

高三数学

满分:150分 考试时间:120分钟

注意事项:

- 1.答题前,考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚,将条形码准确粘贴在条形码区域内。
- 2.选择题必须使用 2B 铅笔填涂;非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写,字体工整、笔迹清晰。
- 3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效;在草稿纸、试题卷上的答题无效。
- 4.保持答题卡卡面清洁,不要折叠、不要弄破、弄皱,不准使用涂改液、修正带刮纸刀。
- 5.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $A=\{x|x^2\leq 1\}$, $B=\{x|\frac{2}{x}\geq 1\}$ 则 $A\cap B=$

- A. $\{x|-1\leq x\leq 1\}$ B. $\{x|0<x\leq 1\}$ C. $\{x|0<x\leq 2\}$ D. $\{x|1\leq x\leq 2\}$

2.已知复数 $z=2+i$, 则 $\frac{\bar{z}}{z}$

- A. $\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$ B. $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ C. $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$ D. $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$

3.在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3+2a_5+a_9=10$, 则数列 $\{a_n\}$ 前 10 项的和为

- A.20 B.24 C.25 D.28

4.平面直角坐标系中, $A(-2, 0)$ 、 $B(2, 0)$, 动点 P 满足 $|PA|=\sqrt{3}|PB|$, 则使 $\triangle PAB$ 为等腰三角形的点

P 个数为

- A.0 B.2 C.3 D.4

5. $\triangle ABC$ 中, $|\overline{AB}+\overline{AC}|=2|\overline{AB}-\overline{AC}|$, 则 $\sin A$ 的最大值为

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

6.中国茶文化是中国制茶、饮茶的文化.中国是茶的故乡,中国人发现并利用茶,据说始于神农时代,至少有 4700 多年历史中华茶文化源远流长,博大精深,不但包含物质文化层面,还包含深厚的精神文明层次.其中绿茶在制茶过程中,在采摘后还有杀青、揉捻、干燥等制作流程.现在某茶厂新招聘了 6 位工人,分配到这三个工序,揉捻工序至少要分配两位工人,杀青、干燥工序各至少分配一位工人,则不同分配方案数为

- A.120 B.240 C.300 D.360

7.已知椭圆: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, O 为坐标原点, A 、 B 、 C 是椭圆上三个点, 满足

$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\mathbf{0}$ 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$, 则圆的离心率为

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{7}}{3}$

8. 偶函数 $f(x)$ 与其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , $f(x)$ 在区间 $[2023, 2024]$ 上单调递减, 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒有 $f'(x) = f'(2-x)$ 成立, 若 $a = 4^{-0.8}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \ln \frac{3}{2}$, 则

A. $f(a) < f(b) < f(c)$

B. $f(a) < f(c) < f(b)$

C. $f(b) < f(a) < f(c)$

D. $f(c) < f(a) < f(b)$

二、选择题: 共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知直线 $l_1: (\sin \alpha)x - (\cos \alpha)y + 1 = 0$, $l_2: (\sin \alpha)x + (\cos \alpha)y + 1 = 0$, $l_3: (\cos \alpha)x - (\sin \alpha)y + 1 = 0$, $l_4: (\cos \alpha)x + (\sin \alpha)y + 1 = 0$. 则

A. 存在实数 α , 使 $l_1 \parallel l_2$,

B. 存在实数 α , 使 $l_2 \parallel l_3$;

C. 对任意实数 α , 都有 $l_1 \perp l_4$

D. 存在点到四条直线距离相等

10. 甲、乙两位射击爱好者, 各射击 10 次, 甲的环数从小到大排列为 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 乙的环数从小到大排列为 2, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9, 10. 则

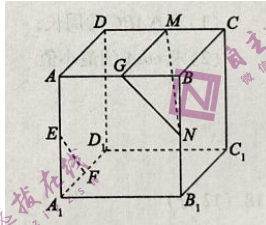
A. 甲的环数的 70% 分位数是 7

B. 甲的平均环数比乙的平均环数小

C. 这 20 个数据的平均值为 6.6

D. 若甲的方差为 2.25, 乙的方差为 4.41, 则这 20 个数据的方差为 4.34

11. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E、F、G、M、N 均为所在棱的中点, 动点 P 在正方体表面运动, 则下列结论正确的有



A. 当点 P 为 BC 中点时, 平面 PEF \perp 平面 GMN

B. 异面直线 EF、GN 所成角的余弦值为 $\frac{1}{3}$

C. 点 E、F、G、M、N 在同一个球面上

D. 若 $\overrightarrow{A_1P} = t\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{A_1M} - 2t\overrightarrow{A_1B_1}$, 则 P 点轨迹长度为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

12. 已知抛物线 $E: y^2 = 4x$ 的焦点为 $F(1, 0)$, 圆 $F: (x-1)^2 + y^2 = r^2 (0 < r < 1)$, 过焦点的动直线 l_0 与抛物线 E 交于点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 与圆 F 相交于点 C、D (A、C 在 x 轴上方), 点 M 是 AB 中点, 点 $T(0, 1)$, 则下列结论正确的有

A. 若直线 l_0 与 y 轴相交于点 $G(0, y_3)$, 则有 $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{1}{y_3}$

B. 随着 l_0 变化, 点 M 在一条抛物线上运动

C. $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{FT}$ 最大值为 -1

D. 当 $r \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时, 总存在直线 l_0 , 使 $|AC|$ 、 $|CD|$ 、 $|DB|$ 成等差数列

三、填空题: 共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分

13: $(x-2y^3)(x+\frac{1}{y})^5$ 展开式中仅含 x^2 项的系数为_____

14. 青年大学习是由共青团中央发起, 广大青年参与, 通过学习来提升自身理论水平、思维层次的行动. 青年大学习, 是让青年学习红色知识并传承红色基因, 通过学习来提高思想素质, 更加热爱国家并关心国家大事, 让青年对步入新时代的理念有了更深的了解, 真正参与到实现中华民族伟大复兴的实践当中. 电视台为了做好宣传, 引导广大青年“不忘初心、牢记使命”, 切实增强“四个意识”、树立“四个自信”, 坚定不移听党话、跟党走, 举办了一次活动. 现场观众是由 40 名大学生, 30 名高中生, 30 名初中生组成, 其中一个环节是由参加活动的一位嘉宾现场随机抽取一名观众进行知识问答竞赛. 已知这位嘉宾抽到大学生, 且嘉宾能获胜的概率是 $\frac{1}{2}$; 抽到高中生, 且嘉宾能获胜的概率是 $\frac{2}{3}$; 抽到初中生, 且嘉宾能获胜的概率是 $\frac{4}{5}$. 则这位嘉宾获胜的概率是_____

15. 若函数 $f(x)$ 对定义域内任意实数 x 均满足 $f(\lambda x) = f(x) \cdot f(x + \lambda)$, 其中 $\lambda > 0$, 则称 $f(x)$ 是“ λ 等值函数”. 若函数 $g(x) = a \sin \frac{\pi x}{4}$ ($a > 0$) 是“2 等值函数”, 则实数 $a =$ _____, 函数 $y = g(x) - 1$ 在区间 $[0, 2023]$ 上零点个数为_____

16. 过点 $P(t, -1)$ 有三条与函数 $f(x) = xe^x$ 图象相切的直线, 则实数 t 的取值范围是_____

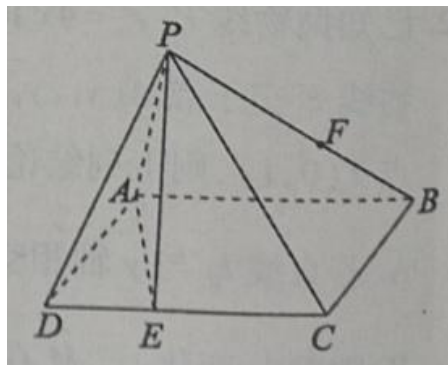
四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤
17. (10 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 其中 $a = 2$, $\sin B(1 + \cos A) = \sin A(2 - \cos B)$

- (1) 求 $\triangle ABC$ 的周长;
- (2) 求 $\cos A$ 的最小值.

18. (12 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, $AD = AP = 2$, $DC = 3$, $PD = 2\sqrt{3}$, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 点 E 是 DC 上一点且 $\overline{DE} = \frac{1}{3}\overline{DC}$.



- (1) 若 $\overline{PF} = \frac{2}{3}\overline{PB}$, 求证: $CF \parallel$ 平面 PAE ;

(2)求平面 PAE 与平面 PBC 夹角的余弦值

19.(12 分)

数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 各项均为正数，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $b_1=1$ ， $\frac{S_{n+1}}{S_n} = (1 + \frac{1}{n})^2$ ，

$$b_{n+1} = a_n b_n.$$

(1)求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2)记 $c_n = (2 - a_n) \cdot (a_{n+1} - 1) \cdot 2^n$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

20.(12 分)

中国象棋是中国棋文化，也是中华民族的文化瑰宝，它源远流长，趣味浓厚，基本规则简明易懂.在中国有着深厚的群众基础，是普及最广的棋类项目.某地区举行中国象棋比赛，先进行小组赛，每三人一组，采用单循环赛(任意两人之间只赛一场)，每场比赛胜者积 3 分，负者积 0 分，平局各 1 分。根据分排名晋级淘汰赛，若出现积分相同的情况，则再进行加赛.已知甲、乙、丙三人分在同一个小组，根据以往比赛数据统计，甲、乙对局时，甲胜概率为 $\frac{2}{5}$ ，平局概率为 $\frac{1}{5}$;甲、丙对局时，甲胜概率为 $\frac{1}{3}$ ，平局概率为 $\frac{1}{3}$;乙、丙对局时，乙胜概率为 $\frac{1}{2}$ ，

平局概率为 $\frac{1}{6}$.各场比赛相互独立，若只考虑单循环赛的三场比赛，求：

(1)甲积分的期望;

(2)甲、乙积分相同的概率

21.(12 分)

平面直角坐标系中， O 为坐标原点， $F_1(-1, 0)$ ， $F_2(1, 0)$ ，动点 M 满足 $|MF_1|$ 、 $|MO|$ 、 $|MF_2|$ 成等比数列.

(1)设动点 M 的轨迹为曲线 E ，求曲线 E 的标准方程;

(2)若动直线 $x=m(m>0)$ 与曲线 E 相交于不同两点 M 、 N ，直线 NF_1 与曲线 E 的另一交点为 P ，证明:直线 MP 过定点.

22.(12 分)

已知函数 $f(x) = x \ln(x+1)$ ， $g(x) = a(x + \frac{1}{x+1} - 1)$

(1)求函数 $f(x)$ 的极值;

(2)①当 $x \in (-1, 0)$ 时， $f(x) \leq g(x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围;

②若函数 $y=f(x)-b(b>0)$ 有两个零点 x_1 、 x_2 ，证明： $2|x_1 - x_2| > \sqrt{b^2 + 4b} + 2\sqrt{b} - b$