

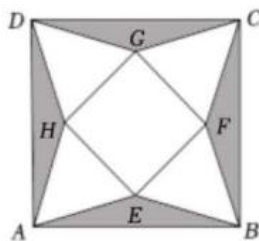
太原五中 2022—2023 学年度第二学期月考 高三 数 学

出题人、校对入：高三数学组 时间：2023.4 (青年路·龙城联考)

A 卷

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A = \{0,1,2\}$, $A \cup B = \{0,1,2,3\}$, 则选项正确的是()
 A. $0 \in B$ B. $3 \notin C_R B$ C. $A \cap B = \{0,1,2\}$ D. $A \subseteq B$
2. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{2\pi}{3}$, 则 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) =$ ()
 A. -2 B. -1 C. 0 D. 2
3. “ $\sin^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha = 0$ ”是“ $\tan \alpha = 2$ ”的()
 A. 充要条件 B. 充分不必要条件
 C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 99^{10} 被 1000 除的余数是 ()
 A. -1 B. -99 C. 1 D. 901
5. 复平面内复数 z 满足 $|z - 2| = 1$, 则 $|z - i|$ 的最小值为()
 A. 1 B. $\sqrt{5} - 1$ C. $\sqrt{5} + 1$ D. 3
6. 如图，大正方形的中心与小正方形的中心重合，且大正方形边长为 $3\sqrt{2}$ ，小正方形边长为 2，截去图中阴影部分后，翻折得到正四棱锥 $P - EFGH$ (A, B, C, D 四点重合于点 P)，则此四棱锥的体积为()
 A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{5}}{3}$



7. 现有甲、乙两组数据，每组数据均由六个数组成，其中甲组数据的平均数为3，方差为5，乙组数据满足如下条件时，若将这两组数据混合成一组，则关于新的一组数据说法错误的是（ ）

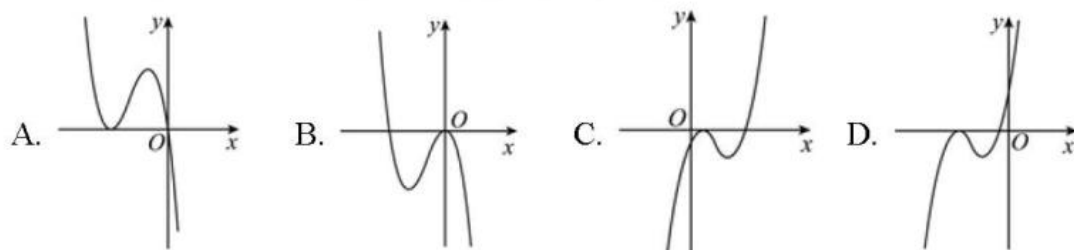
- A. 若乙组数据的平均数为3，则新的一组数据平均数为3
- B. 若乙组数据的方差为5，则新的一组数据方差为5
- C. 若乙组数据的平均数为3，方差为5，则新的一组数据方差为5
- D. 若乙组数据的平均数为5，方差为3，则新的一组数据方差为5

8. 已知 a, b, c 均为正实数， e 为自然对数的底数，若 $a = be^c$ ， $|\ln a| > |\ln b|$ ，则下列不等式一定成立的是（ ）

- A. $a + b < ab$
- B. $a^b < b^a$
- C. $c < \frac{a-b}{a+b}$
- D. $a^2 > c + 1$

二、多选题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题有多项符合题目要求。全部选对得5分，部分选对得2分，有选错的得0分。

9. 函数 $f(x) = b(x-a)^2(x-b)$ 的图象可以是（ ）



10. 已知 $F_1(-2,0), F_2(2,0)$ 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，且 F_2 到 C 的一条渐近线的距离为 $\sqrt{2}$ ， O 为坐标原点，点 $M(1, \sqrt{3})$ ， P 为 C 右支上的一点，则（ ）

- A. $a = b = \sqrt{2}$
- B. 过点 M 且斜率为1的直线与 C 有两个不同的交点
- C. 若 PF_1, PF_2 斜率存在，则 $k_{PF_1} \cdot k_{PF_2} = 1$

D. $|PM| + |PF_1|$ 的最小值为 $2 + 2\sqrt{2}$

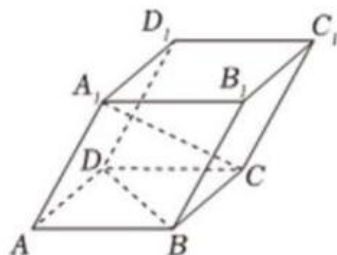
11. 在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $AB = AD = AA_1 = 1$, $\angle A_1AB = \angle A_1AD = \angle BAD = 60^\circ$, 则下列说法错误的是()

A. E 为 C_1D_1 中点, F 为 B_1C_1 中点, 则 DE 与 BF 为异面直线

B. 线段 A_1C 的长度为 $\sqrt{3}$

C. M 为 AA_1 中点, 则 $A_1C \parallel$ 平面 BDM

D. 直线 A_1C 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$



12. 已知定义域为 R 的函数 $f(x)$ 对任意实数 x, y 都有 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$, 且 $f(\frac{1}{2}) = 0$, 则以下结论一定正确的有()

A. $f(0) = -1$

B. $f(x)$ 是偶函数

C. $f(x)$ 关于 $(\frac{1}{2}, 0)$ 中心对称

D. $f(1) + f(2) + \dots + f(2023) = 0$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = e^x$ 的图像与直线 $y = kx + 2k$ 相切, 则 $k =$ _____.

14. 直线 $2x - y - 4 = 0$ 分别与 x 轴、 y 轴交于 A, B 两点, 点 P 在圆 $x^2 + (y - 2)^2 = 5$ 上, 则 $\triangle PAB$ 面积的取值范围是_____.

15. 已知直线 l 与椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 交于 M, N 两点, 线段 MN 中点 P 在直线 $x = -1$ 上, 且线段 MN 的垂直平分线交 x 轴于点 $Q(-\frac{3}{4}, 0)$, 则椭圆 E 的离心率是_____.

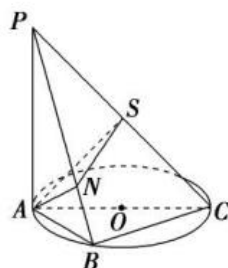
16. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n + a_{n+1} = n^2 \sin(\frac{n\pi}{2})$, $n \in N^*$, 则 $a_1 + a_{40} =$ _____.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 如图, AC 为圆 O 的直径, PA 垂直于圆 O 所在的平面, B 为圆周上不与点 A, C 重合的点, 连接 PB, PC, AB, BC , 作 $AS \perp PC$ 于点 S , $AN \perp PB$ 于点 N .

(1) 求证: $\angle ASN$ 是二面角 $A - PC - B$ 的平面角;

(2) 若 $\angle ACB = 30^\circ$, $\angle PCA = 45^\circ$, 求二面角 $A - PC - B$ 的正弦值.



18. (12 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $a_{n+1} - a_n^2 = 2a_n$, $2^{b_n} = a_n + 1$.

(1) 求证: $\{b_n\}$ 是等比数列;

(2) 若 $c_n = \frac{n}{b_n} + 1$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

19. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 BC 上的点, $\angle CAD = \frac{\pi}{4}$, $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}BD}{CD}$

(1) 求 $\angle BAD$;

(2) 若 $AB = AD = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

20. (12 分) 近几年, 随着生活水平的提高, 人们对水果的需求量也随之增加, 某品种猕猴桃的口感酸甜、风味较好, 广受消费者喜爱. 在某水果店, 某种猕猴桃整盒出售, 每盒 20 个. 已知各盒含 0 个、1 个烂果的概率分别为 0.8、0.2.

(1) 顾客甲任取一盒, 随机检查其中 4 个猕猴桃, 若当中没有烂果, 则买下这盒猕猴桃, 否则不会购买此种猕猴桃, 求甲购买一盒猕猴桃的概率;

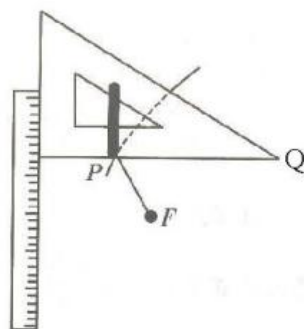
(2) 顾客乙第 1 周从该店购买了一盒这种猕猴桃, 若当中没有烂果, 则下一周继续购买一盒; 若当中有烂果, 则隔一周再购买一盒, 以此类推, 求乙第 5 周购买一盒猕猴桃的概率.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的周期为 π , 图象的一个对称中心为 $(\frac{\pi}{4}, 0)$, 将函数 $f(x)$ 图象上的所有点的横坐标伸长为原来的 2 倍(纵坐标不变), 再将所得图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象.

(1) 求函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的解析式;

(2) 求实数 a 与正整数 n , 使得 $F(x) = f(x) + ag(x)$ 在 $(0, n\pi)$ 内恰有 2023 个零点.

22. (12 分) 如图, 小明同学先把一根直尺固定在画板上, 把一块三角板的一条直角边紧靠在直尺边沿, 再取一根细绳, 它的长度与另一直角边相等, 让细绳的一端固定在三角板的顶点 Q 处, 另一端固定在画板上点 F 处, 用铅笔尖扣紧绳子, 让细绳紧贴住三角板的直角边, 然后将三角板沿着直尺上下滑动, 这时笔尖在平面上留下轨迹 C .



已知细绳长度为 3cm , 经测量, 当笔尖运动到点 P 处时, $\angle FQP = 30^\circ$, $\angle QFP = 90^\circ$. 设直尺边沿所在直线为 a , 以过 F 垂直于直尺的直线为 x 轴, 以过 F 垂直于 a 的垂线段的中垂线为 y 轴, 以 1cm 为单位长度, 建立平面直角坐标系.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 $D(0, -3)$ 且斜率为 k 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, k 的取值范围为 $(0, 2)$,

探究：是否存在 λ ，使得 $\overrightarrow{DA} = \lambda\overrightarrow{DB}$ ，若存在，求出 λ 的取值范围，若不存在，说明理由.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

