绝密★启用前（新高考卷）

数学试卷

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1． 已知 $z+\mathrm{i}=z\mathrm{i}$，则 $|\bar{z}-\mathrm{i}|=$

A． $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　B． $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C． 1　　D． $\frac{1}{2}$

2．已知集合 $M=\{x||x-1|<2\}$， $N=\{x|2^x<8\}$，则 $M\cap N=$

A． $\{x|-3<x<1\}$　　B． $\{x|-2<x<2\}$　　C． $\{x|-1<x<3\}$　　D． $\{x|-1<x<2\}$

3． 已知 $\boldsymbol{a}$， $\boldsymbol{b}$ 为单位向量，若 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=$

A． 0　　B． -1　　C． 1　　D． 2

4． 我国“复兴号”高铁列车是世界上运营速度最快的轮轨列车. 在平直的铁轨上停着一辆“复兴号”高铁列车，列车与铁轨上表面接触的车轮半径为 R，且某个车轮上的点 P 刚好与铁轨的上表面接触，若该列车行驶了距离 s，则此时 P 到铁轨上表面的距离为

A． $R\sin\frac{s}{R}$　　B． $2R\sin\frac{s}{R}$　　C． $R(1-\cos\frac{s}{R})$　　D． $R(1+\cos\frac{s}{R})$

5． 已知 $x^2+y^2=2x$，则 $\frac{y}{x+2}$ 的最大值为

A． $\frac{1}{2}$　　B． $\frac{1}{3}$　　C． $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D． $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6． 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_7>0$， $S_7<0$，则

A． $a_3+a_6<0$　　B． $a_5+a_8>0$　　C． $S_4<S_7$　　D． $S_{14}>3a_9$

7． 定义域为 $(0,+\infty)$ 的函数 $f(x)$ 的导数为 $f'(x)$，若 $f(1)=1$，且 $-\frac{1}{x}<f'(x)<0$，则

A． $f(\ln 2)>\log_2 \mathrm{e}$　　B． $f(\frac{1}{\pi})>\pi$　　C． $f(\lg 2)<\frac{2}{\mathrm{e}}$　　D． $f(\frac{1}{2})<\mathrm{e}$

8． 已知三棱锥 $P-ABC$ 的各顶点都在同一球面上，若 $AB=2$，$PC=\sqrt{3}$，$AC=PA=\sqrt{11}$，$BC=PB=3$，则该球的体积为

A. $4\sqrt{3}\pi$　　B. $8\sqrt{6}\pi$　　C. $\frac{20\sqrt{5}\pi}{3}$　　D. $\frac{32\pi}{3}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知 $\sin x=\dfrac{3}{5}$，其中 $x\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，则

A． $\tan x=-\dfrac{4}{3}$　　B． $\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　C． $\sin 2x=-\dfrac{24}{25}$　　D． $\cos(x-\dfrac{\pi}{4})=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

10. 已知直线 a，b，c 两两异面，且 $a\perp c$，$b\perp c$，下列说法正确的是

A. 存在平面 α，β，使 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，且 $c\perp\alpha$，$c\perp\beta$

B. 存在平面 α，β，使 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，且 $c/\!/\alpha$，$c/\!/\beta$

C. 存在平面 γ，使 $a/\!/\gamma$，$b/\!/\gamma$，且 $c\perp\gamma$

D. 存在唯一的平面 γ，使 $c\subset\gamma$，且 a，b 与 γ 所成角相等

11. 已知 O 为坐标原点，双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点 F 关于 C 的一条渐近线的对称点 P 恰好在 C 上，若直线 FP 交 C 的左半支于点 Q，则

A． C 的渐近线方程为 $y=\pm 2x$　　B. $\triangle POF$ 的面积为 a^2

C. $|FQ|:|PQ|=1:2$　　D. $\triangle POQ$ 是等腰三角形

12. 已知当 $x>0$ 时，$\dfrac{1}{1+x}<\ln(1+\dfrac{1}{x})<\dfrac{1}{x}$，则

A. $\dfrac{10}{9}<\mathrm{e}^{\frac{1}{9}}<\dfrac{9}{8}$　　B. $\ln 9<1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{9}<\ln 10$

C. $\left(\dfrac{10}{\mathrm{e}}\right)^9<9!$　　D. $\left(\dfrac{\mathrm{C}_9^0}{9^0}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{C}_9^1}{9^1}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{\mathrm{C}_9^9}{9^9}\right)^2<\mathrm{e}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1-x}{x}$，则 $f(\dfrac{1}{\mathrm{e}})+f(-\dfrac{1}{\mathrm{e}})=$__________.

14. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，E，F 分别为 AB，BC 的中点，则多面体 A_1C_1-AEFC 的体积为__________.

15. 有甲、乙、丙三个开关和 A，B，C 三盏灯，各开关对灯的控制互不影响. 当甲闭合时 A，B 亮，当乙闭合时 B，C 亮，当丙闭合时 A，C 亮. 若甲、乙、丙闭合的概率分别为 $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{4}$，且相互独立，则在 A 亮的条件下，B 也亮的概率为__________.

16. 抛物线的光学性质是：位于抛物线焦点处的点光源发出的每一束光经抛物线反射后的反射线都与抛物线的对称轴平行或重合. 设抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，过点 $(7,0)$ 的直线交 C 于 A，B 两点，且 $AF\perp BF$，

若 C 在 A，B 处的切线交于点 P，Q 为 $\triangle PAB$ 的外心，则 $\triangle QAB$ 的面积为____________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

在 $\triangle ABC$ 中，$2\sin A=\sin C$，$\cos B=\dfrac{11}{16}$.

（1）求 $\sin A$；

（2）求 $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆的面积之比.

18.（12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_n-3a_{n+1}+a_{n+2}=n-1$.

（1）$\{a_{n+1}-a_n+n\}$ 是否为等比数列？并说明理由；

（2）若 $a_1=a_2=1$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

19.（12 分）

某中学为了调查学生每周运动时长，随机从全校男生和女生中各抽取了 90 名学生进行问卷调查，并对每周不同运动时长所对应的人数进行了统计，得到如下数据：

	每周平均运动时长少于 7 小时	每周平均运动时长不少于 7 小时
男生	45	45
女生	60	30

（1）能否有 99%的把握认为男生与女生每周平均运动时长有差异？

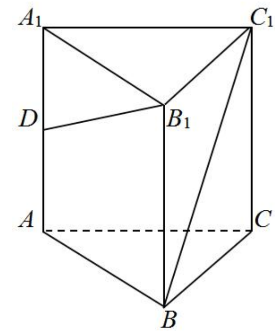
（2）现随机从全校男生和女生中各随机抽取 2 名学生，记其中男生和女生中每周平均运动时长不少于 7 小时的人数分别为 X，Y，且记 $Z=X-Y$，证明：$E(Z)=E(X)-E(Y)$.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P\left(K^2\geqslant k_0\right)$	0.050	0.010	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

20.（12 分）

如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长均相等，D 为 AA_1 的中点.



（1）证明：$B_1D \perp BC_1$；

（2）设 M，N 分别是棱 AC，BC 上的点，若点 B_1，D，M，N 在同一平面上，且 $\triangle ABC$ 的面积是 $\triangle CMN$ 的面积的 3 倍，求二面角 $A-B_1M-N$ 的正弦值.

21.（12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的右焦点为 F，上顶点为 B，点 $P(2,1)$，且 $PF\perp BF$.

（1）求 C 的方程；

（2）过 P 的直线交 C 于 M，N 两点，证明：直线 BF 平分 $\angle MFN$.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x}{x+1}}$，$g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）证明：$-\dfrac{1}{4}<g(x)<1$；

（3）设 $x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=f(x_n)$，证明：$x_1x_2\cdots x_n<\dfrac{\pi}{2}$.