平许济洛 2023-2024 学年高三第一次质量检测

数学参考答案

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8
D	C	B	C	C	A	D	B

二．选择题

9	10	11	12
ABD	CD	ACD	BC

三．填空题

13. 11　　14. 75

15. $\dfrac{2}{11}$　　16. $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$

四、解答题

17.解：（1）$\because (c^2-a^2-b^2)\sin B\cos B=ab\cos(A+B)$，

$\therefore \dfrac{c^2-a^2-b^2}{ab}=\dfrac{\cos(A+B)}{\sin B\cos B}$……………………………………1 分

$\therefore -2\cos C=\dfrac{-2\cos C}{\sin 2B}$，……………………………………3 分

$\because C$ 是锐角，$\therefore \cos C\neq 0$，

$\therefore \sin 2B=1$，

$\because 0<B<\dfrac{\pi}{2}$，即 $0<2B<\pi$，

$\therefore 2B=\dfrac{\pi}{2}$，即 $B=\dfrac{\pi}{4}$；……………………………………5 分

（2）$\because \sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{4}ac$，……………………………………6 分

∵$b=2$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

∴由余弦定理得：$2^2=a^2+c^2-2ac\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\geqslant 2ac-\sqrt{2}ac$，……………………..………8 分

∴$(2-\sqrt{2})ac\leqslant 4$，即 $ac\leqslant 2(2+\sqrt{2})$，

∴$S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}ac\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{4}\times 2(2+\sqrt{2})=\sqrt{2}+1$，

当且仅当 $a=c=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ 时，等号成立，

∴△ABC 的面积的最大值为$\sqrt{2}+1$．………………..……………………………………..…..10 分

18. 解：(1)由$\dfrac{n^2+n+1}{S_n}=\dfrac{n^2+n+4-S_n}{3}$，得$S_n^{\ 2}-(n^2+n+4)S_n+3(n^2+n+1)=0$，

即$(S_n-3)\left[S_n-(n^2+n+1)\right]=0$，解得$S_n=3$(舍)或$S_n=n^2+n+1$，…………..2 分

当$n=1$时，$a_1=S_1=3$，

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n+1-(n-1)^2-(n-1)-1=2n$，……………..4 分

所以，$a_n=\begin{cases}3, n=1,\\ 2n, n\geq 2\end{cases}$ ……………………….……………………..…………………….5 分

(2)$T_n=(a_1-1)\cdot 2^{a_1}+(a_2-1)\cdot 2^{a_2}+(a_3-1)\cdot 2^{a_3}+(a_4-1)\cdot 2^{a_4}+\ldots+(a_n-1)\cdot 2^{a_n}$

$=2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+5\cdot 2^6+7\cdot 2^8+\ldots+(2n-1)\cdot 2^{2n}$

$=16+3\cdot 4^2+5\cdot 4^3+7\cdot 4^4+\ldots+(2n-1)\cdot 4^n$

$=12+1\cdot 4^1+3\cdot 4^2+5\cdot 4^3+\ldots+(2n-1)\cdot 4^n$ …………………………...………………7 分

令 $R_n=1\cdot 4^1+3\cdot 4^2+5\cdot 4^3+\ldots+(2n-1)\cdot 4^n$，①

则 $4R_n=\qquad 1\cdot 4^2+3\cdot 4^3+5\cdot 4^4+\ldots+(2n-3)\cdot 4^n+(2n-1)\cdot 4^{n+1}$，②

①-②得：$-3R_n=4+2\cdot 4^2+2\cdot 4^3+\ldots+2\cdot 4^n-(2n-1)\cdot 4^{n+1}$

$=4+\dfrac{32(1-4^{n-1})}{1-4}-(2n-1)\cdot 4^{n+1}$

$=4-\dfrac{32}{3}+\dfrac{2}{3}\cdot 4^{n+1}-(2n-1)\cdot 4^{n+1}$

$=-\dfrac{20}{3}+(\dfrac{5}{3}-2n)\cdot 4^{n+1}$ ……………………………………………………………………10 分

所以 $R_n=\dfrac{20}{9}+(\dfrac{2n}{3}-\dfrac{5}{9})\cdot 4^{n+1}$，

所以 $T_n=12+\dfrac{20}{9}+(\dfrac{2n}{3}-\dfrac{5}{9})\cdot 4^{n+1}=\dfrac{128}{9}+\dfrac{(6n-5)}{9}\cdot 4^{n+1},n\in N^*$. …………………12 分

19.解：（1）补全的 2×2 列联表如下：

	不喜爱	喜爱	合计
男性	30	90	120
女性	25	55	80
合计	55	145	200

零假设为

H_0：性别与对活动的喜爱程度无关.

根据表中数据，计算得到 $\chi^2=\dfrac{200\times(30\times55-90\times25)^2}{55\times145\times120\times80}=\dfrac{300}{319}<2.706$

根据小概率值 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，没有充分证据推断 H_0 不成立，因此我们可以认为 H_0 成立，即认为对该场活动的喜爱程度与性别无关. ……………………………………4 分

（2）①记“戏迷甲至少正确完成其中 3 道题”为事件 A，则

$P(A)=C_4^3\left(\dfrac{3}{4}\right)^3\dfrac{1}{4}+C_4^4\left(\dfrac{3}{4}\right)^4=\dfrac{189}{256}$. ……………………………… ……………………………7 分

②X 的可能取值为 2，3，4

$P(X=2)=\dfrac{C_2^2C_6^2}{C_8^4}=\dfrac{15}{70}=\dfrac{3}{14}$，$P(X=3)=\dfrac{C_2^1C_6^3}{C_8^4}=\dfrac{40}{70}=\dfrac{4}{7}$，

$P(X=4)=\dfrac{C_2^0C_6^4}{C_8^4}=\dfrac{15}{70}=\dfrac{3}{14}$，…………………………………………………………………10 分

X 的分布列为：

X	2	3	4
P	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{14}$

数学期望 $E(X)=2\times\frac{3}{14}+3\times\frac{4}{7}+4\times\frac{3}{14}=3$． ……………………………………………….12 分

20.解：（1）证明：∵平面 FGH∥平面 $ABED$，平面 $BCFE\cap$平面 $ABED=BE$，

平面 $BCFE\cap$平面 $GHF=HF$，∴BE∥HF．

∵BC∥EF，∴四边形 $BHFE$ 为平行四边形，则 $BH=EF$．

∵$BC=2EF$，∴$BC=2BH$，H 为 BC 的中点．………………. ……………………….1 分

同理 G 为 AC 的中点，则 GH∥AB，……………………..……………………………….2 分

∵$AB\perp BC$，∴$GH\perp BC$．

又 HC∥EF 且 $HC=EF$，∴四边形 $EFCH$ 是平行四边形，则 CF∥HE．

又 $CF\perp BC$，∴$HE\perp BC$．……………………….. ……………………………………….4 分

又 HE，$GH\subset$平面 EGH，$HE\cap GH=H$，

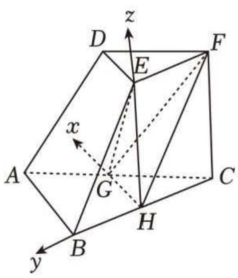
∴$BC\perp$平面 EGH；……………………………………………………………………….6 分

（2）∵$AB\perp CF$，CF∥HE，GH∥AB，∴$HE\perp GH$．

以 H 为坐标原点，分别以 HG，HB，HE 所在直线为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系．

$\because \angle BAC=45^\circ$

$\therefore\triangle ABC$为等腰直角三角形，即$AB=BC$.



则 E（0，0，1），F（0，－1，1），G（1，0，0），D（1，0，1），

$\overrightarrow{EF}=(0,-1,0)$，$\overrightarrow{EG}=(1,0,-1)$，

$\overrightarrow{FG}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{GD}=(0,0,1)$． ……………………………………………………….8 分

设平面 EFG 的一个法向量为 $\overrightarrow{m}=(x_1,y_1,z_1)$．

由 $\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{EF}=-y_1=0\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{EG}=x_1-z_1=0\end{cases}$，取 $x_1=1$，得 $\overrightarrow{m}=(1,0,1)$；

设平面 FGD 的一个法向量为 $\overrightarrow{n}=(x_2,y_2,z_2)$．

由 $\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{FG}=x_2+y_2-z_2=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{GD}=z_2=0\end{cases}$，取 $x_2=1$，得 $\overrightarrow{m}=(1,-1,0)$． ……………………….10 分

$\therefore \cos<\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}>=\dfrac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{m}|\cdot|\overrightarrow{n}|}=\dfrac{1}{2}$．

设平面 EFG 和平面 DFG 的夹角为 θ，则

$\cos\theta=|\cos<\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}>|=\dfrac{1}{2}.$

$\therefore$ 平面 EFG 和平面 DFG 的夹角的余弦值 $\dfrac{1}{2}$． …………………………………………….12 分

21. 解：由题意：函数 $f(x)$ 的定义域为（0，$+\infty$）$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$

$x\in(0,1),f'(x)<0,x\in(1,+\infty),f'(x)>0$

$y=f(x)$ 在（0,1）上为减函数，在（1，$+\infty$）上为增函数，

$f(1)=1+m.$ …2分

即 $y=f(x)$ 图象与直线 $y=1+m$ 相切.

由 $g'(x)=\dfrac{1-x}{e^x},$

$x\in(0,1),g'(x)>0,x\in(1,+\infty),g'(x)<0$

$y=g(x)$ 在（0，1）上为增函数，在（1，$+\infty$）上为减函数，$g(1)=\dfrac{1}{e},$

即 $y=g(x)$ 图象与直线 $y=\dfrac{1}{e}$ 相切.

两函数图象均与平行于 x 轴的同一条直线相切，则 $1+m=\dfrac{1}{e}$，即 $m=\dfrac{1}{e}-1.$……4分

（2）$F(x)=x-\ln x+m-\dfrac{x}{e^x}=-\ln\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{x}{e^x}+m$，令 $t_1=\dfrac{x_1}{e^{x_1}},t_2=\dfrac{x_2}{e^{x_2}}$

由 $F(x_1)=F(x_2)=0$，得 $-\ln t_1-t_1+m=-\ln t_2-t_2+m=0$

函数 $y=-\ln t-t+m$ 在（0,$+\infty$）上为减函数，故 $t_1=t_2$，即 $\dfrac{x_1}{e^{x_1}}=\dfrac{x_2}{e^{x_2}}$，……7分

即$g(x_1)=g(x_2)$，不妨设$0<x_1<1<x_2$，

要证$e^{x_1}\bullet e^{x_2}>e^2$,只需证$x_1+x_2>2$，

只需证$x_2>2\text{-}x_1$，即证$g(x_2)<g(2-x_1)$,

因为$g(x_1)=g(x_2)$

只需证$g(x_1)<g(2-x_1)$，即$g(x_1)\text{-}g(2-x_1)<0$........................9分

令$h(x)=g(x)\text{-}g(2-x)$

$=\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{2-x}{e^{2-x}},x\in(0,1),$

则$h'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}+\dfrac{x-1}{e^{2-x}}=(1-x)\dfrac{e^{2-x}-e^x}{e^xe^{2-x}}>0,$....................11分

$\therefore h(x)$在$(0,1)$上单调递增，

$\therefore h(x)<h(1)=0,$

$\therefore$原题得证..12分

22.(1)设$P(x,y)$，$M(x_0,y_0)$，则$N(-x_0,y_0)$，

过点N且平行于y轴的直线方程为：$x=-x_0$，..1 分

直线OM的方程为：$y=\dfrac{y_0}{x_0}x$， ....2 分

联立两直线方程$\begin{cases}x=-x_0\\ y=\dfrac{y_0}{x_0}x\end{cases}$，相乘得：$y^2=-\dfrac{{y_0}^2}{x_0}x$，$x^2=-\dfrac{{x_0}^2}{y_0}y$

因为M 在抛物线C上，所以${x_0}^2=-4y_0$，

所以$x^2=4y$，..4 分

由题意知O、M不重合，故$x\neq0$，

所以曲线E的方程为$x^2=4y\,(x\neq0)$..5 分

（2）由（1）知直线$y=-1$，当点A在特殊位置$(0,-1)$时，显见两个切点P_1,P_2关于y轴对称，故要使得$AB\perp P_1P_2$，点B必须在y轴上.

故设A（m，-1），B（0，n），$P_1(x_1,\frac{1}{4}{x_1}^2)$，$P_2(x_2,\frac{1}{4}{x_2}^2)$，

曲线E的方程为$y=\frac{1}{4}x^2(x\neq 0)$，求导得$y'=\frac{1}{2}x$，所以切线$AP_1$的斜率$k_1=\frac{1}{2}x_1$，

直线AP_1的方程为$y-\frac{1}{4}x_1^{\ 2}=\frac{1}{2}x_1(x-x_1)$，又点$A$在直线$AP_1$上，

所以$-1-\frac{1}{4}x_1^{\ 2}=\frac{1}{2}x_1(m-x_1)$，整理得$x_1^{\ 2}-2mx_1-4=0$，

同理可得$x_2^{\ 2}-2mx_2-4=0$ ，

故x_1和x_2是一元二次方程$x^2-2mx-4=0$的根，由韦达定理得

$\begin{cases}x_1+x_2=2m\\x_1x_2=-4\end{cases}$， ……………………………………………………………………9 分

$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\frac{1}{4}x_2^{\ 2}-\frac{1}{4}x_1^{\ 2})\cdot(-m,n+1)=\frac{1}{4}(x_2-x_1)\ [-4m+(n+1)(x_2+x_1)]$

$=\frac{1}{4}(x_2-x_1)[-4m+2m(n+1)]=\frac{1}{2}m(x_2-x_1)(n-1)$，

可见$n=1$时，$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{AB}=0$， ……………………….(11 分)

所以存在定点$B\ (0,1)$，使得$AB\perp P_1P_2$恒成立． ……………………………………….12 分