approx 16.783$， ……4 分

因为 $16.783>6.635$，所以有 99% 的把握认为居民对数字人民币的了解程度与性别有关. ……5 分

（2）由题意知，分层抽样抽取的 10 人中，男性 6 人，女性 4 人，

随机变量 ξ 的所有可能取值为 0，1，2，3，

其中 $P(\xi=0)=\frac{C_{n+6}^0C_4^3}{C_{n+10}^3}$，$P(\xi=1)=\frac{C_{n+6}^1C_4^2}{C_{n+10}^3}$，$P(\xi=2)=\frac{C_{n+6}^2C_4^1}{C_{n+10}^3}$，$P(\xi=3)=\frac{C_{n+6}^3}{C_{n+10}^3}$，

所以随机变量 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\dfrac{C_{n+6}^{0}C_{4}^{3}}{C_{n+10}^{3}}$	$\dfrac{C_{n+6}^{1}C_{4}^{2}}{C_{n+10}^{3}}$	$\dfrac{C_{n+6}^{2}C_{4}^{1}}{C_{n+10}^{3}}$	$\dfrac{C_{n+6}^{3}}{C_{n+10}^{3}}$

……9 分

$$E(\xi)=\frac{C_{n+6}^{0}C_{4}^{3}}{C_{n+10}^{3}}\times 0+\frac{C_{n+6}^{1}C_{4}^{2}}{C_{n+10}^{3}}\times 1+\frac{C_{n+6}^{2}C_{4}^{1}}{C_{n+10}^{3}}\times 2+\frac{C_{n+6}^{3}}{C_{n+10}^{3}}\times 3\quad 2\text{，}C_{n+6}^{1}C_{4}^{2}\times 1+C_{n+6}^{2}C_{4}^{1}\times 2+C_{n+6}^{3}\times 3\quad 2C_{n+10}^{3}\text{，}$$

可得，$6(n+6)+4(n+6)(n+5)+\dfrac{1}{2}(n+6)(n+5)(n+4)\quad \dfrac{1}{3}(n+10)(n+9)(n+8)$，

$3(n+6)\left(n^{2}+17n+72\right)\quad 2(n+10)(n+9)(n+8)$，$3\left(n+6\right)\geq 2\left(n+10\right)$，得 $n\geq 2$，

$\therefore n$ 的最小值为 2.　　……12 分

19. **【答案】**（Ⅰ）$a_n=n+1$（Ⅱ）$\lambda=-1$

【解析】（1）由已知，$\left(S_{n+1}-S_n\right)-\left(S_n-S_{n-1}\right)=1$（$n\geq 2$，$n\in\mathbf{N}^*$），

即 $a_{n+1}-a_n=1$（$n\geq 2$，$n\in\mathbf{N}^*$），且 $a_2-a_1=1$.

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1=2$ 为首项，公差为 1 的等差数列．$\therefore a_n=n+1$.　　……5 分

（2）$\because a_n=n+1$，$\therefore b_n=4^n+(-1)^{n-1}\lambda\cdot 2^{n+1}$，要使 $b_{n+1}>b_n$ 恒成立，

$\therefore b_{n+1}-b_n=4^{n+1}-4^n+\left(-1\right)^n\lambda\cdot 2^{n+2}-\left(-1\right)^{n-1}\lambda\cdot 2^{n+1}>0$ 恒成立，　　……7 分

$\therefore 3\cdot 4^n-3\lambda\cdot\left(-1\right)^{n-1}2^{n+1}>0$ 恒成立，

$\therefore\left(-1\right)^{n-1}\lambda<2^{n-1}$ 恒成立．　　……9 分

（ⅰ）当 n 为奇数时，即 $\lambda<2^{n-1}$ 恒成立，当且仅当 $n=1$ 时，2^{n-1} 有最小值为 1，$\therefore\lambda<1$.

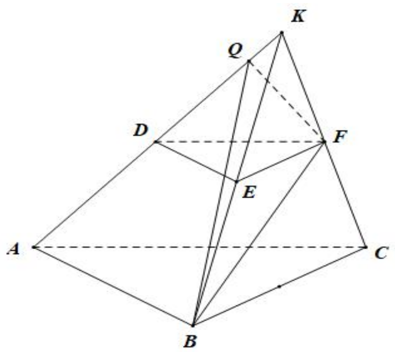
（ⅱ）当 n 为偶数时，即 $\lambda>-2^{n-1}$ 恒成立，当且仅当 $n=2$ 时，-2^{n-1} 有最大值 -2，$\therefore\lambda>-2$.

即 $-2<\lambda<1$，又 λ 为非零整数，则 $\lambda=-1$.

综上所述，存在 $\lambda=-1$，使得对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $b_{n+1}>b_n$.　　……12 分

20. **【答案】**（Ⅰ）证明见解析；（Ⅱ）$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

【详解】（Ⅰ）延长 AD，BE，CF 相交于一点 K，如图所示．



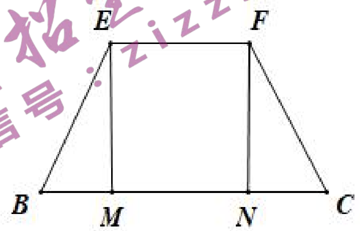
因为平面 $BCFE\perp$ 平面 ABC，且 $AC\perp BC$，$AC\subset$ 平面 ABC，

平面 $BCFE\cap$ 平面 $ABC=BC$，所以 $AC\perp$ 平面 BCK，

因为 $BF\subset$ 平面 BCK，因此 $BF\perp AC$.

由三棱台 $ABC-DEF$ 可得四边形 $BCFE$ 为梯形，

而 $BE=EF=FC=1$，$BC=2$，



故四边形 $BCFE$ 为梯形为等腰梯形，如图，过 E,F 作 BC 的垂线，垂足分别为 M,N，则 $BM=CN=\frac{1}{2}$，故 $\angle EBM=\angle FCN=60^\circ$.

所以 $\triangle BCK$ 为等边三角形，因为 F 为 CK 的中点，则 $BF\perp CK$.

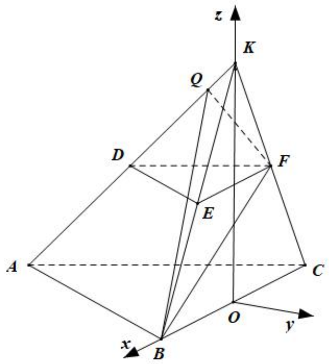
而 $CK\cap AC=C$，所以 $BF\perp$ 平面 $ACFD$.

……5 分

（Ⅱ）方法一：如图，延长 AD， BE， CF 相交于一点 K，由（Ⅰ）得 $\triangle BCK$ 为等边三角形.

取 BC 的中点 O，则 $KO\perp BC$，又平面 $BCFE\perp$ 平面 ABC，所以 $KO\perp$ 平面 ABC .

以点 O 为原点，分别以射线 OB， OK 的方向为 x， z 的正方向，建立空间直角坐标系 $Oxyz$.



由题意得 $B(1,0,0)$， $C(-1,0,0)$， $K\left(0,0,\sqrt{3}\right)$，

$A(-1,-3,0)$， $E\left(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$， $F\left(-\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. ….6 分

因此，$\overrightarrow{AC}=(0,3,0)$，$\overrightarrow{AK}=\left(1,3,\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{AB}=(2,3,0)$.

设平面 ACK 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{AK}\cdot\vec{m}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}3y_1=0\\ x_1+3y_1+\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$，取 $\vec{m}=\left(\sqrt{3},0,-1\right)$； ……8 分

平面 ABK 的法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$.

由 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{AK}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}2x_2+3y_2=0\\ x_2+3y_2+\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$，取 $\vec{n}=\left(3,-2,\sqrt{3}\right)$. ……10 分

于是， $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. ……11 分

所以，二面角 $B-AD-F$ 的平面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$. ……12 分

方法二：过点 F 作 $FQ\perp AK$ 于 Q，连结 BQ .

因为 $BF\perp$ 平面 ACK， $AK\subset$ 平面 ACK，所以 $BF\perp AK$，而 $BF\cap FQ=F$，

则 $AK\perp$ 平面 BQF，而 $BQ\subset$ 平面 BQF，所以 $BQ\perp AK$.

所以$\angle BQF$是二面角$B-AD-F$的平面角. ……8 分

因为$AC\perp$平面BCK，$CK\subset$平面BCK，故$AC\perp CK$，

在$Rt\triangle ACK$中，$AC=3$，$CK=2$，故$AK=\sqrt{13}$，

所以$\sin\angle AKC=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$，得$FQ=1\times\sin\angle AKC=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$. ……10 分

在$Rt\triangle BQF$中，$FQ=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$，$BF=\sqrt{3}$，得$\cos\angle BQF=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

所以二面角$B-AD-F$的平面角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. ……12 分

21.【答案】（1）$a=e^{-2}$；（2）-3.

【详解】（1）由题意，函数$y=f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a$，

当$a\le 0$时，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a>0$，函数$y=f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，

此时，函数$y=f(x)$在定义域上无最大值； ……1 分

当$a>0$时，令$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=0$，得$x=\dfrac{1}{a}$，

由$f'(x)>0$，得$x\in\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$，由$f'(x)<0$，得$x\in\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$，

此时，函数$y=f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$，单调减区间为$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$.

所以函数$f(x)_{\max}=f(x)_{极大值}=f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\ln\dfrac{1}{a}-1=1\Rightarrow a=\dfrac{1}{e^2}$，即$a=e^{-2}$为所求； ……4 分

（3）只需$b\ge(x-2)e^x+\ln x-x$对任意的$x\in(\dfrac{1}{2},1)$恒成立即可.

构造函数$g(x)=(x-2)e^x+\ln x-x$，

$g'(x)=(x-1)e^x+\dfrac{1}{x}-1=(x-1)\left(e^x-\dfrac{1}{x}\right)$，

$\because x\in(\dfrac{1}{2},1)$，$\therefore x-1<0$，且$t(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$单调递增， ……6 分

$\because t(\dfrac{1}{2})=e^{\frac{1}{2}}-2<0,t(1)=e-1>0$，

$\therefore$一定存在唯一的 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $t(x_0)=0$，即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}, x_0=-\ln x_0$，……7 分

且当 $\frac{1}{2}<x<x_0$ 时，

$t(x)<0$，即 $g'(x)>0$；当 $x_0<x<1$ 时，$t(x)>0$，即 $g'(x)<0$.

所以，函数 $y=g(x)$ 在区间 $(\frac{1}{2},x_0)$ 上单调递增，在区间 $(x_0,1)$ 上单调递减，

$\therefore g(x)_{\max}=g\left(x_0\right)=\left(x_0-2\right)\mathrm{e}^{x_0}+\ln x_0-x_0=1-2\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)$， ……9 分

$\because x\in(\frac{1}{2},1)$，$\therefore y=1-2(x_0+\frac{1}{x_0})$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 上单调递增，

$\therefore 1-2(x_0+\frac{1}{x_0})\in(-4,-3)$，则 $b\geq-3$，

因此 b 的最小整数值为 -3. ……12 分

22.【答案】(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$；(2) $\sqrt{6}$；(3) 证明见解析.

【详解】(1) 因为 $A\left(-2,0\right)$，所以 $a=2$ 因为两个焦点与短轴一个顶点构成等腰直角三角形，所以 $b=c$，

又 $b^2+c^2=a^2$，所以 $b=c=\sqrt{2}$，

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. ……3 分

(2) 方法一：设 $M\left(x_m,y_m\right)$，$k_{MP}=\frac{y_m}{x_m-1}$，$k_{AM}=\frac{y_m}{x_m+2}$，$k_{AM}\cdot k_{MP}=-1$，

$\begin{cases}\frac{y_m}{x_m-1}\cdot\frac{y_m}{x_m+2}=-1\\ \frac{x_m^2}{4}+\frac{y_m^2}{2}=1\end{cases}$，$\begin{cases}x_m=0\\ y_m=\pm\sqrt{2}\end{cases}$，$\begin{cases}x_m=-2\\ y_m=0\end{cases}$（舍） 所以 $|AM|=\sqrt{6}$. ……6 分

方法二：设 $M\left(x_m,y_m\right)$，因为 AM 与 MN 垂直，所以点 M 在以 AP 为直径的圆上，

又以 AP 为直径的圆的圆心为 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$，半径为 $\frac{3}{2}$，方程为 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$，

$\begin{cases}\left(x_m+\frac{1}{2}\right)^2+y_m^2=\frac{9}{4}\\ \frac{x_m^2}{4}+\frac{y_m^2}{2}=1\end{cases}$，$\begin{cases}x_m=0\\ y_m=\pm\sqrt{2}\end{cases}$，$\begin{cases}x_m=-2\\ y_m=0\end{cases}$（舍） 所以 $|AM|=\sqrt{6}$ ……6 分

方法三：设直线 AM 的斜率为 k，$l_{AM}: y=k(x+2)$ ，其中 $k\neq 0$

$\begin{cases} y=k(x+2) \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 　化简得 $(1+2k^2)x^2+8k^2x+8k^2-4=0$

当 $\Delta>0$ 时，$x_A\cdot x_M=\dfrac{8k^2-4}{1+2k^2}$ 得 $x_M=\dfrac{2-4k^2}{1+2k^2}$ ，$y_M=\dfrac{4k}{2k^2+1}$

显然直线 AM,MN 存在斜率且斜率不为 0.

因为 AM 与 MN 垂直，所以 $k_{MP}=\dfrac{\dfrac{4k}{2k^2+1}}{\dfrac{2-4k^2}{1+2k^2}-1}= \ =-\dfrac{1}{k}$，得 $k^2=\dfrac{1}{2}$，$k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， $x_M=0$ ，

所以 $|AM|=\sqrt{1+k^2}|x_M+2|=\sqrt{6}$ ……6 分

（3）直线 NQ 恒过定点 $(2,0)$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，由题意，设直线 MN 的方程为 $x=my+1$，

由 $\begin{cases} x=my+1, \\ x^2+2y^2-4=0 \end{cases}$ 得 $(m^2+2)y^2+2my-3=0$，

显然，$\Delta>0$，则 $y_1+y_2=\dfrac{-2m}{m^2+2}$，$y_1y_2=\dfrac{-3}{m^2+2}$， ……7 分

因为直线 PQ 与 AM 平行，所以 $k_{PQ}=k_{AM}=\dfrac{y_1}{x_1+2}$，则 PQ 的直线方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x-1)$，

令 $x=\dfrac{5}{2}$，则 $y=\dfrac{\frac{3}{2}y_1}{x_1+2}=\dfrac{3y_1}{2(my_1+3)}$，即 $Q\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3y_1}{2(my_1+3)}\right)$ ， ……8 分

$$k_{NQ}=\frac{y_2-\dfrac{3y_1}{2(my_1+3)}}{x_2-\dfrac{5}{2}}=\frac{2my_1y_2+6y_2-3y_1}{(my_1+3)(2my_2-3)},$$

直线 NQ 的方程为 $y-y_2=\dfrac{2my_1y_2+6y_2-3y_1}{2m^2y_1y_2+6my_2-3my_1-9}(x-x_2)$， ……10 分

令 $y=0$，得 $x=\dfrac{2my_1y_2+15y_2-3y_1}{2my_1y_2+6y_2-3y_1}$，

因为 $2my_1y_2=3(y_1+y_2)$，故 $x=\dfrac{18y_2}{9y_2}=2$，

所以直线 NQ 恒过定点 $\left(2,0\right)$. ……12 分