

□ □ □ □ ■ □ ■

贵阳第一中学 2021 届高三适应性月考卷 (五)

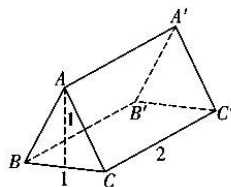
理科数学参考答案

一、选择题 (本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	D	C	C	D	B	D	C	A	A	B

【解析】

- 数形结合, 可知直线 $x-y=0$ 与椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 有两个交点, 故选 A.
- 因为 $\bar{z}_1=1+i$, $\bar{z}_1 \cdot z_2=1$, 所以 $z_2=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{2}$, 所以其虚部为 $-\frac{1}{2}$, 故选 B.
- 因为随机变量 X 服从正态分布 $N(1, \sigma^2)$, 所以曲线关于 $x=1$ 对称, 因为 $P(X \geq 3)=0.2$, 所以 $P(-1 < X < 3)=1-2 \times 0.2=0.6$, 故选 D.
- 由题意, 因为 $P=P_0 \cdot e^{\frac{1}{3}t}$, 所以 $\frac{5}{1000}P_0 \geq P_0 \cdot e^{\frac{1}{3}t}$, 所以 $\frac{5}{1000} \geq e^{\frac{1}{3}t}$, $\ln \frac{5}{1000} \geq \frac{1}{3}t$, $\frac{1}{3}t \geq \ln \frac{1000}{5} = \ln 200 = \ln(5^2 \times 2^3) = 2\ln 5 + 3\ln 2 = 5.297$, 所以 $t \geq 15.891$, 故正整数 n 的最小值为 16, 故选 C.
- $\vec{a}-\vec{b}=(2, 2)$, 因为 $\vec{a}-\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 共线, 所以 $2m-2 \times (-1)=0$, 解得 $m=-1$, 故选 C.
- 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线为 $y=\pm \frac{b}{a}x$, 因为两条渐近线均与圆 $(x-c)^2+y^2=4a^2$ 相切, 所以圆心 $(c, 0)$ 到直线 $y=\frac{b}{a}x$ 的距离等于半径 $2a$, 即 $d=\frac{\frac{bc}{a}}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}=b=2a$, 又因为 $c^2=a^2+b^2$, 整理得到 $c=\sqrt{5}a$, 故双曲线 C 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$, 故选 D.
- 由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A=2\sqrt{3}$, 得 $AB=2$, 故选 B.
- 该三视图对应的直观图是三棱柱, 如图 1 所示, 所以 $AB=AC=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $S_{\text{侧}}=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right) \cdot 2=2\sqrt{5}+2$,



理科数学参考答案 · 第 1 页 (共 10 页)

□ □ □ □ ■ □ ■

又 $S_{\text{底}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right) = 1$, 所以 $S_{\text{表}} = 2\sqrt{5} + 3$, 故选 D.

图1

$$9. \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} + \frac{1}{\sin 550^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} - \frac{1}{\sin 10^\circ} = \frac{\sqrt{3} \sin 10^\circ - \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{2 \sin(10^\circ - 30^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ} = -4, \text{ 故选 C.}$$

10. $y = e^{2x}$, 所以 $y' = 2e^{2x}$, 设曲线在 $P(x_0, e^{2x_0})$ 处的切线与直线 $2x - y - 4 = 0$ 平行, 则

$2e^{2x_0} = 2$, 所以 $2x_0 = 0$, $x_0 = 0$, 切点 $P(0, 1)$, 曲线 $y = e^{2x}$ 上的点到直线 $2x - y - 4 = 0$ 的

最短距离即为切点 P 到直线 $2x - y - 4 = 0$ 的距离 $d = \frac{|-1-4|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$, 故选 A.

11. 抛物线 $y^2 = 16x$ 的准线方程为 $x = -4$, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 过点 A 作准线的垂线

AH , 由抛物线的定义可知, $|AF| = |AH| = 12$, $\therefore x_1 + 4 = 12$, $x_1 = 8$, $y_1^2 = 16 \times 8$, 不妨

$y_1 = 8\sqrt{2}$, 设直线 AB 的方程为 $x = my + 2$, 由 $\begin{cases} x = my + 2, \\ y^2 = 16x, \end{cases}$ 得 $y^2 - 16my - 32 = 0$,

$y_1 y_2 = -32$, $\therefore y_2 = -2\sqrt{2}$, 四边形 $OAFB$ 的面积 $S = \frac{1}{2} |OF| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \times 4 \times 10\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$,

故选 A.

12. (1) 因为 $b = 6 \ln 4^5$, $c = 6 \ln 5^4$, 因为 $5 > 4$ 且 $f(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 上是减函数, 所以 $f(5) < f(4)$,

即 $\frac{\ln 5}{5} < \frac{\ln 4}{4}$, 所以 $4 \ln 5 < 5 \ln 4$, $\ln 5^4 < \ln 4^5$, 所以 $6 \ln 5^4 < 6 \ln 4^5$, 所以 $c < b$; (2) 因

为 $a = \ln(6^5)^4 = 5 \ln 6^4$, $b = \ln(4^5)^6 = 5 \ln 4^6$, 同 (2) $f(6) < f(4)$, 所以 $\frac{\ln 6}{6} < \frac{\ln 4}{4}$, 所以

$4 \ln 6 < 6 \ln 4$, $\ln 6^4 < \ln 4^6$, 所以 $5 \ln 6^4 < 5 \ln 4^6$, 所以 $a < b$; (3) 因为 $a = \ln(6^5)^4 = 4 \ln 6^5$,

$c = \ln(5^4)^6 = 4 \ln 5^6$, 同 (2) $f(6) < f(5)$, 所以 $\frac{\ln 6}{6} < \frac{\ln 5}{5}$, 所以 $5 \ln 6 < 6 \ln 5$, $\ln 6^5 < \ln 5^6$,

所以 $4 \ln 6^5 < 4 \ln 5^6$, 所以 $a < c$, 综上, $a < c < b$, 故选 B.

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

题号	13	14	15	16
----	----	----	----	----

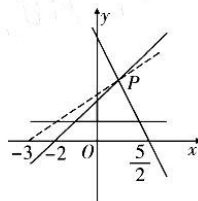
理科数学参考答案·第 2 页 (共 10 页)

□ □ □ □ ■ □ ■

答案	10	$\frac{1}{2}$	9π	①②③④
----	----	---------------	--------	------

【解析】

13. 根据约束条件 $\begin{cases} x-y+2 \geq 0, \\ 2x+y-5 \leq 0, \\ y \geq 1, \end{cases}$ 画出可行域，图中阴影部分为可行域，



由图 2 可知，点 $P(1, 3)$ 到原点 O 的距离的平方最大，为 10.

14. $C_6^2 \left(\frac{x^2}{m}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^4 = C_6^2 \frac{1}{m^2} = 60$ ，所以 $m^2 = \frac{1}{4}$ ，因为 $m > 0$ ，所以 $m = \frac{1}{2}$.

图 2

15. 因为圆锥的内切球与外接球的球心重合，所以圆锥的轴截面为等边三角形，设其边长为 a ，

则 $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = 1$ ， $a = 2\sqrt{3}$ ，所以圆锥的底面圆半径为 $\sqrt{3}$ ，从而，圆锥的表面积

$$S = \pi r l + \pi r^2 = \pi \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} + \pi \cdot (\sqrt{3})^2 = 9\pi.$$

16. ①两曲线的对称中心均为点 $(0, 1)$ ，且两曲线交于两

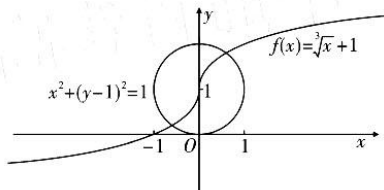


图 3

点，所以 $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ 能把圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 一分为

二，如图 3，故正确；②函数 $f(x) = e^{x-1} - e^{1-x} + 2$ 关

于点 $(1, 2)$ 对称，经过圆的圆心，且两曲线交于

两点，如图 4：所以函数 $f(x) = e^{x-1} - e^{1-x} + 2$ 是圆

$O: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 的一个太极函数，故正确；

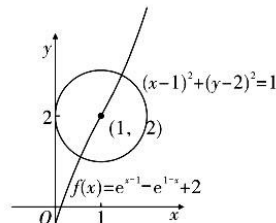
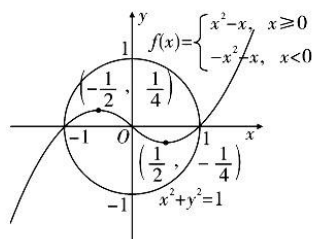


图 4

- ③函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x (x \geq 0), \\ -x^2 - x (x < 0) \end{cases}$ 为奇函数，且

$$f(x)_{\text{极大}} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} < 1, \quad f(x)_{\text{极小}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} > -1,$$

如图 5：所以函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x (x \geq 0), \\ -x^2 - x (x < 0) \end{cases}$ 是圆



□ □ □ □ ■ □ ■

○: $x^2 + y^2 = 1$ 的一个太极函数, 故正确; ④函数

$f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ 为奇函数, 且单调递增,

如图 6,

所以函数 $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$

是圆 ○: $x^2 + y^2 = 1$ 的一个太极函数,

故正确.

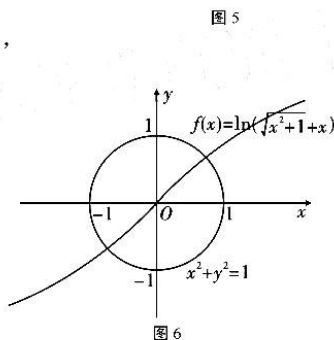


图 5

图 6

三、解答题 (共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 12 分)

解: (1) 法一: 因为 $S_n = \frac{(n+1)}{2} \cdot a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, $2S_n = (n+1)a_n, n \in \mathbf{N}^*$,

所以 $2S_{n+1} = (n+2)a_{n+1}, n \in \mathbf{N}^*$,

两式相减得 $2a_{n+1} = (n+2)a_{n+1} - (n+1)a_n$, 整理得 $na_{n+1} = (n+1)a_n$, (2 分)

即 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n}, n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为常数列, (3 分)

所以 $\frac{a_n}{n} = \frac{a_2}{2} = 1$, 所以 $a_n = n$, 且 $a_1 = 1, a_3 = 3$ (6 分)

法二: 因为 $S_n = \frac{(n+1)}{2} \cdot a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, $2S_n = (n+1)a_n, n \in \mathbf{N}^*$,

所以 $2S_{n+1} = (n+2)a_{n+1}, n \in \mathbf{N}^*$,

两式相减得 $2a_{n+1} = (n+2)a_{n+1} - (n+1)a_n$, 整理得 $na_{n+1} = (n+1)a_n$, (2 分)

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n}$, 由累乘法 $\frac{a_n}{a_1} = \frac{a_n}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \dots \cdot \frac{a_3}{a_2} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{2} = \frac{n}{2}$,
..... (3 分)

所以 $\frac{a_n}{a_2} = \frac{n}{2}$, 又 $a_2 = 2$, 所以 $a_n = n$, 且 $a_1 = 1, a_3 = 3$ (6 分)

法三: 因为 $2S_n = (n+1)a_n, n \in \mathbf{N}^*$,

□ □ □ □ ■ □ ■

所以 $2S_{n+1} = (n+2)a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$,

两式相减得 $2a_{n+1} = (n+2)a_{n+1} - (n+1)a_n$, 整理得 $na_{n+1} = (n+1)a_n$, (2 分)

所以 $a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n$, 又 $a_2 = 2$, 所以 $a_2 = \frac{2}{1} \cdot a_1 = 2$, $a_1 = 1$, $a_3 = \frac{3}{2} \cdot a_2 = 3$,

..... (4 分)

猜测 $a_n = n$, 下面用数学归纳法证明如下:

①当 $n=1$ 时, $a_1 = 1$, 等式成立;

②假设 $n=k$ 时等式成立, 即 $a_k = k$, 则 $a_{k+1} = \frac{k+1}{k} \cdot a_k = \frac{k+1}{k} \cdot k = k+1$,

所以 $n=k+1$ 时等式也成立,

从而由①②, 对 $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = n$ (6 分)

(2) 由 (1), $b_n = n \cdot 2^n$, (7 分)

所以 $T_n = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + n \cdot 2^n$,

$2T_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \dots + (n-1)2^n + n \cdot 2^{n+1}$,

两式相减得 $-T_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n - n \cdot 2^{n+1}$,

..... (9 分)

$-T_n = \frac{2(1-2^n)}{1-2} - n \cdot 2^{n+1} = 2^{n+1} - 2 - n \cdot 2^{n+1} = (1-n) \cdot 2^{n+1} - 2$,

化简得 $T_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (12 分)

18. (本小题满分 12 分)

解: (1) 播出时间固定且为“高销量直播间”的有 $200 \times 0.35 = 70$,

由频率分布直方图, “高销量直播间”的频率为:

$(0.0008 + 0.0006 + 0.0004 + 0.0002) \times 250 = 0.5$,

所以“高销量直播间”有 $200 \times 0.5 = 100$ 个, (2 分)

列联表为:

	播出时间固定	播出时间不固定	总计
高销量直播间	70	30	100

□ □ □ □ ■ □ ■

非高销量直播间	50	50	100
总计	120	80	200

..... (3分)

$$K^2 = \frac{200 \times (70 \times 50 - 30 \times 50)^2}{120 \times 80 \times 100 \times 100} = \frac{25}{3} \approx 8.333 > 7.879,$$

所以有99.5%的把握认为单位时间(分钟)销量与播出时间固定有关. (5分)

(2) 由(1)可知,该平台秀场类直播中“高销量直播间”的概率为 $0.5 = \frac{1}{2}$,

则 $X \sim B\left(3, \frac{1}{2}\right)$, (6分)

$$P(X=0) = C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, \quad P(X=1) = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}, \quad P(X=3) = C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},$$

所以, X 的分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

..... (9分)

$$\text{所以 } E(X) = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\text{或 } E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}. \quad \dots\dots\dots (10分)$$

(3) 由题有 $Y = 5X + 3(3-X) = 2X + 9$, (11分)

由期望的性质可知: $E(Y) = 2E(X) + 9 = 2 \times \frac{3}{2} + 9 = 12$ (12分)

19. (本小题满分12分)

□ □ □ □ ■ □ ■

(1) 证明: 连接 AF, EF ,

$\because E, F$ 分别为 B_1C, BC 中点, $EF \parallel BB_1$,

$\because AA_1 \parallel BB_1, \therefore EF \parallel AA_1$, (3 分)

$\therefore AA_1, EF$ 在同一平面内, 设为 α , 则 $A_1, F, D, E \in \alpha$,

$\therefore A_1F \subset \alpha, DE \subset \alpha, \therefore DE$ 与 A_1F 在同一平面内. (6 分)

(2) 解: $\because AA_1 \parallel CC_1, \therefore \angle B_1CC_1$ 为异面直线 B_1C, AA_1 所成的角, $\therefore \angle B_1CC_1 = 45^\circ$,

设 $AB = AC = 2$, 则 $CC_1 = B_1C_1 = 2\sqrt{2}$, (7 分)

以 A 为坐标原点, 以 AB, AC, AA_1 所在的直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 如图 7 所示,

则 $B(2, 0, 0), C(0, 2, 0), F(1, 1, 0), D(0, 0, \sqrt{2})$,

$\therefore \overrightarrow{AF} = (1, 1, 0), \overrightarrow{BC} = (-2, 2, 0), \overrightarrow{BD} = (-2, 0, \sqrt{2})$,

设平面 DBC 的一个法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} -2x + 2y = 0, \\ -2x + \sqrt{2}z = 0, \end{cases}$

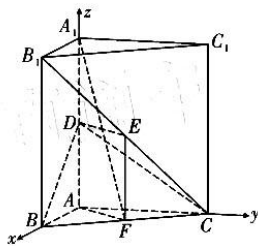


图 7

令 $x = 1$, 则 $y = 1, z = \sqrt{2}$,

所以平面 DBC 的一个法向量 $\vec{m} = (1, 1, \sqrt{2})$, (10 分)

由因为 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AF} = (1, 1, 0)$, 设直线 DE 与平面 DBC 所成角为 θ ,

则 $\sin \theta = |\cos \langle \vec{m}, \overrightarrow{AF} \rangle| = \frac{2}{\sqrt{2} \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

又 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{4}$ (12 分)

20. (本小题满分 12 分)

解: (1) 由 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2, f'(x) = x^2 - ax = x(x - a)$, (1 分)

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒大于等于 0, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增,

$f(x)_{\min} = f(0) = 0$, 不合题意;

理科数学参考答案 · 第 7 页 (共 10 页)

□ □ □ □ ■ □ ■

当 $0 < a < 1$ 时, 则 $x \in [0, a]$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; $x \in [a, 1]$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$

单调递增, 所以 $f(x)_{\min} = f(a) = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^3 = -\frac{1}{6}a^3$, $-\frac{1}{6}a^3 = -\frac{1}{6}$,

所以 $a=1$, 不满足 $0 < a < 1$; (3 分)

当 $a=1$ 时, 在 $[0, 1]$ 上, $f'(x) \leq 0$ 且不恒为 0, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减,

$f(x)_{\min} = f(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$, 适合题意;

当 $a > 1$ 时, 在 $[0, 1]$ 上, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减,

$f(x)_{\min} = f(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}a = -\frac{1}{6}$, 所以 $a=1$, 不满足 $a > 1$;

综上, $a=1$ (6 分)

(2) 由 (1) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + b$, 所以 $b = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x$,

令 $h(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x$, 则 $h'(x) = -x^2 + x + 2 = -(x-2)(x+1)$,

..... (8 分)

所以 $h'(2) = 0$, $h'(-1) = 0$, 且当 $x < -1$ 时, $h'(x) < 0$;

当 $-1 < x < 2$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $x > 2$ 时, $h'(x) < 0$,

所以 $h(x)_{\min} = h(-1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{7}{6}$, $h(x)_{\max} = h(2) = -\frac{1}{3} \times 8 + \frac{1}{2} \times 4 + 4 = \frac{10}{3}$,

..... (10 分)

如图 8:

当 $b < -\frac{7}{6}$ 或 $b > \frac{10}{3}$ 时, 函数 $g(x)$ 有 1 个零点;

当 $b = -\frac{7}{6}$ 或 $b = \frac{10}{3}$ 时, 函数 $g(x)$ 有 2 个零点;

当 $-\frac{7}{6} < b < \frac{10}{3}$ 时, 函数 $g(x)$ 有 3 个零点.

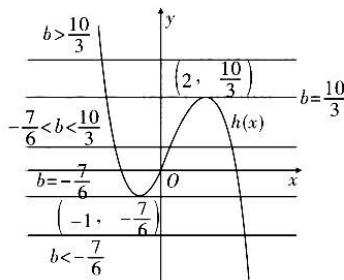


图 8

..... (12 分)

□ □ □ □ ■ □ ■

21. (本小题满分 12 分)

解: (1) 由椭圆性质知, $2a = 2 \cdot 2b$, $\frac{1}{2}2c \cdot b = \sqrt{3}$,

又 $a^2 = b^2 + c^2$, 解得 $a = 2$, $b = 1$, $c = \sqrt{3}$,

所以椭圆 M 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (4 分)

(2) 显然, 直线 AB 的斜率不为 0, 不妨设直线 AB 的方程为 $x = ky + m (m \neq 2)$,

..... (5 分)

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ x = ky + m, \end{cases}$ 消去 x 得 $(k^2 + 4)y^2 + 2kmy + m^2 - 4 = 0$.

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则有 $y_1 + y_2 = \frac{-2km}{k^2 + 4}$, $y_1 \cdot y_2 = \frac{m^2 - 4}{k^2 + 4}$ ①,

又以线段 AB 为直径的圆过椭圆的右顶点 C , $\therefore \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$,

由 $\overrightarrow{CA} = (x_1 - 2, y_1)$, $\overrightarrow{CB} = (x_2 - 2, y_2)$, 得 $(x_1 - 2)(x_2 - 2) + y_1 y_2 = 0$,

将 $x_1 = ky_1 + m$, $x_2 = ky_2 + m$ 代入上式得 $(k^2 + 1)y_1 y_2 + k(m - 2)(y_1 + y_2) + (m - 2)^2 = 0$,

将①代入上式求得 $m = \frac{6}{5}$ 或 $m = 2$ (舍), 则直线 l 恒过点 $D(\frac{6}{5}, 0)$ (9 分)

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |DC| |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \frac{8}{25} \sqrt{\frac{25(k^2 + 4) - 36}{(k^2 + 4)^2}}$,

设 $t = \frac{1}{k^2 + 4} (0 < t \leq \frac{1}{4})$, 则 $S_{\triangle ABC} = \frac{8}{25} \sqrt{-36t^2 + 25t}$ 在 $t \in (0, \frac{1}{4}]$ 上单调递增,

当 $t = \frac{1}{4}$ 时, $S_{\triangle ABC}$ 取得最大值 $\frac{16}{25}$ (12 分)

22. (本小题满分 10 分) 【选修 4-4: 坐标系与参数方程】

(1) 解: 当 $|OM| = \frac{1}{2}$ 时, 设点 M 的极坐标为 $(\frac{1}{2}, \theta)$,

由 $\rho = 1 - \sin \theta$, 得 $\frac{1}{2} = 1 - \sin \theta$, $\sin \theta = \frac{1}{2}$,

理科数学参考答案 · 第 9 页 (共 10 页)

□ □ □ □ ■ □ ■

$$\because 0 \leq \theta < 2\pi, \therefore \theta = \frac{\pi}{6} \text{ 或 } \theta = \frac{5\pi}{6},$$

所以点 M 的极坐标为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ 或 $\left(\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$, (4 分)

当 M 的极角为 $\frac{7\pi}{6}$ 时, $\rho = 1 - \sin \frac{7\pi}{6} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ (5 分)

(2) 证明: 设直线 AB 的方程为 $\theta = \alpha$ 和 $\theta = \pi + \alpha$ ($\rho > 0, 0 \leq \alpha < \pi$),

点 A, B 对应的极径分别为 ρ_1, ρ_2 , 则 $\rho_1 = 1 - \sin \alpha, \rho_2 = 1 - \sin(\pi + \alpha) = 1 + \sin \alpha$,

所以弦长 $|AB| = \rho_1 + \rho_2 = 2$ (定值). (10 分)

23. (本小题满分 10 分) 【选修 4-5: 不等式选讲】

$$(1) \text{ 解: 设 } y = |2x-1| - |x-1| = \begin{cases} x, & x \geq 1, \\ 3x-2, & \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ -x, & x < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\text{由 } m+n=1, \text{ 得 } \frac{1}{m} + \frac{4}{n} = \left(\frac{1}{m} + \frac{4}{n}\right)(m+n) = 5 + \frac{n}{m} + \frac{4m}{n} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{n}{m} \cdot \frac{4m}{n}} = 9.$$

所以 $9 \geq |2x-1| - |x-1|$ (2 分)

当 $x \geq 1$ 时, $x \leq 9$, 得 $1 \leq x \leq 9$;

当 $\frac{1}{2} \leq x < 1$ 时, $3x-2 \leq 9$, 解得 $x \leq \frac{11}{3}$, 故 $\frac{1}{2} \leq x < 1$;

当 $x < \frac{1}{2}$ 时, $-x \leq 9$, 解得 $x \geq -9$, 故 $-9 \leq x < \frac{1}{2}$;

综上, x 的取值范围为 $[-9, 9]$ (5 分)

$$(2) \text{ 证明: } \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)(m^3 + n^3) = m^2 + n^2 + \frac{n^3}{m} + \frac{m^3}{n} = (m+n)^2 + \frac{n^3}{m} + \frac{m^3}{n} - 2mn$$

$$\geq (m+n)^2 + 2\sqrt{\frac{n^3}{m} \cdot \frac{m^3}{n}} - 2mn = (m+n)^2 = 1. \quad \text{..... (10 分)}$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》