黑卷　　姓名________________　　准考证号________________

（在此卷上答题无效）

绝密★启用前

2023年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

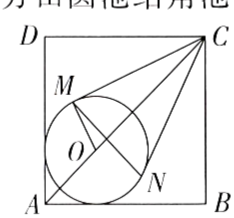
1. 已知$(1-\mathrm{i})z-2\mathrm{i}=2$，则$|z|=$

A. 2　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

2. 设集合$A=\{x\in\mathbf{N}^*|x^2-2x-8<0\}$，$B=\{x|x-a>0\}$，集合$A\cap B$中恰好含有2个元素，则实数$a$的取值范围为

A. $(1,2)$　　B. $[1,2)$　　C. $(1,2]$　　D. $[1,2]$

3. 我国古代数学家朱世杰所著《四元玉鉴》记载有“锁套吞容”之“方田圆池结角池图”，意思是说，有一块正方形田地，在其一角有一个圆形的水池（其中圆与正方形一角的两边均相切），如图所示. 已知圆O的半径为2丈，过C作圆O的两条切线，切点分别为M,N，若$MN=\sqrt{3}OM$，则对角线AC长度为

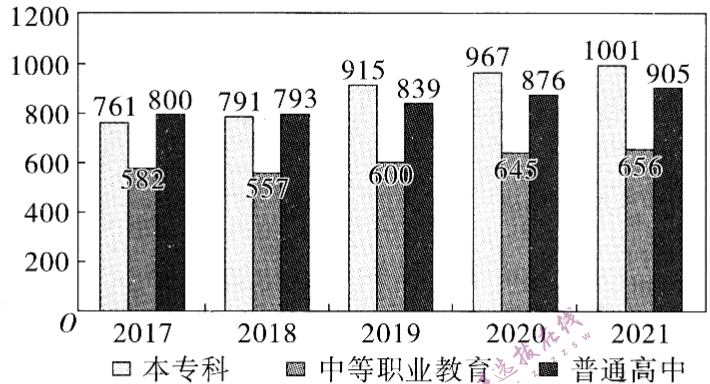


A. $4+2\sqrt{2}$丈　　B. $2+\sqrt{2}$丈

C. $10-2\sqrt{2}$丈　　D. $2+4\sqrt{2}$丈

4. 国家统计局公报显示绘制出的 2017-2021 年每年本专科、中等职业教育及普通高中的招生人数(单位:万)统计图如下图所示,则下列关于 2017-2021 年说法正确的是

2017-2021年本专科、中等职业教育及普通高中的招生人数



A. 每年本专科、中等职业教育和普通高中的招生人数都在增长

B. 中等职业教育和普通高中的招生人数差距最大的年份是 2019 年

C. 本专科每年的招生人数增幅最大的年份是 2018 年

D. 本专科的招生人数所占比例最高的年份是 2021 年

5. 已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n, $a_4=1$, $S_8=3(a_2+a_4+a_6+a_8)$,则

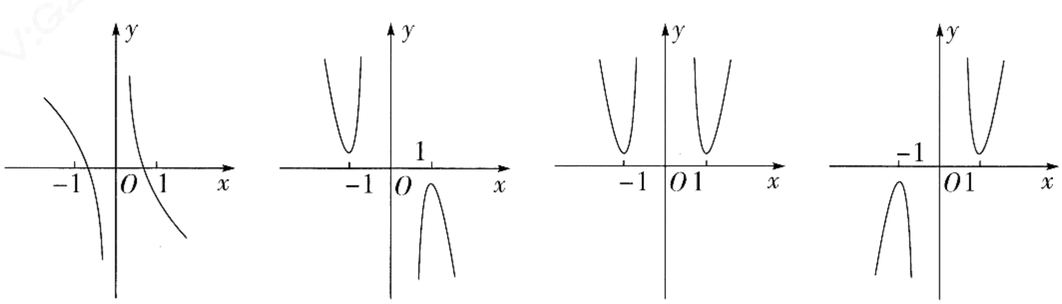
A. $a_n=2^{n-4}$　　　　B. $a_n=2^{n+4}$

C. $S_n=16+2^{4-n}$　　　　D. $S_n=16-2^{4-n}$

6. 设函数$f(x)=\dfrac{x}{e^x}$,则曲线 $y=f(x)$ 在$(-1,f(-1))$处的切线与两坐标轴围成的三角形面积为

A. e　　　　B. $\dfrac{e}{2}$　　　　C. $\dfrac{e}{4}$　　　　D. $\dfrac{e}{8}$

7. 函数$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{\ln|x|}{x}$的图象可能为



A　　　　B　　　　C　　　　D

8. 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A,B 两点，$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，且 $|AB|=8$，则 $p=$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

9. 已知函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{2\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 在区间 (a,b) 内单调且 $b-a=\frac{\pi}{2}$，在区间 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 内存在最值点，则当 ω 取得最大值时，满足 $f(x_0)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的一个 x_0 值可能为

A. 0　　B. $\frac{\pi}{12}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

10. 已知四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为梯形，$AB/\!/DC$，$\angle BAD=90°$，$AD=CD=2$，$AB=4$，$\triangle PAB$ 为正三角形，平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，E,F 分别为 PA,PB 的中点，则

A. $CF/\!/$平面 PAD

B. PD 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $DE\perp PB$

D. 四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的体积为 $8\sqrt{3}$

11. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，$F_1,F_2$ 为 C 的左、右焦点，$B(0,4b)$，直线 BF_2 与 C 的一支交于点 P，且 $\frac{|BP|}{|PF_2|}=\lambda(\lambda\geqslant1)$，则 C 的离心率最大值为

A. $\sqrt{5}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{5}$

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2,x<0,\\(x-1)^2,x\geqslant0,\end{cases}$ 函数 $y=t$ 的图象与曲线 $y=f(x)$ 有 3 个不同的交点，其横坐标依次为 x_1,x_2,x_3，设 $x_1<x_2<x_3$，则 $x_2-x_1x_3$ 的取值范围为

A. $\left[2,\frac{86}{27}\right]$　　B. $\left(2,\frac{86}{27}\right]$　　C. $(2,3]$　　D. $[2,3]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(x+1,\sqrt{3})$，$\boldsymbol{b}=(1,0)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2$，则向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为________.

14. 2022 年 11 月 29 日，神舟十五号载人飞船成功发射升空，在飞船入轨后未来 6 个月里，空间站将逐步解锁、安装并测试 15 个科学实验机柜，开展涵盖空间科学研究与应用、航天医学、航天技术等领域的 40 余项空间科学实验和技术试验. 已知此科学实验机柜在投入使用前会进行调试工作，现有 8 个科学实验机柜，其中包括 5 个 A 类型、3 个 B 类型，两名调试员计划共抽取 3 个机柜进行调试，则至少有 1 人抽到 B 类型机柜进行调试的概率为________.

15. 已知正项数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,满足$4S_n=a_n^2+2a_n-8$,则$a_8=$________.

16. 在直四棱柱$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$中,$AB=AD=2$,$AA_1=4$,M,N在棱BB_1,DD_1上,且$B_1M=2$,$D_1N=1$,过A_1MN的平面交CC_1于G,则截面A_1MGN的面积为________;若线段A_1G上存在一点P,使得$AP\perp A_1G$,则$\dfrac{PG}{A_1G}=$________.(第一空2分,第二空3分).

三、解答题:共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题,考生根据要求作答。

(一)必考题:共60分。

17. (12分)

已知锐角$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c.在下列三个条件①$\boldsymbol{m}=\left(\sin A,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\boldsymbol{n}=(2\cos 2A,2\cos A)$,且$\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$;②$a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$;③$\cos^2 B+\cos^2 C=\cos^2 A+1-\sin B\sin C$中任选一个,回答下列问题.

(1)求A;

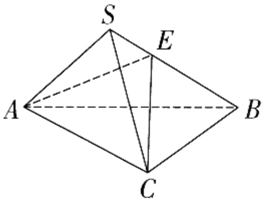
(2)若$a=2$,求$\triangle ABC$面积的最大值.

18. (12 分)

在三棱锥 $S\text{-}ABC$ 中,底面 ABC 是边长为 4 的正三角形,侧面 $SAC\perp$ 底面 ABC, $SA=SC$, $SB=2\sqrt{5}$,点 E 在线段 SB 上,且 $\frac{SE}{EB}=\frac{2}{3}$.

(1)证明:$SB\perp$ 平面 ACE;

(2)求二面角 $A-SB-C$ 的正弦值.



19.（12分）

锚定2060碳中和，中国能源演进“绿之道”，为响应绿色低碳发展的号召，某地在沙漠治理过程中，计划在沙漠试点区域四周种植红柳和梭梭树用于防风固沙，中间种植适合当地环境的特色经济作物，通过大量实验发现，单株经济作物幼苗的成活率为0.8，红柳幼苗和梭梭树幼苗成活的概率均为p，且已知任取三种幼苗各一株，其中至少有两株幼苗成活的概率不超过0.896.

（1）当p最大时，经济作物幼苗的成活率也将提升至0.88，求此时三种幼苗均成活的概率（$\sqrt{10.24}=3.2$）；

（2）正常情况下梭梭树幼苗栽种5年后，其树杆地径服从正态分布$N(250,5^2)$（单位：mm）.

（ⅰ）梭梭树幼苗栽种5年后，若任意抽取一棵梭梭树，则树杆地径小于235 mm的概率约为多少？（精确到0.001）

（ⅱ）为更好地监管梭梭树的生长情况，梭梭树幼苗栽种5年后，农林管理员随机抽取了10棵梭梭树，测得其树杆地径均小于235 mm，农林管理员根据抽检结果，认为该地块土质对梭梭树的生长产生影响，计划整改地块并选择合适的肥料，试判断该农林管理员的判断是否合理？并说明理由.

附：若随机变量Z服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则$P(\mu-\sigma\leqslant Z\leqslant\mu+\sigma)\approx0.6827$，$P(\mu-2\sigma\leqslant Z\leqslant\mu+2\sigma)\approx0.9545$，$P(\mu-3\sigma\leqslant Z\leqslant\mu+3\sigma)\approx0.9973$.

20. (12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,A,B 为其左、右顶点,M 为椭圆上一点,且 $k_{MA}\cdot k_{MB}=-\frac{3}{4}$.

(1)求 C 的离心率;

(2)若左焦点 F_1 到椭圆上的点的最大距离为 3,且直线 MF_2 交 C 于另一点 N,已知$\triangle AMF_2$ 的面积是$\triangle ANF_2$ 的 2 倍,求直线 MN 的方程.

21. (12 分)

已知函数 $f(x)=a\ln x-x^2$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)若函数 $g(x)=f(x)+(2-a)x$ 恰有两个零点,求实数 a 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中选定一题作答，并用铅笔在答题卡上将所选题目对应的题号方框涂黑。按所涂题号进行评分，不涂、多涂均按所答第一题评分；多答按所答第一题评分。

22. ［选修 4-4：坐标系与参数方程］（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=t+4, \\ y=\sqrt{16-t^2} \end{cases}$（$t$ 为参数），曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}s, \\ y=8\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}s \end{cases}$（$s$ 为参数）.

（1）求曲线 C_2 被曲线 C_1 所截得的弦长；

（2）以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_3 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta-8=0$，记曲线 C_1 与 C_3 交于 A，B 两点，求 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.

23. ［选修 4-5：不等式选讲］（10 分）

已知函数 $f(x)=|3x-2|+|3x+a|$（$a\in\mathbf{R}$）.

（1）当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x)\leqslant 6$ 的解集；

（2）若 $f(x)\geqslant 4$，求 a 的取值范围.