参照秘密级管理★启用前

淄博市2021-2022学年度高三模拟考试

数学参考答案

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．B；2．C；3．A；4．B；5．B；6．D；7．A；8．C．

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9．AD；10．AC；11．BC；12．AC．

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．90；14．2或8；15．$\frac{1}{e}$；16．16．

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10分）解：选①，因为$\frac{2a-\sqrt{3}c}{\sqrt{3}b}=\frac{\cos C}{\cos B}$，

所以由正弦定理可得$\left(2\sin A-\sqrt{3}\sin C\right)\cos B=\sqrt{3}\sin B\cos C$，

即$2\sin A\cos B=\sqrt{3}\left(\sin B\cos C+\sin C\cos B\right)=\sqrt{3}\sin\left(B+C\right)$． ………4分

因为$A=\pi-B-C$，所以$\sin A=\sin\left(B+C\right)$，

所以$2\sin A\cos B=\sqrt{3}\sin A$． ………6分

因为$\sin A\neq 0$，所以$\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$． ………8分

因为$0<B<\pi$，所以$B=\frac{\pi}{6}$． ………10分

选②，因为$\frac{\sin A-\sqrt{3}\sin C}{\sin B+\sin C}=\frac{b-c}{a}$，

所以由正弦定理可得$\dfrac{a-\sqrt{3}c}{b+c}=\dfrac{b-c}{a}$， ·········4 分

整理可得$a^2-\sqrt{3}ac=b^2-c^2$，即$a^2+c^2-b^2=\sqrt{3}ac$， ·········6 分

由余弦定理$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，可得$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}ac}{2ac}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， ·········8 分

因为$0<B<\pi$，所以$B=\dfrac{\pi}{6}$. ·········10 分

选③, 因为$a\sin B\sin C-b\cos A\cos C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}b$，

所以由正弦定理可得$\sin A\sin B\sin C-\sin B\cos A\cos C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin B$， ·········4 分

因为$\sin B\neq 0$，所以$\sin A\sin C-\cos A\cos C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

即$\cos(A+C)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， ·····································6 分

因为$B=\pi-A-C$，所以$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， ·········8 分

因为$0<B<\pi$，所以$B=\dfrac{\pi}{6}$ ················10 分

18.（12 分）解:（1） $b_{n+1}=a_{2n+1}=2a_{2n}=2(a_{2n-1}+1)=2b_n+2$，

所以$\dfrac{b_{n+1}+2}{b_n+2}=2$， ···2 分

又$b_1+2=a_1+2=4$，

所以$\{b_n+2\}$是首项为 4 公比为 2 的等比数列， ························4 分

所以$b_n+2=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$，

所以$b_n=2^{n+1}-2$. ···6 分

（2）$S_{2n}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n}$

$=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})$

$=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}+n)$ ……………………………8 分

$=2(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+n$

$=2(b_1+b_2+\cdots+b_n)+n$

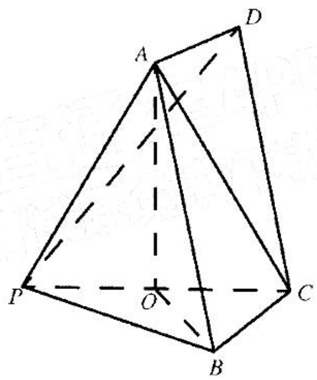
$=2\times(2^2+2^3+\cdots+2^{n+1}-2n)+n$

$=2\times\left[\dfrac{2^2\times(1-2^n)}{1-2}\right]-3n$

$=2^{n+3}-3n-8$． ……………………………………………………………12 分

19．（12 分）解：（1）**法 1**：因为 $AP=AC$，O 为 PC 的中点，

所以 $AO\perp PC$， ……………………………………………………………1 分



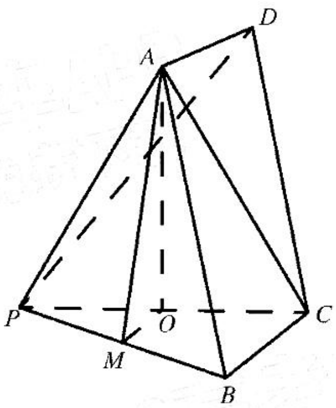
连结 BO，因为 ΔPBC 是以 PC 为斜边的直角三角形，

所以 $OB=OC$，又 $AB=AC$，AO 为 ΔAOB 和 ΔAOC 的公共边，

所以 $\Delta AOB\cong\Delta AOC$，所以 $\angle AOC=\angle AOB=90^\circ$，即 $AO\perp OB$，………3分

所以直线 $AO\perp$ 平面 PBC． ……………………………………………4 分

法2：取 PB 的中点 M，连结 OM,AM，



因为 $AP=AB$，所以 $AM\perp PB$，又 $OM//BC$，$BC\perp PB$，

所以 $OM\perp PB$，因为 $AM\bigcap OM=M$，所以 $PB\perp$ 平面 AOM，

所以 $AO\perp PB$，……………………………………………2分

因为 $AP=AC$，所以 $AO\perp PC$，……………………………3 分

又 $PB\bigcap PC=P$，所以直线 $AO\perp$ 平面 PBC .……………………4 分

法3：过点 A 作 $AH\perp$ 平面 PBC，垂足为 H，

因为 $AP=AB=AC$，所以 $HP=HB=HC$，

所以点 H 为 ΔPBC 的外心，……………………………………………2 分

因为 ΔPBC 为直角三角形，O 为斜边 PC 的中点，

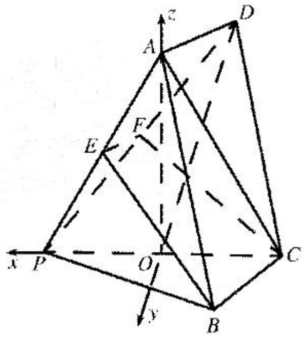
所以点 O 为 ΔPBC 的外心，故点 H 即为点 O（H 与 O 重合）

所以直线 $AO\perp$ 平面 PBC ………………………………………………4 分

（2）因为 $AD//BC$，所以 $BC//$ 平面 PAD，所以 $EF//BC$，所以 $EFCB$ 是梯形，

因为 $EF=3=\dfrac{1}{2}AD$，所以 E,F 分别为侧棱 PA,PD 的中点. ………5分

据（1）以 OP 所在直线为 x 轴，以过点 O 且垂直于平面 PAC 的直线为 y 轴，以 OA 所在的直线为 z 轴建立空间直角坐标系 $Oxyz$ 如图所示，



由题设可得：$PC=10$，因为 $AP=13$，所以 $AO=12$，……………………6分

所以 $P(5,0,0)$，$B(-\frac{7}{5},\frac{24}{5},0)$，$C(-5,0,0)$，$A(0,0,12)$，

所以 $\overrightarrow{BP}=(\frac{32}{5},-\frac{24}{5},0)$，$\overrightarrow{BA}=(\frac{7}{5},-\frac{24}{5},12)$，

所以 $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BA})=(\frac{39}{10},-\frac{24}{5},6)$，又 $\overrightarrow{BC}=(-\frac{18}{5},-\frac{24}{5},0)$，

设 $\vec{m}=(x,y,z)$ 是平面 α 的法向量，因为 $BE,BC\subseteq$ 平面 α，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}3x+4y=0\\ 13x-16y+20z=0\end{cases}$，

取 $x=4$，则 $y=-3,z=-5$，得 $\vec{m}=(4,-3,-5)$，……………………9分

因为 $\overrightarrow{OA}=(0,0,12)$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，

所以 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=(-\frac{18}{5},-\frac{24}{5},12)$，……………………………………10分

设直线 DO 与平面 α 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{\left|\vec{m}\cdot\overrightarrow{OD}\right|}{|\vec{m}|\cdot\left|\overrightarrow{OD}\right|}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，

即直线 DO 与平面 α 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$．……………………………12 分

20．（12 分）解：（1）事件“A：3 次机会至少射中 1 次”的对立事件为“B：3 次机会均未射中”；

$P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{27}$；……………………………………2 分

所以$P(A)=1-\frac{5}{27}=\frac{22}{27}$ ……………………………………3 分

（2）设本次比赛选手射中的次数为X，$X\in\{0,1,2,3\}$ ………………4 分

$P(X=0)=\frac{5}{27}$；

$P(X=1)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{7}{27}$； ………………6 分

$P(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{27}$； ………………8 分

$P(X=3)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$； ……………………………………………10 分

$EX=0\times\frac{5}{27}+1\times\frac{7}{27}+2\times\frac{7}{27}+3\times\frac{8}{27}=\frac{5}{3}$；

本次比赛选手平均射中$\frac{5}{3}$次 ……………………………………12 分

21．（12分）解：（1）**解法1：** 由题设知，椭圆E的焦距$2c=|F_1F_2|=4$，即$c=2$，

因为点P在椭圆E上，所以$|PF_1|+|PF_2|=2a$

即$2a=\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2+1^2}+\sqrt{(\sqrt{3}+2)^2+1^2}=\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{2}=2\sqrt{6}$，

所以$a=\sqrt{6}$ ……………………………………………2分

又因为$b^2=a^2-c^2=6-4=2$，

所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$． ……………………………………………4分

解法2： 椭圆E的焦距$2c=|F_1F_2|=4$，即$c=2$，所以$a^2=b^2+c^2=b^2+4$，

又点$P(\sqrt{3},1)$在椭圆E上，所以$\frac{3}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，$\frac{3}{b^2+4}+\frac{1}{b^2}=1$，

解得$b^2=2$， ……………………………………………2分

所以$a^2=b^2+4=6$

所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$． ……………………………………………4分

（2）**解法1**：设直线 l 与椭圆 E 的交点为 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，

若直线 l 斜率不存在时，方程为 $x=2$，$|y_1|=|y_2|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

此时 ΔF_1AB 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times4\times2\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$． ……………………5分

若直线 l 的斜率存在时，设 $l:y=kx-2k$，

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=kx-2k\end{cases}$，得 $(1+3k^2)x^2-12k^2x+12k^2-6=0$， ……………6分

所以 $x_1+x_2=\dfrac{12k^2}{1+3k^2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{12k^2-6}{1+3k^2}$， ……………………7分

故 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2}=\dfrac{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{k^2+1}}{1+3k^2}$，

所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\dfrac{2\sqrt{6}(1+k^2)}{1+3k^2}$，点 F_1 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|4k|}{\sqrt{1+k^2}}$，

所以 ΔF_1AB 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|AB|\times d=\dfrac{4\sqrt{6}|k|\sqrt{1+k^2}}{1+3k^2}$， ………………9分

因为 $\left|\sqrt{2}k\right|\cdot\sqrt{1+k^2}\le\dfrac{(\sqrt{2}k)^2+(\sqrt{1+k^2})^2}{2}=\dfrac{1+3k^2}{2}$，

所以 $S=\dfrac{4\sqrt{6}|k|\sqrt{1+k^2}}{1+3k^2}\le2\sqrt{3}$， ……………………………………10分

当且仅当 $\left|\sqrt{2}k\right|=\sqrt{1+k^2}$ 即 $k=\pm1$ 时等号成立，

因为 $2\sqrt{3}>\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$，所以 ΔF_1AB 的最大面积为 $2\sqrt{3}$，此时 $k=\pm1$

所以直线 l 的方程为 $x-y-2=0$ 或 $x+y-2=0$． ……………………12分

解法2：设直线 l 的方程为 $x=my+2$， ……………………5分

直线 l 与椭圆 E 的交点为 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ x=my+2\end{cases}$，得，$(m^2+3)y^2+4my-2=0$， ……………………6分

所以$y_1+y_2=-\dfrac{4m}{m^2+3}$，$y_1\cdot y_2=-\dfrac{2}{m^2+3}$， ………………………7分

故$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1\cdot y_2}=\dfrac{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{m^2+1}}{m^2+3}$，

所以ΔF_1AB的面积$S=\dfrac{1}{2}|y_1|\times 2c+\dfrac{1}{2}|y_2|\times 2c=2|y_1-y_2|$，

所以$S=\dfrac{4\sqrt{6}\cdot\sqrt{m^2+1}}{m^2+3}$， ……………………………………9分

设$t=\sqrt{m^2+1}$，$t\geq 1$，所以$S=\dfrac{4\sqrt{6}t}{t^2+2}=\dfrac{4\sqrt{6}}{t+\dfrac{2}{t}}$，

因为$t+\dfrac{2}{t}\geq 2\sqrt{2}$，当且仅当$t=\dfrac{2}{t}$即$t=\sqrt{2}$时等号成立，

所以$S\leq 2\sqrt{3}$， ……………………………………10分

此时$\sqrt{m^2+1}=\sqrt{2}$，$m=\pm 1$，

故直线l的方程为$x-y-2=0$或$x+y-2=0$． ………………………12分

22.（12分）证明：（1）$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-a=\dfrac{-a(x-\frac{1}{a}+1)}{x+1}(a>0)$ ……1分

令$f'(x)=0$，解得$x=\dfrac{1}{a}-1\ (x>-1)$ ………………2分

当$x\in(-1,\dfrac{1}{a}-1)$时，$f'(x)>0$；当$x\in(\dfrac{1}{a}-1,+\infty)$，$f'(x)<0$，所以

$f(x)_{\max}=f(\dfrac{1}{a}-1)=\ln\dfrac{1}{a}-a(\dfrac{1}{a}-1)+1=a-\ln a$，即$h(a)=a-\ln a$ ……3分

由$h'(a)=1-\dfrac{1}{a}=0$，解得$a=1$，

且当$a\in(0,1)$时$h'(a)<0$，当$a\in(1,+\infty)$ $h'(a)>0$，

故 $h(a)_{\min}=h(1)=1$，所以 $h(a)\geq 1$． ……………………4 分

（2）$g(x)=\ln(x+1)-ax+1+\frac{1}{2}x^2$

$g'(x)=\frac{1}{x+1}+x-a=\frac{x^2-(a-1)x-(a-1)}{x+1}$ ……………………5 分

令 $\varphi(x)=x^2-(a-1)x-(a-1)$

所以 $x_1+x_2=a-1$，$x_1x_2=1-a$， ……………………6 分

依题意，二次函数 $\varphi(x)$ 有两个变号大于 -1 的零点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，于是有

$$\begin{cases}\Delta=(a-1)^2+4(a-1)=(a-1)(a+3)>0\\(x_1+1)+(x_2+1)=(a-1)+2=a+1>0\\(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+x_1+x_2+1=-(a-1)+(a-1)+1=1>0\end{cases}$$

解得 $a>1$ ……………………8 分

（另解：因为 $g(x)$ 有两个极值点，

$g'(x)=\frac{1}{x+1}+x-a=0$ 有两个不等的且大于 -1 的实数根，

所以 $a=\frac{1}{x+1}+(x+1)-1>2\sqrt{\frac{1}{(x+1)}\cdot(x+1)}-1=1$ ……………………8 分）

$g(x_1)+g(x_2)=\ln(x_1+1)+\ln(x_2+1)-a(x_1+x_2)+\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)+2$

$=\ln[x_1x_2+(x_1+x_2)+1]-a(x_1+x_2)+\frac{1}{2}[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]+2$

$=-\frac{1}{2}(a-1)^2+2$， ……………………11 分

因为 $a>1$，所以 $g(x_1)+g(x_2)<2$． ……………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：zizzsw。