2022—2023 学年度下学期模拟考试高三年级数学科试卷

答案

一．单选：1-8：CCBD　ABDA

二．多选：9. BCD　10. BD　11. ABD　12. BD

三．填空 13．21　14. $\frac{2}{3}$　15. $y=\frac{9}{4}$　$-\frac{7}{2}$　16. $\frac{\sqrt{2}}{2e}$

四 17 解：（1）$\because T_n=a_1a_2a_3\cdots a_n$，

$\therefore$当$n\geq 2$时，$a_n=\frac{T_n}{T_{n-1}}=\frac{(n+1)(n+2)/2}{n(n+1)/2}=\frac{(n+2)}{n}$ ·······3 分

当$n=1$，$a_1=3$，满足上式，

$\therefore a_n=\frac{(n+2)}{n}$ ……………………………………………………5 分

（3）$\because b_n=na_n=n+2$ ·······························6 分

$\therefore \sum_{n=1}^{2023} b_n\cdot sin\frac{n\pi}{2}=(b_1-b_3)+(b_5-b_7)+\cdots+(b_{2021}-b_{2023})=(-2)\times 506=$

-1012 ………………………… ····················· 10 分

18（1）由题意知，全校总人数是$140+50+300+200+800+510=2000$

第四项体育运动中达标的人数是$200\times 0.75=150$

故所求概率为$\frac{150}{2000}=0.075$．……………………………………………4 分

（2）设事件A为"从第四项体育运动项目中随机选取一人获得体育达标"，则$P(A)$估计为0.75

设事件B为"从第五项体育运动项目中随机选取一人获得体育达标"．则$P(B)$估计为0.8．

故所求概率为$P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)$ 来源：高三答案公众号

$=P(A)(1-P(B))+(1-P(A))P(B)=0.75\times 0.2+0.25\times 0.8=0.35$…………8 分

（3）$D\xi_1=0.24$，$D\xi_2=0.16$　··························· 10 分

$D\xi_1>D\xi_4>D\xi_2=D\xi_5>D\xi_3>D\xi_6$．…………………………………………12 分

19 解：（1） $h(x)=\dfrac{\sin x-\cos x+2\sin x\cos x}{\sin 2x}=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin 2x}+1$……………2 分

设 $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\dfrac{\pi}{4})$，$\because x-\dfrac{\pi}{4}\in(0,\dfrac{\pi}{4})$，$\therefore t\in(0,1)$…………4 分

$\because t^2=1-\sin 2x$，$\therefore y=\dfrac{t}{1-t^2}+1=\dfrac{1}{\dfrac{1}{t}-t}+1$……………………6 分

又因为 y 在 $t\in(0,1)$ 上单调递增，则 $y\in(1,+\infty)$，所以 $h(x)$ 的值域为 $(1,+\infty)$….8 分

（2）$\because g(A)=\sin(A+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，　$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$

选①②：$\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$a=\sqrt{3}$，$b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{2}$；

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\dfrac{6+2\sqrt{3}}{8}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$.

选①③：$a=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$，$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{8}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{8}$.

选②③：因为 $3=1+c^2-2\cdot 1\cdot c\cdot\dfrac{1}{2}$ 所以 $c^2-c-2=0$ 则 $c=2$ 或 $c=-1$（舍）

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$……………………………………………………12 分

20 解：（1）法一：证明：取 BC 中点为 G，连接 FG 和 DG，有 $FG//AC$，

$\therefore FG//$ 平面 ACE，

又 $DG//EC$，$\therefore DG//$ 平面 ACE，　$\because FG\cap DG=G$，

$\therefore$ 平面 $DGF//$ 平面 ACE.

又 $DF\subset$ 平面 DGF，$\therefore DF//$ 平面 ACE…………………………4 分

法二：取 BC、AC 中点 G、K，连接 EK,FK，$\because F,K$

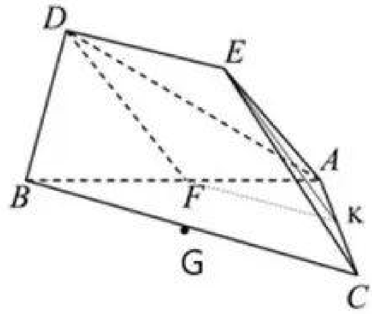
分别是 AB,AC 的中点，$\therefore FK//GC, FK=GC$，

又 $\because DE//GC, DE=GC$，所以 $DE//FK, DE=FK$，

$\therefore KEDF$ 为平行四边形 $\therefore DF//EK$

又 $\because DF\not\subset$ 平面ACE，$EK\subset$ 平面ACE，

$\therefore DF//$ 平面 ACE ……………………………4 分



（2）法一：$\because$ 四边形 $BCED$ 为梯形，$DE=2$，$BC=4$，G 为 BC 中点，

$\therefore DE\underline{\underline{//}}CG$，即四边形 $GCED$ 为平行四边形，$\therefore CE//GD$.

$\therefore$ 要求 CE 与平面 ABD 所成角，只需求 DG 与平面 ABD 所成角，连接 GE，AG

由题意可知，$AG\perp BC$，$GE\perp BC$，$\therefore BC\perp$ 面 AGE，

又 $\because BC\subset$ 平面ABC $\therefore$ 平面 $ABC\perp$ 平面 AGE，

$\therefore$ 点 E 到面 ABC 的距离就是点 E 到 AG 的距离.

$\because DE//BC$，$\therefore DE\perp$ 面 AGE，$\therefore \angle AED=90^\circ$，$\because DE=2, AD=\sqrt{7}$，$\therefore AE=\sqrt{3}$

又 $\because GE=1, AG=2$

$\therefore$ 点 E 到 AG 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……………………………8 分

在三棱锥 $D-ABG$ 中，$V_{D-ABG}=V_{E-ABG}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，根据 $BD=1, AD=\sqrt{7}, AB=2\sqrt{2}\therefore S_{\triangle ABD}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，

记点 G 到面 ABD 的距离为 h，由 来源：高三答案公众号

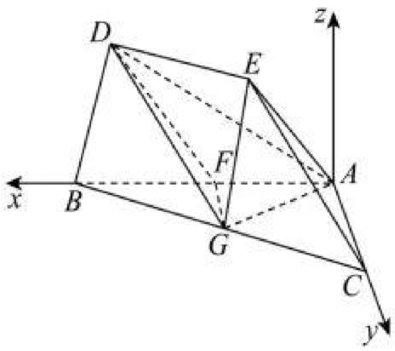
$V_{D-ABG}=V_{G-ABD}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{2}\cdot h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\therefore h=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$ ………………10 分

所以 CE 与平面 ABD 所成角的正弦值为 $\dfrac{h}{DG}=\dfrac{2\sqrt{105}}{35}$ …………………………12 分

法二：过点 A 作平面 ABC 的垂线 AT，以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AT}$ 的方向为 x，y，z 轴的正方向，

建立空间直角坐标系，如图所示

设点 $A(0,0,0),B(2\sqrt{2},0,0),C(0,2\sqrt{2},0),G(\sqrt{2},\sqrt{2},0),D(a,b,c)$,



$\because BD=1,CD=\sqrt{17},AD=\sqrt{7}$ ……………………6 分

$\therefore\begin{cases}BD^2=(a-2\sqrt{2})^2+b^2+c^2=1\\CD^2=a^2+(b-2\sqrt{2})^2+c^2=17\\AD^2=a^2+b^2+c^2=7\end{cases}\therefore a=\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$，$b=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore D(\dfrac{7\sqrt{2}}{4},-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ ……………………8 分

设平面 ADB 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

$\overrightarrow{BD}=(-\dfrac{\sqrt{2}}{4},-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{2}),\overrightarrow{AB}=(2\sqrt{2},0,0)$

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}\Rightarrow\vec{n}=(0,2\sqrt{3},\sqrt{2})$ ……………………10 分

又 $\because\overrightarrow{GD}=(\dfrac{3\sqrt{2}}{4},-\dfrac{5\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{2}),|\overrightarrow{GD}|=\sqrt{5}$

$\sin\alpha=|\cos<\vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}>|=|\cos<\vec{n}\cdot\overrightarrow{GD}>|=\dfrac{2\sqrt{105}}{35}$, ……………………11 分

故 CE 与平面 ADB 所成角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{105}}{35}$ ……………………………12 分

21 解（1）曲线上每一点到点 $Q(0,2)$ 的距离减去到 x 轴的距离的差都是 2,即曲线上每一点到点 $Q(0,2)$ 的距离与到直线 $y=-2$ 的距离相等,

所以曲线 Γ 为抛物线,

$\because p=4\quad\therefore x^2=8y(x\neq0$ ………………4 分

（2）设点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$， $x_1>0,x_2<0,x_3>0$

$\frac{S_2}{S_{\Delta ABG}}=\frac{|AM|}{|AB|},\frac{S_3}{S_{\Delta CBG}}=\frac{|CN|}{|BC|}$,来源：高三答案公众号

$\because G$为ΔABC的重心 $\quad\therefore S_{\Delta ABG}=S_{\Delta CBG}=\frac{1}{3}S_1$

$\therefore S_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{|AM|}{|AB|}S_1,\quad S_3=\frac{1}{3}\cdot\frac{|CN|}{|BC|}S_1$

由相似三角形可知 $\frac{|AM|}{|AB|}=\frac{x_1}{x_1-x_2},\frac{|CN|}{|BC|}=\frac{x_3}{x_3-x_2}$ 且 $x_1+x_2+x_3=0$

可得 $\frac{S_2+S_3}{S_1}=\frac{1}{3}\cdot(\frac{|AM|}{|AB|}+\frac{|CN|}{|BC|})=\frac{1}{3}(\frac{x_1}{x_1-x_2}+\frac{x_3}{x_3-x_2})$

$=\frac{1}{3}(\frac{x_1}{x_1-x_2}+\frac{x_1+x_2}{x_1+2x_2})$ ……………………………8 分

令 $u=\frac{x_1}{x_2}$， $\frac{S_2+S_3}{S_1}=\frac{1}{3}(\frac{u}{u-1}+\frac{u+1}{u+2})=\frac{1}{3}(2+\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+2})$

$=\frac{1}{3}(2+\frac{3}{(u-1)(u+2)})$ …………10 分

因为 $3|AM|<|BM|$，所以 $3x_1<-x_2$，故 $-\frac{1}{3}<u<0$,

$(u-1)(u+2)=u^2+u-2\in\left(-\frac{20}{9},-2\right)$

$\therefore\frac{S_2+S_3}{S_1}\in\left(\frac{1}{6},\frac{13}{60}\right)$, ……………………………………12 分

22.（1）函数 $f(x)=\frac{a}{x^2}+\frac{\ln x}{x}$ 的定义域为 $[\frac{1}{e},e]$,

求导得：$f'(x)=\frac{x-x\ln x-2a}{x^3}\geq 0$ 恒成立,

即 $2a\leq x-x\ln x$ 在 $\left[\frac{1}{e},e\right]$ 恒成立，令 $h(x)=x-x\ln x$, 则 $h'(x)=-\ln x$

当 $x\in\left[\frac{1}{e},1\right]$, $h'(x)>0$, 则 $h(x)$ 单调递增，$x\in[1,e]$, $h'(x)<0$, 则 $h(x)$ 单调递减,

而$h(\frac{1}{e})=\frac{2}{e}, h(e)=0, \therefore h(x)_{min}=h(e)=0 \therefore 2a \le 0 \therefore a \le 0$ ············ 4 分

(2)因为 $g(x)=\frac{a}{x}+\ln x$，则$g'(x)=\frac{x-a}{x^2}$，

当$a \le 0$时，$g'(x)>0$恒成立，则$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，不合题意

当$a>0$时，$g'(x)<0$的解集为$(0,a)$，$g'(x)>0$的解集为$(a,+\infty)$，

即$g(x)$的单调增区间为$(a,+\infty)$，单调减区间为$(0,a)$，

依题意：$g(x)_{min}=g(a)=1+\ln a<3$，解得$a \in (0,e^2)$， ··················· 6 分

设$x_1<x_2$，则$0<x_1<a<x_2$，要证$x_1x_2>a^2$，即证$x_2>\frac{a^2}{x_1}>a$，即证 $g(x_2)>g\left(\frac{a^2}{x_1}\right)$，

即证 $g(x_1)>g\left(\frac{a^2}{x_1}\right)$，设$\varphi(x)=g(x)-g(\frac{a^2}{x})=2\ln x+\frac{a}{x}-\frac{x}{a}-2\ln a, x \in (0,a)$，

则$\varphi'(x)=\frac{2}{x}-\frac{a}{x^2}-\frac{1}{a}=\frac{-(x-a)^2}{ax^2}<0$，即$\varphi(x)$在$(0,a)$上单调递减，有$\varphi(x)>\varphi(a)=0$，

即 $g(x)>g\left(\frac{a^2}{x}\right)(x \in (0,a))$，则 $g(x_1)>g\left(\frac{a^2}{x_1}\right)$成立，因此$x_1x_2>a^2$成立.··········8 分

要证$x_1x_2<ae^2$，即证$a<x_2<\frac{ae^2}{x_1}$，即证 $g(x_2)<g\left(\frac{ae^2}{x_1}\right)$，即证 $g(x_1)<g\left(\frac{ae^2}{x_1}\right)$，

即证 $3<\frac{x_1}{e^2}-\ln x_1+\ln a+2, x_1 \in (0,a)$，

而$\frac{a}{x_1}+\ln x_1=3 \Leftrightarrow a=x_1(3-\ln x_1)$，即证$1<\frac{x_1}{e^2}+\ln(3-\ln x_1), x_1 \in (0,a)$，

令 $T(x)=\frac{x}{e^2}+\ln(3-\ln x), x \in (0,e^2)$，则$T'(x)=-\frac{1}{x(3-\ln x)}+\frac{1}{e^2}$，

设 $G(x)=x(3-\ln x), x \in (0,e^2)$，求导得$G'(x)=2-\ln x>0$，

即 $G(x)$在$(0,e^2)$上单调递增，则有$0<G(x)<G(e^2)=e^2$，

即$T'(x)<0$，$T(x)$在$(0,e^2)$上单调递减，而$(0,a) \subseteq (0,e^2)$，

当$x \in (0,a)$时，$T(x)>T(a)>T(e^2)=1$，

则当$x \in (0,a)$时，$1<\frac{x}{e^2}+\ln(3-\ln x)$成立，故有$x_1x_2<ae^2$成立，

所以，$a^2<x_1x_2<ae^2$. ·· 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。