2023届高三年级9月份大联考

数学试题

本试卷共4页，22题。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、考号等填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设集合 $A=\{2,4\}$，$B=\{1,2\}$，集合 $M=\left\{z\middle|z=\frac{x}{y},x\in A,y\in B\right\}$，则 M 中所有元素之和为

A. 3　　B. 5　　C. 7　　D. 9

2. 复数 z 满足 $z\cancel{(1+i)}=z-1+2i$（i为虚数单位），则 z 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知抛物线 $C:y^2=8x$ 的准线为 l，l 与 x 轴交于点 P，直线 $x=1$ 与抛物线 C 交于 A，B 两点，则 $\triangle PAB$ 的面积为

A. $4\sqrt{2}$　　B. $6\sqrt{2}$

C. $8\sqrt{2}$　　D. $12\sqrt{2}$

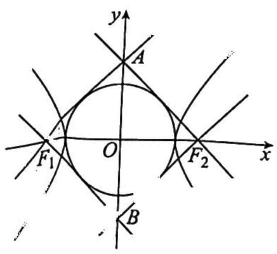
4. 已知 $f(x)=\sqrt{2}\sin(x-\alpha)+\cos x$ 是奇函数，则 $\tan\alpha=$

A. 1　　B. ±1　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\pm\sqrt{3}$

5. 在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，$A(2,0)$，$B(-1,\sqrt{3})$，若动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ $(0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1)$，则所有动点 P 构成的平面图形的面积 $S=$

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

6. 如图，双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点为 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，过 F_1，F_2 作圆 $O:x^2+y^2=a^2$ 的切线，四条切线围成的四边形 F_1AF_2B 的面积为 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$，则双曲线的方程为



A. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$　　B. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$

C. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$　　D. $\frac{2x^2}{3}-\frac{2y^2}{5}=1$

7. 下列各式中，不是 $(a^2+2a-b)^4$ 的展开式中的项的是

A. $8a^7$　　B. $6a^4b^2$　　C. $-32a^3b$　　D. $-24a^3b^2$

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1-ax, x<a,\\ x^2-4x+3, x\geq a.\end{cases}$ 若 $f(x)$存在最小值，则 a 的取值范围为

A. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ B. $[0,\sqrt{2}]$

C. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]\cup(2,+\infty)$ D. $[0,\sqrt{2}]\cup(2,+\infty)$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下面是某省 2016 年至 2021 年乒乓球训练馆新增数量图和乒乓球训练馆类型统计表，则下列说法正确的是

2020—2021 年乒乓球训练馆类型统计表

类型	2020 年	2021 年
A 类型	24%	21%
B 类型	36%	38%
C 类型	40%	41%

A. 2021 年该省乒乓球训练馆产业中 C 类型乒乓球训练馆占比最高

B. 2016 年至 2021 年该省乒乓球训练馆数量逐年上升

C. 2016 年至 2021 年该省乒乓球训练馆新增数量逐年增加

D. 2021 年 B 类型乒乓球训练馆比 2020 年 B 类型乒乓球训练馆数量多

10. *Farey* 数列是这样定义的，对任意给定的一个正整数 n，将分母小于等于 n 的不可约的真分数按升序排列，并且在第一个分数之前加上 $\frac{0}{1}$，在最后一个分数之后加上 $\frac{1}{1}$，这个序列称为 n 级 *Farey* 数列，用$\{F_n\}$表示. 如$\{F_3\}$的各项为：$\frac{0}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{1}$，共有 5 项. 则

A. 数列$\{F_n\}$都有奇数个项

B. 6 级 *Farey* 数列$\{F_6\}$中，中间项为$\frac{1}{2}$

C. 6 级 *Farey* 数列$\{F_6\}$共有 11 项

D. 6 级 *Farey* 数列$\{F_6\}$各项的和为$\frac{13}{2}$

11. 已知函数 $f(x)=e^x(x^2-3x+3)$，则

A. 函数 $f(x)$在$(0,1)$上单调递减

B. 函数 $f(x)$恰有一个零点

C. 当且仅当 $e<m<3$ 时，方程 $f(x)=m$ 恰有三个实根

D. 若当 $x\in(-\infty,t]$$(t\in\mathbf{Z})$时，函数 $f(x)$的最大值为 3，则 t 的最大值为 1

12. 已知圆柱的轴截面的周长为 12，圆柱的体积为 V，圆柱的外接球的表面积为 S，则下列结论正确的是

A. 圆柱的外接球的表面积 S 有最大值，最大值为 36π

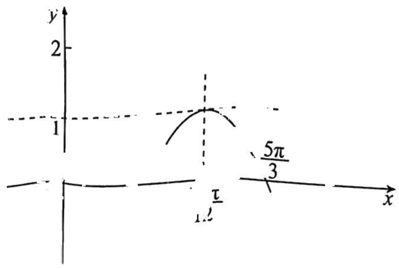
B. 圆柱的外接球的表面积 S 有最小值，最小值为 18π

C. 圆柱的体积 V 有最大值，最大值为 8π

D. 圆柱的体积 V 有最小值，最小值为 4π

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则 $\varphi=$______.



14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2(x+4), & -4<x<0\\ 4^x-1, & x\geqslant 0\end{cases}$，若 $f(f(a))>3$，则 a 的取值范围是______.

15. 写出一个与直线 $y=(2-\sqrt{3})x$ 和 $y=(2+\sqrt{3})x$ 都相切的圆 C 的方程______.（答案不唯一）

16. 在空间直角坐标系中，O 为坐标原点，动点 $P(x,y,z)$ 同时满足下列两个条件：① $0\leqslant x,y,z\leqslant 1$；② $x^2+y^2+z^2>1$. 设所有动点 P 构成的几何体 Γ 的表面积为 S，体积为 V，则 $V=$______，$S=$______.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，公差为 d.

(1) 证明数列 $\{a_n\}$ 为等差数列；

(2) 若 $d=\frac{1}{2}$，$b_n=a_n\cdot 2^n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18.（本小题满分 12 分）

锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{\sqrt{3}a^2\sin B}{4\sin A}$.

(1) 求 C；

(2) 若 $c=2$，边 AB 的中线 $CD=\sqrt{3}$，求 a,b.

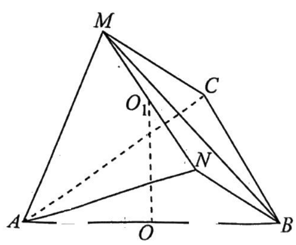
19.（本小题满分 12 分）

如图，三棱锥 $M-ABC$ 中，$\triangle MAC$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形，$MB=4$，$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle BAC=30°$，点 $N\notin$ 平面 ABC，点 O,O_1 分别为线段 AB、MN 的中点，且 $OO_1\perp$ 平面 ABC，$OO_1\perp MN$，

(1) 证明：$BC\perp$ 平面 MAC；

(2) 证明：四边形 $BCMN$ 为矩形；

(3) 求平面 MAC 和平面 NAB 夹角的余弦值.

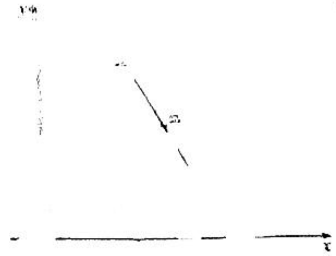


20.（本小题满分 12 分）

如图，平面直角坐标系 xOy 中，点 Q 为 x 轴上的一个动点，动点 P 满足 $|PO|=|PQ|=\frac{3}{2}$，又点 E 满足 $\overrightarrow{PE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EQ}$.

(1) 求动点 E 的轨迹 Γ 的方程；

(2) 过曲线 Γ 上的点 $A(x_0,y_0)(x_0y_0\neq0)$ 的直线 l 与 x，y 轴的交点分别为 M 和 N，且 $\overrightarrow{NA}=2\overrightarrow{AM}$，过原点 O 的直线与 l 平行，且与曲线 Γ 交于 B、D 两点，求 $\triangle ABD$ 面积的最大值.



21.（本小题满分 12 分）

书法是我国及深受我国文化影响过的周边国家和地区特有的一种文字美的艺术表现形式．某大学书法社团在 2022 级新生中招收新团员，通过楷书、隶书两项书法技能测试进行选拔，每项测试结果只有 3 种，分别是一等、二等、三等等级，结果为一等得 3 分，二等得 1 分，三等得 0 分.

甲同学参加楷书测试结果为一等的概率为 $\frac{1}{2}$，二等的概率为 $\frac{1}{3}$；参加隶书测试结果为一等的概率为 $\frac{1}{5}$，二等的概率为 $\frac{3}{5}$；两项测试互不影响，两项测试结束后，甲同学得分之和为 ξ.

(1) 求甲同学参加楷书、隶书两项书法技能测试，恰有一次为三等的概率；

(2) 求 ξ 的分布列与数学期望.

22.（本小题满分 12 分）

已知 $a>0$，函数 $f(x)=xe^x-a$，$g(x)=x\ln x-a$.

(1) 证明：函数 $f(x)$，$g(x)$ 都恰有一个零点；

(2) 设函数 $f(x)$ 的零点为 x_1，$g(x)$ 的零点为 x_2，证明 $x_1x_2=a$.

2023届高三年级9月份大联考

数学参考答案及评分细则

一、单选题

1. C 【解析】当 $x=2,y=1$ 时,$z=2$;当 $x=2,y=2$ 时,$z=1$;当 $x=4,y=1$ 时,$z=4$;当 $x=4,y=2$ 时,$z=2$,所以 $M=\{1,2,4\}$,M 中所有元素之和为7.故选C.

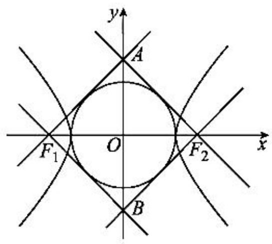
2. A 【解析】$z(1+\mathrm{i})=z-1+2\mathrm{i}$,$z\mathrm{i}=-1+2\mathrm{i}$,$z=\frac{-1+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=2+\mathrm{i}$,所以 z 在复平面内对应点的坐标为 $(2,1)$,位于第一象限.故选A.

3. B 【解析】由题意知 $l:x=-2$,点 $P(-2,0)$,由 $\begin{cases}y^2=8x\\x=1\end{cases}$,得 $y=\pm2\sqrt{2}$,所以△PAB 的面积为 $\frac{1}{2}\times3\times4\sqrt{2}=6\sqrt{2}$.故选B.

4. B 【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $f(0)=0$,即 $\sqrt{2}\sin(-\alpha)+\cos0=0$,解得 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,此时 $f(x)=\sqrt{2}\sin x\cos\alpha-\sqrt{2}\cos x\sin\alpha+\cos x=\sqrt{2}\sin x\cos\alpha=\pm\sin x$ 是奇函数,所以 $\tan\alpha=\pm1$.故选B.

5. D 【解析】设 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 的夹角 α,$\alpha\in[0,\pi]$,由题意所有动点 P 构成的平面图形的面积等于以向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 为邻边的平行四边形的面积,因为 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=2$,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-2$,$\cos\alpha=-\frac{1}{2}$,所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $S=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\alpha=2\sqrt{3}$.故选D.

6. B 【解析】如图,由题意 $c=\sqrt{a^2+b^2}=2$,因为四边形 F_1AF_2B 的面积为 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$,所以直角三角形 AOF_2 面积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$,$\frac{1}{2}|OF_2||OA|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,$|OA|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,$|AF_2|=\sqrt{|OF_2|^2+|OA|^2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,$\frac{1}{2}a\times|AF_2|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,$a=1,b=\sqrt{3}$,双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.故选B.



7. D 【解析】$(a^2+2a-b)^4$ 表示4个因式 a^2+2a-b 的乘积,在这4个因式中,有一个因式选 $2a$,其余的3个因式选 a^2,所得的项为 $C_4^1\times2aC_3^3\times(a^2)^3=8a^7$,所以 $8a^7$ 是 $(a^2+2a-b)^4$ 的展开式中的项,在这4个因式中,有2个因式选 $-b$,其余的2个因式选 a^2,所得的项为 $C_4^2\times(-b)^2\times C_2^2\times(a^2)^2=6a^4b^2$,所以 $6a^4b^2$ 是 $(a^2+2a-b)^4$ 的展开式中的项,在这4个因式中,有1个因式选 $-b$,剩下的3个因式选 $2a$,所得的项为 $C_4^1\times(-b)\times C_3^3(2a)^3=-32a^3b$,所以 $-32a^3b$ 是 $(a^2+2a-b)^4$ 的展开式中的项,在这4个因式中,有2个因式选 $-b$,其余的2个因式中有一个选 a^2,剩下的一个因式选 $2a$,所得的项为 $C_4^2\times(-b)^2\times C_2^1\times a^2\times C_1^1\times(2a)=24a^3b^2$,所以 $-24a^3b^2$ 不是 $(a^2+2a-b)^4$ 的展开式中的项.故选D.

8. B 【解析】若 $a=0$ 时,$f(x)=\begin{cases}1,x<0,\\x^2-4x+3,x\geq0,\end{cases}$ $\therefore f(x)_{\min}=f(2)=-1$;若 $a<0$ 时,当 $x<a$ 时,$f(x)$

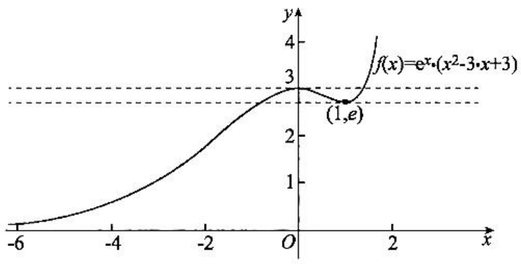
$=1-ax$ 单调递增，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，故 $f(x)$ 没有最小值；若 $a>0$ 时，当 $x<a$ 时，$f(x)=-ax+1$ 单调递减，$f(x)>f(a)=1-a^2$，当 $x\geqslant a$ 时，$f(x)_{\min}=\begin{cases}-1,(0<a<2)\\ a^2-4a+3,(a\geqslant 2)\end{cases}$，若函数 $f(x)$ 有最小值，需 $\begin{cases}1-a^2\geqslant -1\\ 0<a<2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-a^2\geqslant a^2-4a+3\\ a\geqslant 2\end{cases}$，解得 $0<a\leqslant\sqrt{2}$. 故选 B.

二、多选题

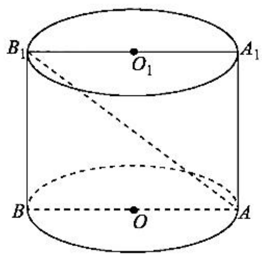
9. ABD 【解析】由统计表可知，2021 年该省乒乓球训练馆产业中 C 类型乒乓球训练馆占比最高，故 A 正确；由图可知，2016 年至 2021 年该省乒乓球训练馆数量逐年上升，故 B 正确；由图可知，2020 年比 2019 年下降了，故 C 错误；由图和统计表可知，2021 年 B 类型乒乓球训练馆比 2020 年 B 类型乒乓球训练馆数量多，故 D 正确. 故选 ABD.

10. BD 【解析】1 级 Farey 数列$\{F_1\}$各项为：$\frac{0}{1},\frac{1}{1}$，A 错误；6 级 Farey 数列$\{F_6\}$各项为：$\frac{0}{1},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{1}{1}$，共有 13 项，中间项为 $\frac{1}{2}$，各项的和为 $\frac{13}{2}$，故 B 正确，C 错误，D 正确. 故选 BD.

11. ACD 【解析】函数 $f(x)=e^x(x^2-3x+3)=e^x\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]>0$，选项 B 错误；$f'(x)=e^x x(x-1)$，$x<0$ 或 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$0<x<1$ 时，$f'(x)<0$. 如图，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(1,+\infty)$ 单调递增，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，选项 A 正确；$f(0)=3$，$f(1)=e$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to 0$，选项 C 正确；如图，当 $x\in(-\infty,t]$ $(t\in\mathbf{Z})$ 时，函数 $f(x)$ 的最大值为 3，则一定有 $t\geqslant 0$，而 $f(2)=e^2>3$，所以 $t(t\in\mathbf{Z})$ 的最大值为 1，选项 D 正确. 故选 ACD.



12. BC 【解析】如图，设圆柱的底面半径为 r，高为 h，圆柱的外接球的半径为 R，由 $4r+2h=12$，得 $2r+h=6$，又 $2R=\sqrt{4r^2+h^2}$，$0<r<3$，圆柱的体积为 $V=\pi r^2 h=\pi r^2(6-2r)=2\pi r^2(3-r)$，$V'=6\pi r(2-r)$，$0<r<2$ 时，$V'>0$；$r>2$ 时，$V'<0$，故 V 在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,3)$ 上单调递减，所以 $r=2$ 时，V 取最大值 8π，所以 $0<V\leqslant 8\pi$. 圆柱的外接球的表面积 $S=4\pi R^2=\pi(4r^2+h^2)=\pi(4r^2+(6-2r)^2)=4\pi(2r^2-6r+9)$，$S$ 在 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{3}{2},3\right)$ 上单调递增，所以 $r=\frac{3}{2}$ 时，S 取最小值 18π. 所以 $18\pi\leqslant S<36\pi$. 故选 BC.



三、填空题

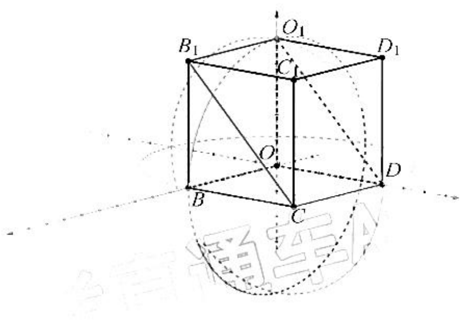
13. $\frac{\pi}{3}$ 【解析】由图象可知：$f(x)$ 的最小正周期 $T=4\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{17\pi}{12}\right)=\pi$，$\therefore\omega=\frac{2\pi}{T}=2$；$\because f\left(\frac{17\pi}{12}\right)=$

$\sin\left(\frac{17\pi}{6}+\varphi\right)=1$，$\therefore \frac{17\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，$\varphi=-\frac{\pi}{3}+2(k-1)\pi(k\in\mathbf{Z})$，因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$. 故答案 $-\frac{\pi}{3}$.

14. $(-2,0)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 【解析】设 $u=f(a)$，$f(f(a))>3$ 即为 $f(u)>3$，化为 $\begin{cases}\log_2(u+4)>3\\-4<u<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}4^u-1>3\\u\geqslant 0\end{cases}$，解得 $u>1$，即 $f(a)>1$，则 $\begin{cases}\log_2(a+4)>1\\-4<a<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}4^a-1>1\\a\geqslant 0\end{cases}$，解得 $-2<a<0$ 或 $a>\frac{1}{2}$.

15. $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=1$（答案不唯一） 【解析】因为 $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$，所以直线 $y=(2-\sqrt{3})x$ 和 $y=(2+\sqrt{3})x$ 关于直线 $y=x$，$y=-x$ 对称，所以与直线 $y=(2-\sqrt{3})x$ 和 $y=(2+\sqrt{3})x$ 都相切的圆 C 的圆心 C 在直线 $y=x$ 或直线 $y=-x$ 上，设圆心 $C(\sqrt{2},\sqrt{2})$，则半径 $r=\frac{|(2-\sqrt{3})\sqrt{2}-\sqrt{2}|}{\sqrt{(2-\sqrt{3})^2+1^2}}=\frac{|\sqrt{6}-\sqrt{2}|}{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}=\frac{|\sqrt{3}-\sqrt{1}|}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=1$. 所以圆 C 的方程为 $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=1$（答案不唯一）.

16. $1-\frac{\pi}{6}$，$6-\frac{\pi}{4}$ 【解析】如图，所有动点 P 构成的几何体 Γ 为一个棱长为 1 的正方体 $OBCD-O_1B_1C_1D_1$ 挖掉一个以 O 为球心，1 为半径的球的 $\frac{1}{8}$. 几何体 Γ 的体积为 $V=1^3-\frac{1}{8}\times\frac{4}{3}\times\pi\times1^3=1-\frac{\pi}{6}$. 几何体 Γ 的表面积为 $S=6\times1^2-3\times\frac{1}{4}\times\pi\times1^2+\frac{1}{8}\times4\times\pi\times1^2=6-\frac{\pi}{4}$.



四、解答题

17. 解：(1) 由题意，$a_1=1$，$\frac{S_1}{1}=1$，

因为数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，公差为 d. 所以 $\frac{S_n}{n}=\frac{S_1}{1}+(n-1)d=nd+1-d$，$S_n=dn^2+(1-d)n$. （1 分）

$n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=dn^2+(1-d)n-d(n-1)^2-(1-d)(n-1)=1+2(n-1)d$， （2 分）

$n=1$ 时，$a_1=S_1=1$，所以 $a_n=1+2(n-1)d$， （3 分）

$n\geqslant 2$ 时，$a_n-a_{n-1}=1+2(n-1)d-1-2[(n-1)-1]d=2d$， （4 分）

所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为 $2d$，首项为 1 的等差数列. （5 分）

(2) 若 $d=\frac{1}{2}$，由 (1) 知，$a_n=n$，$b_n=a_n\cdot 2^n=n\cdot 2^n$，

所以 $T_n=1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$， （6 分）

则 $2T_n=1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+n\times2^{n+1}$， （7 分）

$T_n-2T_n=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\times2^{n+1}$， （8 分）

即 $-T_n=\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}-n\cdot2^{n+1}=(1-n)2^{n+1}-2$， （9 分）

所以 $T_n=(n-1)2^{n+1}+2$. （10 分）

18. **解**：(1) $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$，（1分）

由题意 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}a^2\sin B}{4\sin A}$，（2分）

$2bc\sin^2 A=\sqrt{3}a^2\sin B$，（3分）

由正弦定理得 $2\sin B\sin C\sin^2 A=\sqrt{3}\sin^2 A\sin B$，（4分）

$\because A,B,C$ 为三角形内角，

$\therefore \sin A>0,\sin B>0,\sin C>0$，

$\therefore \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，（5分）

又因为 C 为锐角，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$.（6分）

(2) 由题意知 $AD=BD=1,CD=\sqrt{3}$，

在 $\triangle ACD$ 中 $AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos\angle ADC$，即 $b^2=4-2\sqrt{3}\cos\angle ADC$，（7分）

在 $\triangle BCD$ 中，$BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cdot\cos\angle BDC$，即 $a^2=4-2\sqrt{3}\cos\angle BDC$.（8分）

$\because \angle ADC+\angle BDC=\pi$，

$\therefore \cos\angle ADC=-\cos\angle BDC$，

$\therefore a^2+b^2=8$.（9分）

由(1)知 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$，

$\therefore a^2+b^2=c^2+ab=4+ab$，（10分）

$\therefore ab=4$.（11分）

由 $\begin{cases}a^2+b^2=8\\ ab=4\end{cases}$，解得 $a=b=2$.（12分）

19. **解**：(1) $\because \triangle ABC$ 为直角三角形，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle BAC=30^\circ$，$AC=2\sqrt{3}$，

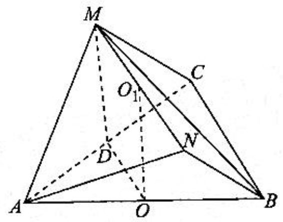
$\therefore AB=4$，$\therefore AB=MB$.（1分）

$\because AC=MC,BC=BC$，

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle MBC$，$\therefore \angle BCM=\angle ACB=90^\circ$ $\therefore BC\perp MC$，（2分）

又 $\because BC\perp AC$，$AC\cap MC=C$，$AC,MC\subset$ 平面 MAC，

$\therefore BC\perp$ 平面 MAC.（4分）



(2) 取 AC 的中点 D，连接 DM、DO，则 $MD\perp AC$，由(1)可知，$BC\perp DM$

$\because AC\cap BC=C$，$\therefore DM\perp$ 平面 ABC，（5分）

又 $\because OO_1\perp$ 平面 ABC，$\therefore DM/\!/OO_1$，$\therefore D$、M、O、O_1 四点共面，

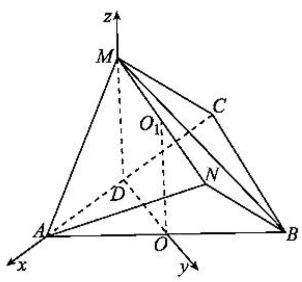
又 $\because OO_1\perp MN$，$OO_1\perp OD$，$\therefore O_1M/\!/OD$，$\therefore$ 四边形 OO_1MD 为矩形，$O_1M=OD$，（6分）

又 $\because O$ 为线段 AB 的中点，$\therefore OD/\!/BC$，$OD=\frac{1}{2}BC$，$OD\perp AC$，（7分）

又 $\because O_1$ 为线段 MN 的中点，$\therefore MN/\!/BC$，$MN=BC$，$\therefore$ 四边形 $BCMN$ 为平行四边形，

又 $\because BC\perp MC$，$\therefore$ 四边形 $BCMN$ 为矩形.（8分）

(3) 由(1)(2)知 DA、DO、DM 两两垂直，所以以 D 为原点，DA 为 x 轴，DO 为 y 轴，DM 为 z 轴，建立如下图所示的空间直角坐标系，



由题意可得 $A(\sqrt{3},0,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$B(-\sqrt{3},2,$

0),$N(0,2,3)$, (9分)

平面MAC的一个法向量为$\boldsymbol{n}_1=(0,1,0)$. (10分)

设平面NAB的一个法向量为$\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$,$\overrightarrow{AB}=(-2\sqrt{3},2,0)$,$\overrightarrow{AN}=(-\sqrt{3},2,3)$,

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AN}=0\end{cases}$得$\begin{cases}-2\sqrt{3}x+2y=0\\ -\sqrt{3}x+2y+3z=0\end{cases}$,令$x=\sqrt{3}$,

则$y=3$,$z=-1$.

故平面NAB的一个法向量为$\boldsymbol{n}_2=(\sqrt{3},3,-1)$. (11分)

则平面MAC与平面NAB的夹角的余弦值为$\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{3}{\sqrt{3+9+1}\cdot 1}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

∴平面MAC和平面NAB夹角的余弦值为$\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$. (12分)

20.**解**:(1)法一:设$E(x,y)$,由题意,设$Q(x',0)$,由$|PO|=|PQ|=\dfrac{3}{2}$得$P\left(\dfrac{1}{2}x',y'\right)$,且$\dfrac{x'^2}{4}+y'^2=\dfrac{9}{4}$, (2分)

由$\overrightarrow{PE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{EQ}$得$E\left(\dfrac{2}{3}x',\dfrac{2}{3}y'\right)$,则$\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}x'\\ y=\dfrac{2}{3}y'\end{cases}$,得$\begin{cases}x'=\dfrac{3}{2}x\\ y'=\dfrac{3}{2}y\end{cases}$, (3分)

代入$\dfrac{x'^2}{4}+y'^2=\dfrac{9}{4}$整理得$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$, (4分)

法二:设$\angle POQ=\alpha$,$P\left(\dfrac{3}{2}\cos\alpha,\dfrac{3}{2}\sin\alpha\right)$,$Q(3\cos\alpha,0)$, (2分)

设$E(x,y)$,则$\begin{cases}x=2\cos\alpha\\ y=\sin\alpha\end{cases}$,

消去α得$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. (3分)

动点E的轨迹Γ的方程为:$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. (4分)

(2)设$A(x_0,y_0)$,$(x_0y_0\neq 0)$,又直线l的斜率存在且$k\neq 0$,

∴设直线l为:$y-y_0=k(x-x_0)$,

可得:$M\left(x_0-\dfrac{y_0}{k},0\right)$,$N(0,y_0-kx_0)$, (5分)

由$\overrightarrow{NA}=2\overrightarrow{AM}$,则$(x_0,kx_0)=2\left(-\dfrac{y_0}{k},-y_0\right)$,故

$x_0=-\dfrac{2y_0}{k}$,$kx_0=-2y_0$, (6分)

联立$\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1\\ x_0=-\dfrac{2y_0}{k}\end{cases}$,可得:$y_0^2=\dfrac{k^2}{1+k^2}$, (7分)

又$BD\parallel l$,故直线BD的方程为$y=kx$,联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=kx\end{cases}$,得:$x^2=\dfrac{4}{1+4k^2}$,

即B、D的横坐标为$\pm\dfrac{2}{\sqrt{1+4k^2}}$, (8分)

∴$|BD|=\sqrt{1+k^2}|x_B-x_D|=\dfrac{4\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1+4k^2}}$, (9分)

∵点A到直线BD的距离$d=\dfrac{|kx_0-y_0|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{|3y_0|}{\sqrt{1+k^2}}$

$=\dfrac{|3k|}{1+k^2}$, (10分)

∴$S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}|BD|\cdot d=\dfrac{6|k|}{\sqrt{1+4k^2}\sqrt{1+k^2}}=$

$\dfrac{6}{\sqrt{\dfrac{(1+k^2)(1+4k^2)}{k^2}}}=\dfrac{6}{\sqrt{4k^2+\dfrac{1}{k^2}+5}}\leqslant$

$\dfrac{6}{\sqrt{2\sqrt{4k^2\times\frac{1}{k^2}}+5}}=2$, (11 分)

当且仅当 $4k^2=\dfrac{1}{k^2}$,即 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立.

∴△ABD 面积的最大值为 2. (12 分)

21. **解**:(1)记 A_i 为事件"甲同学参加楷书测试的得分为 i 分"($i=0,1,3$),

则 $P(A_3)=\dfrac{1}{2}$,$P(A_1)=\dfrac{1}{3}$,$P(A_0)=1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$; (1 分)

记 B_i 为事件"甲同学参加隶书测试的得分为 i 分"($i=0,1,3$),

则 $P(B_3)=\dfrac{1}{5}$,$P(B_1)=\dfrac{3}{5}$,$P(B_0)=1-\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{5}=\dfrac{1}{5}$. (2 分)

记 D 为事件"甲同学参加楷书、隶书两项书法技能测试恰有一次为三等".

由题意,$D=A_3B_0+A_1B_0+A_0B_1+A_0B_3$, (3 分)

由事件的独立性和互斥性,

$P(D)=P(A_3B_0+A_1B_0+A_0B_1+A_0B_3)=P(A_3B_0)+P(A_1B_0)+P(A_0B_1)+P(A_0B_3)$

$=P(A_3)P(B_0)+P(A_1)P(B_0)+P(A_0)P(B_1)+P(A_0)P(B_3)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{10}$. (5 分)

所以甲同学参加楷书、隶书两项书法技能测试,恰有一次为三等的概率为 $\dfrac{3}{10}$. (6 分)

(2)由题意,随机变量 ξ 可能的取值为 0,1,2,3,4,6, (7 分)

由事件的独立性和互斥性,得

$P(\xi=0)=P(A_0B_0)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{30}$,

$P(\xi=1)=P(A_1B_0+A_0B_1)=P(A_1B_0)+P(A_0B_1)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{1}{6}$,

$P(\xi=2)=P(A_1B_1)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{1}{5}$,

$P(\xi=3)=P(A_3B_0+A_0B_3)=P(A_3B_0)+P(A_0B_3)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{2}{15}$,

$P(\xi=4)=P(A_3B_1+A_1B_3)=P(A_3B_1)+P(A_1B_3)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{11}{30}$,

$P(\xi=6)=P(A_3B_3)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{10}$. (10 分)

可得随机变量 ξ 的分布列为:

ξ	0	1	2	3	4	6
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{1}{10}$

(11 分)

所以数学期望 $E(\xi)=0\times\dfrac{1}{30}+1\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{1}{5}+3\times\dfrac{2}{15}+4\times\dfrac{11}{30}+6\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{91}{30}$. (12 分)

22. **解**:(1)函数 $f(x)=xe^x-a$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$f'(x)=(x+1)e^x$, (1 分)

∵$x<-1$ 时,$f'(x)<0$,$x>-1$ 时,$f'(x)>0$,

∴$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减,$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减增, (2 分)

∵$x<0$ 时,$f(x)<0$,$f(0)=-a<0$,$f(a)=ae^a-a=a(e^a-1)>0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 恰有一个零点.　　(3 分)

函数 $g(x)=x\ln x-a$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$g'(x)=\ln x+1$，　　(4 分)

$\because 0<x<\frac{1}{e}$ 时，$g'(x)<0$，$x>\frac{1}{e}$ 时，$g'(x)>0$，

$\therefore g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减，$g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增.　　(5 分)

$\because x<1$ 时，$g(x)<0$，$g(1)=-a<0$，

令 $b>\max\{a,e\}$，$g(b)=b\ln b-a>a(\ln a-1)>0$，

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 恰有一个零点.　　(6 分)

(2)由(1)得函数 $f(x)$ 的零点为 x_1，且 $x_1>0$，$g(x)$ 的零点为 x_2，且 $x_2>1$，

则有 $x_1e^{x_1}-a=0$，$x_2\ln x_2-a=0$，　　(7 分)

$\therefore x_1e^{x_1}=x_2\ln x_2$，　　(8 分)

$\therefore x_1e^{x_1}=\ln x_2 e^{\ln x_2}$，

$\therefore f(x_1)=f(\ln x_2)$，　　(10 分)

$\because f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，由(1)可得 $x_1>0$，$x_2>1$，$\ln x_2>0$，

$\therefore x_1=\ln x_2$，$\therefore e^{x_1}=x_2$，　　(11 分)

$\because x_1e^{x_1}-a=0$，$\therefore x_1x_2-a=0$，

$\therefore x_1x_2=a$. 原式得证.　　(12 分)