

数 子 ( 文 ) 卷

命题: 上进教育研究院

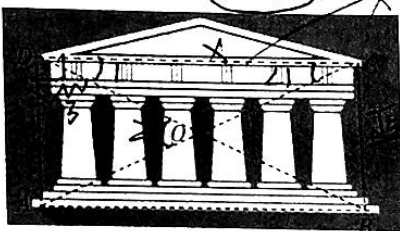
审题: 鹰潭一中

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $M = \{x | 2 < x < 7\}$ ,  $N = \{x | 1 < x < 3\}$ , 则  $M \cap N =$
- A.  $\{x | 1 < x < 7\}$     B.  $\{x | 1 < x < 2\}$     C.  $\{x | 2 < x < 3\}$     D.  $\{x | 3 < x < 7\}$
2. 设  $a = \ln 0.9$ ,  $b = 2^e$ ,  $c = 3^{-e}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为
- A.  $c < a < b$     B.  $a < c < b$     C.  $b < c < a$     D.  $a < b < c$
3. 已知命题  $p$ : 复数  $z_1 = 2i$  的实部为 2; 命题  $q$ : 复数  $z_2 = 2 - i$  的模为  $\sqrt{5}$ , 则下列命题中为真命题的是
- A.  $\neg p \wedge q$     B.  $\neg (p \vee q)$     C.  $p \wedge q$     D.  $p \wedge \neg q$
4. 人们一般把边长之比为黄金分割比的矩形称为黄金矩形, 即黄金矩形的短边为长边的  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . 黄金矩形能够给画面带来美感, 令人愉悦, 在很多艺术品以及大自然中都能找到它。帕特农神庙的部分轮廓 ABCD 就是黄金矩形 (如下图所示)。则图中  $\angle AOD$  的正切值等于



$\tan \angle AOD$

$\angle 2 = 180^\circ - 2 \cdot \angle 3$

$\tan(\alpha + \beta) = \tan \dots$   
 $\tan \angle 1 = \frac{BC}{DC} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot x}{x}$

- A.  $\frac{\sqrt{5}+3}{2}$     B.  $\sqrt{5}-1$     C.  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$     D. 2
5. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的公比为 3, 前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $a_2 a_5 + a_6 = 0$ , 则  $S_5 =$
- A. -242    B. 242    C. -121    D. 121
6. 为了庆祝建党 100 周年, 某网站从 7 月 1 日开始推出党史类书籍免费下载活动, 已知活动推出时间  $x$  (单位: 天) 与累计下载量  $y$  (单位: 万次) 的统计数据如表所示:

$x$	4	5	6	7	8
$y$	6	8	9	10	12

根据上表, 利用最小二乘法得到回归直线方程  $\hat{y} = 1.4x + \hat{a}$ , 据此模型预测, 活动推出 11 天的累计下载量约为

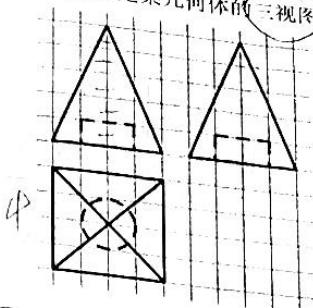
- A. 13.8 万次    B. 14.6 万次    C. 16 万次    D. 18 万次

7. 若实数  $x, y$  满足  $\begin{cases} x - y \leq 3, \\ x \geq 2, \\ 2x + y \leq 5, \end{cases}$  则  $z = x + y$  的最小值为
- A. -1    B. 1    C. 3    D.  $\frac{8}{3}$

【数学(文)(第 1 页)】

8. 已知下图中小正方形的边长为1, 粗线画出的是某几何体的三视图, 则该几何体的体积为

$h=4$



如右

$h = \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{3} = \frac{16}{9}$

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 1 \cdot \frac{16}{9} = \frac{16\pi}{27}$

A.  $\frac{64-\pi}{3}$

B.  $\frac{80-\pi}{3}$

C.  $\frac{64}{3} - \pi$

D.  $\frac{80}{3} - \pi$

9. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 3^x - 1, & x \leq 0, \\ -\log_3(x+1), & x > 0, \end{cases}$  若  $f(m) = \frac{1}{2}$ , 则  $m =$

A. 1

C. 1 或  $\log_3 2$

D. 1 或  $\log_3 2$

$x > -1$

$\log_3$

10. 已知函数  $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{3})$ , 将  $f(x)$  的图象上所有点的横坐标拉伸为原来的2倍后得到函数  $g(x)$  的图象, 若  $m, n$  是  $g(x)$  的两个零点, 则  $|m-n|$  的值可能为

A.  $2\pi$

B.  $\frac{3\pi}{2}$

C.  $\pi$

D.  $\frac{3\pi}{4}$

$f(x) = \sin(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{3})$

11. 已知点  $P, Q$  分别在函数  $f(x) = e^x + 1$  与  $g(x) = x - 2$  的图象上运动, 则  $|PQ|$  的最小值为

A. 1

B.  $\sqrt{2}$

C. 2

D.  $2\sqrt{2}$

12. 设  $O$  为坐标原点, 双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右焦点为  $F$ , 点  $P$  是  $C$  上在第一象限的点, 点  $Q(x_0, y_0)$  满足  $bx_0 + ay_0 = 0$ , 且线段  $OP, QF$  互相垂直平分, 则  $C$  的离心率为

A.  $\sqrt{2}$

B.  $\sqrt{2} + 1$

C.  $\sqrt{3}$

D.  $\sqrt{3} + 1$

二、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分.

13. 已知向量  $a = (2, -3), b = (1, -3), c = (1, \lambda)$ , 若  $(a+2b) \perp c$ , 则  $\lambda = \frac{4}{9}$ .

14. 已知正三棱柱的所有棱长均为  $a$ , 且所有顶点都在一个球面上, 若该球的表面积为  $\frac{28\pi}{3}$ , 则  $a = 2$ .

15. 设  $O$  为坐标原点,  $A, B$  是抛物线  $C: x^2 = 2py (p > 0)$  与圆  $E: x^2 + (y-8)^2 = r^2 (r > 0)$  关于  $y$  轴对称的两个交点, 若  $|AB| = |OA| = r$ , 则  $p = 1$ .

16. 记等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $a_6 = 18, S_{10} = 165, b_n = \begin{cases} \cos(a_n \pi), & n \text{ 为奇数} \\ \sin(a_n \pi), & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 则  $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{2021} = 0$ .

三、解答题: 共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第17~21题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第22、23题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共60分.

17. (本小题满分12分)

2021年6月17日, 我国自主研发的“神舟十二号”载人航天飞船成功发射, 一共有三名宇航员飞入太空, 并在太空驻留三个月, 展开非常复杂和先进的任务, 这展现了我国在该项技术上的先进性. 某校为了解同学们对“神舟十二号”载人航天飞船任务知晓情况, 随机抽查了男、女各100名同学, 得到下面的  $2 \times 2$  列联表.

【数学(文)(第2页)】



	知晓	不知晓	总计
男	95	5	100
女	80	20	100
总计	175	25	200

- (1) 能否有 99% 以上的把握认为对“神舟十二号”载人航天飞船任务知晓情况与性别有关?  
 (2) 若被调查的 200 名学生中有 5 名航模爱好者, 其中男同学 3 人, 女同学 2 人, 现在从这 5 名学生中随机抽取 3 人, 求至多抽得 1 名女同学的概率.

附:  $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ , 其中  $n = a+b+c+d$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
$k$	3.841	6.635	10.828

Handwritten calculations for the chi-square test:  

$$\frac{2(95 \cdot 20 - 80 \cdot 5)^2}{100 \cdot 175 \cdot 25} = \frac{2(1900 - 400)^2}{437500} = \frac{2(1500)^2}{437500} = \frac{4500000}{437500} \approx 10.286$$

18. (本小题满分 12 分)

$\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边分别是  $a, b, c$ , 已知  $c=6$ , 且  $2\sqrt{3}\sin A = a\cos C$ .

- (1) 求角  $C$  的大小;  
 (2) 若  $CH \perp AB$ , 垂足为  $H$ , 求  $CH$  的最大值.

Handwritten notes for problem 18:  
 $B \ C \ 1, 2$   
 $AC$   
 $\leq \frac{c}{2}$   
 $\leq \frac{1}{2}$   
 $\leq \frac{1}{2}$   
 $\leq \frac{1}{2}$

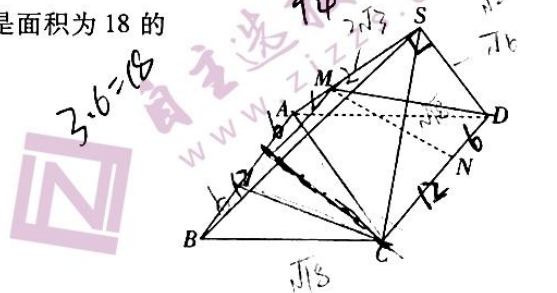
Handwritten calculations for problem 18:  
 $2\sqrt{3}\sin A = a\cos C$   
 $2\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2R} = a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$   
 $\sqrt{3} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$   
 $2\sqrt{3}c = b^2 + c^2 - a^2$   
 $12 = b^2 + 36 - a^2$   
 $a^2 - b^2 = 24$   
 $(a-b)(a+b) = 24$   
 $3 \cdot 8 = 24$   
 $a-b=3, a+b=8$   
 $2a=11, a=5.5$   
 $b=2.5$   
 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{30.25 + 6.25 - 36}{2 \cdot 5.5 \cdot 2.5} = \frac{6.5}{27.5} = \frac{13}{55}$   
 $C = \arccos \frac{13}{55}$

19. (本小题满分 12 分)

如图, 四棱锥  $S-ABCD$  中,  $SA=2\sqrt{3}, SD=\sqrt{6}$ , 底面  $ABCD$  是面积为 18 的正方形, 点  $M, N$  分别在线段  $SA, CD$  上, 且  $\frac{SM}{SA} = \frac{CN}{CD} = \frac{2}{3}$ .

- (1) 求证: 直线  $MN \parallel$  平面  $SBC$ ;  
 (2) 若平面  $SAD \perp$  平面  $ABCD$ , 求点  $B$  到平面  $SCD$  的距离.

Handwritten notes for problem 19:  
 $\} \ C \ 12$   
 $\} \ \underline{\quad}$   
 $\} \ \underline{\quad}$



20. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = 2x \ln x - x^2$ . ( $x > 0$ )

(1) 判断函数  $f(x)$  的单调性;

(2) 当  $0 < m \leq 1, x > 1$  时, 求证:  $f(x) + 2e^m < 2(1-m)x + e^{2m}$ .

$$\frac{1}{a} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \quad \frac{12}{3}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  过点  $(-1, -\frac{3}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{3\sqrt{5}}{4})$ .

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 记  $C$  的左顶点为  $M$ , 上顶点为  $N$ , 点  $A$  是  $C$  上在第四象限的点,  $AM, AN$  分别与  $y$  轴,  $x$  轴交于  $P, Q$  两点, 试探究四边形  $MNPQ$  的面积是否为定值? 若是, 求出定值; 若不是, 请说明理由.

$$\frac{1}{4a^2} + \frac{9}{16b^2} = 1$$

$$\frac{1}{4a^2} + \frac{45}{16b^2} = 1$$

$$\frac{861}{16b^2} = \frac{861}{16b^2}$$

$$b^2 = \frac{1}{4} = 3$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2}$$

$$\frac{1}{4a^2} + \frac{9}{16b^2} = 1$$

$$\frac{1}{4a^2} + \frac{45}{16b^2} = 1$$

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分)【选修 4-4: 坐标系与参数方程】

已知平面直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ , 其中  $t$  为参数,  $\alpha \in [0, \pi)$ , 曲线  $C_2$  的

参数方程为  $\begin{cases} x = 1 + 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}$ , 其中  $\theta$  为参数. 以坐标原点  $O$  为极点,  $x$  轴非负半轴为极轴, 建立极坐标系.

(1) 求曲线  $C_1, C_2$  的极坐标方程;

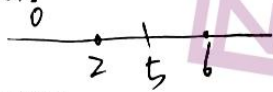
(2) 若  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ , 曲线  $C_1, C_2$  交于  $M, N$  两点, 求  $|OM| \cdot |ON|$  的值.

23. (本小题满分 10 分)【选修 4-5: 不等式选讲】

已知函数  $f(x) = |x-2| + |x-6|$ .

(1) 求不等式  $f(x) > 12$  的解集;

(2) 若  $f(x) \geq 2m^2$  恒成立, 求实数  $m$  的取值范围.



$$|(x-2) \pm (x-6)| \leq |x-2| + |x-6|$$

$$|x-2| - |x-6| \leq |(x-2) \pm (x-6)| \leq |x-2| + |x-6|$$

【数学(文)(第 4 页)】

智慧上进 · 2021—2022 学年新高三人学摸底考试  
数学(文)参考答案

1. 【答案】C

【解析】依题意,  $M \cap N = \{x | 2 < x < 7\} \cap \{x | 1 < x < 3\} = \{x | 2 < x < 3\}$ , 故选 C.

2. 【答案】B

【解析】依题意,  $a = \ln 0.9 < 0, b = 2^{\pi} > 1, 0 < c = 3^{-\pi} < 1$ , 故  $a < c < b$ , 故选 B.

3. 【答案】A

【解析】易知  $p$  假  $q$  真, 故  $\neg p \wedge q$  为真, 故选 A.

4. 【答案】D

【解析】由题意知  $\tan \angle ACD = \frac{AD}{CD} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , 则  $\tan \angle AOD = \tan 2 \angle ACD = \frac{\sqrt{5}-1}{1 - (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2} = 2$ , 故选 D.

5. 【答案】C

【解析】依题意,  $a_1 q^5 + a_1 q^5 = 0$ , 则  $a_1 = -1$ , 故  $S_5 = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{-242}{2} = -121$ , 故选 C.

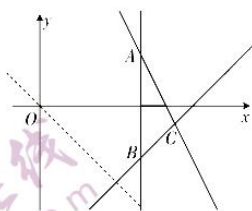
6. 【答案】C

【解析】由表格数据知  $\bar{x} = \frac{4+5+6+7+8}{5} = 6, \bar{y} = \frac{6+8+9+10+12}{5} = 9$ , 由回归直线方程的性质, 得  $1.4 \times 6 + \hat{a} = 9$ , 所以  $\hat{a} = 0.6$ , 故  $\hat{y} = 1.4x + 0.6$ , 所以当  $x = 11$  时,  $y = 1.4 \times 11 + 0.6 = 16$  (万次), 故选 C.

7. 【答案】B

【解析】作出不等式组所表示的平面区域如下图阴影部分所示, 观察可知, 当直线  $z = x + y$  过点 B

时, 有最小值, 联立  $\begin{cases} x - y = 3, \\ x = 2, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x = 2, \\ y = -1, \end{cases}$  故  $z = x + y$  的最小值为 1, 故选 B.



8. 【答案】D

【解析】由三视图可知, 该几何体是由一个四棱锥挖去一个圆柱所得的几何体, 故所求体积  $V =$

$\frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times 5 - \pi \times 1^2 \times 1 = \frac{80}{3} - \pi$ , 故选 D.

数学(文)[第 1 页]

9. 【答案】A

【解析】当  $m \leq 0$  时,  $3^m - 1 = \frac{1}{2}$ , 解得  $m = \log_3 \frac{3}{2}$  (舍去); 若  $m > 0$ ,  $-\log_{\frac{1}{3}}(m+1) = \log_3(m+1) = \frac{1}{2}$ , 解得  $m = 1$ , 故选 A.

10. 【答案】A

【解析】依题意,  $g(x) = \sin(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{3})$ , 故  $|m - n| = \frac{kT}{2}, k \in \mathbf{N}^+$ , 而  $T = \frac{4\pi}{3}$ , 观察可知  $k = 3$  时,  $|m - n| = 2\pi$ , 故选 A.

11. 【答案】D

【解析】由题意知, 当曲线  $f(x)$  在点  $P$  处的切线与  $g(x) = x - 2$  平行时, 两平行线之间的距离即为  $|PQ|$  的最小值. 设  $P(x_0, y_0)$ , 则  $e^{x_0} = 1, x_0 = 0$ , 故  $P(0, 2)$ , 由点到直线的距离公式可得  $|PQ|$  的最小值为  $2\sqrt{2}$ , 故选 D.

12. 【答案】B

【解析】因为  $|OQ| = c$ , 故  $x_0^2 + y_0^2 = c^2$ , 结合图形, 解得  $x_0 = -a, y_0 = b$ , 故  $QF$  的中点坐标为  $(\frac{c-a}{2}, \frac{b}{2})$ , 从而  $P(c-a, b)$ , 代入  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  中, 故  $c = (\sqrt{2} + 1)a$ , 即  $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2} + 1$ , 故选 B.

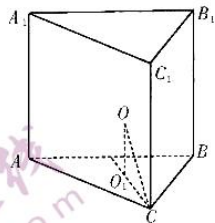
13. 【答案】 $\frac{4}{9}$

【解析】依题意,  $a + 2b = (4, -9)$ , 因为  $(a + 2b) \cdot c = 0$ , 故  $4 - 9\lambda = 0$ , 解得  $\lambda = \frac{4}{9}$ .

14. 【答案】2

【解析】如图, 设  $\triangle ABC$  的外心为  $O_1$ , 该球的球心为  $O$ , 半径为  $R$ , 则  $4\pi R^2 = \frac{28\pi}{3}$ , 解得  $R^2 = \frac{7}{3}$ , 又

$$O_1C = \frac{\sqrt{3}a}{3}, OO_1 = \frac{a}{2}, R^2 = OC^2 = OO_1^2 + O_1C^2 = \frac{7a^2}{12}, \text{解得 } a = 2.$$



15. 【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】不妨设点  $A$  在第一象限, 则  $\triangle OAB$  为等边三角形, 故  $A(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}r}{2})$ ; 代入  $x^2 + (y-8)^2 = r^2$

数学(文)[第2页]



中,解得  $r = \frac{8}{\sqrt{3}}$ , 则  $A(\frac{4}{\sqrt{3}}, 4)$ , 代入抛物线方程, 解得  $p = \frac{2}{3}$ .

16. 【答案】-1011

【解析】依题意,  $\begin{cases} a_6 = a_1 + 5d = 18, \\ S_{10} = 10a_1 + 45d = 165, \end{cases}$  故  $a_1 = 3, d = 3$ , 故  $a_n = 3n$ , 当  $n$  为奇数时,  $b_n =$

$\cos(3n\pi) = -1$ ; 当  $n$  为偶数时,  $b_n = \sin(3n\pi) = 0$ , 故  $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{2021} = -1011$ .

17. 解: (1)  $K^2 = \frac{200 \times (80 \times 5 - 95 \times 20)^2}{175 \times 25 \times 100 \times 100} \approx 10.286 > 6.635$ ,

故有 99% 以上的把握认为对“神舟十二号”载人航天飞船任务知晓情况与性别有关。(6分)

(2) 设这 5 名学生为  $A, B, C, D, E$ , 其中 2 名女同学为  $A, B$ ,

则任取 3 人的基本事件为

$ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE$ , 共 10 种.

其中 3 人中至多有 1 名女同学的事件有

$ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE$ , 共 7 种.

所以至多抽得 1 名女同学的概率为  $\frac{7}{10}$ . (12分)

18. 解: (1) 依题意,  $6\sin A = \sqrt{3}a\cos C$ , 故  $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}a\cos C$ , (2分)

由正弦定理,  $\sin C \sin A = \sqrt{3} \sin A \cos C$ , (3分)

因为  $\sin A \neq 0$ , 故  $\sin C = \sqrt{3} \cos C$ , 即  $\tan C = \sqrt{3}$ ,

因为  $C \in (0, \pi)$ , 故  $C = \frac{\pi}{3}$ . (5分)

(2) 由余弦定理得  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ ,

$\therefore 36 = a^2 + b^2 - ab$ ,

$\therefore 36 \geq ab$  (当且仅当  $a = b = 6$  时取等号), (8分)

又  $\therefore \frac{1}{2}CH \cdot c = \frac{1}{2}ab\sin C$ , (10分)

$\therefore CH = \frac{\sqrt{3}}{12}ab$ ,

$\therefore CH \leq \frac{\sqrt{3}}{12} \times 36 = 3\sqrt{3}$ ,

即  $CH$  的最大值是  $3\sqrt{3}$ . (12分)

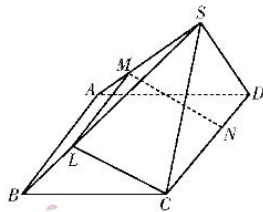
19. (1) 证明: 如图, 取线段  $BS$  上靠近  $B$  的三等分点  $L$ , 连接  $ML, CL$ ,

$\therefore \frac{SM}{SA} = \frac{SL}{SB} = \frac{2}{3}$ ,  $\therefore ML \parallel AB$  且  $ML = \frac{2}{3}AB$ , (2分)

$\therefore AB \parallel CD, CN = \frac{2}{3}CD$ ,  $\therefore ML \parallel CN$  且  $ML = CN$ ,

数学(文)[第3页]

∴ 四边形  $MLCN$  为平行四边形, 得  $MN \parallel LC$ , (4 分)  
∵  $LC \subset$  平面  $SBC$ ,  $MN \not\subset$  平面  $SBC$ , ∴  $MN \parallel$  平面  $SBC$ . (6 分)



(2) 解: 在  $\triangle ASD$  中,  $AS^2 + SD^2 = 18 = AD^2$ , 可得  $AS \perp SD$ , (7 分)

作  $SH \perp AD$  于  $H$ , ∴  $SH = \frac{SA \cdot SD}{AD} = 2$ , ∴ 平面  $ABCD \perp$  平面  $ASD$ , ∴  $SH \perp$  平面  $ABCD$ ,

∵  $CD \perp AD$ , ∴  $CD \perp$  平面  $SAD$ , (9 分)

∵  $SD \subset$  平面  $SAD$ , ∴  $CD \perp SD$ ,

∴  $S_{\triangle SCD} = \frac{1}{2} CD \cdot SD = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{6} = 3\sqrt{3}$ , (10 分)

设点  $B$  到平面  $SCD$  的距离为  $d$ , (11 分)

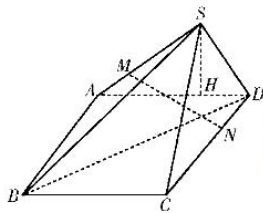
由  $V_{\text{三棱锥}S-BCD} = V_{\text{三棱锥}B-SCD}$  得

$$\frac{1}{3} S_{\triangle BCD} \cdot SH = \frac{1}{3} S_{\triangle SCD} \cdot d,$$

$$\text{即 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times 2 = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} d,$$

解得  $d = 2\sqrt{3}$ ,

即点  $B$  到平面  $SCD$  的距离为  $2\sqrt{3}$ . (12 分)



20. (1) 解: 依题意,  $f'(x) = 2 \ln x + 2 - 2x = 2(\ln x + 1 - x)$ ,

$$\text{令 } g(x) = \ln x + 1 - x, \text{ 则 } g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x},$$

令  $g'(x) = 0$ , 解得  $x = 1$ ,

故当  $x \in (0, 1)$  时,  $g'(x) > 0$ , 函数  $g(x)$  单调递增;

当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $g'(x) < 0$ , 函数  $g(x)$  单调递减,

故  $g(x) \leq g(1) = 0$ , 则  $f'(x) \leq 0$ , 故函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减. (5 分)

数学(文)[第 4 页]



(2) 证明: 要证  $f(x) + 2e^m < 2(1-m)x + e^{2m}$ ,

即证  $2x \ln x + 2(m-1)x - x^2 < e^{2m} - 2e^m$ ,

令  $F(x) = 2x \ln x + 2(m-1)x - x^2$ , 则  $F'(x) = 2(\ln x + m - x) = 2[\ln x + 1 - x + (m-1)]$ ,

由(1)知, 当  $0 < m \leq 1$  时,  $F'(x) \leq 0$ , 故  $F(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减,

所以  $F(x) < F(1) = 2m - 3$ ,

又  $0 < m \leq 1$ , 所以  $2m - 3 \leq -1$ . (10分)

设  $y = e^{2m} - 2e^m$ ,  $e^m = t$ , 则  $y = t^2 - 2t$ ,  $t \in (1, e]$ .

又  $y = t^2 - 2t$  在区间  $(1, e]$  上单调递增, 所以  $y > 1 - 2 = -1$ ,

故  $F(x) < F(1) = 2m - 3 \leq -1 < e^{2m} - 2e^m$ ,

所以当  $0 < m \leq 1, x > 1$  时,  $f(x) + 2e^m < 2(1-m)x + e^{2m}$ . (12分)

21. 解: (1) 依题意, 
$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1, \\ \frac{1}{4a^2} + \frac{45}{16b^2} = 1, \end{cases} \quad (2 \text{分})$$

解得  $a^2 = 4, b^2 = 3$ , 故  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ . (4分)

(2) 是定值. (5分)

理由如下:

依题意,  $M(-2, 0), N(0, \sqrt{3})$ , 设  $A(x_0, y_0)$ , 则  $3x_0^2 + 4y_0^2 = 12$ ,

所以直线  $AM: \frac{y-0}{y_0-0} = \frac{x+2}{x_0+2}$ ,

令  $x=0, y_P = \frac{2y_0}{x_0+2}$ , 则  $|NP| = \sqrt{3} - y_P = \sqrt{3} - \frac{2y_0}{x_0+2} = \frac{\sqrt{3}x_0 + 2\sqrt{3} - 2y_0}{x_0+2}$ ; (6分)

直线  $AN: \frac{y-\sqrt{3}}{y_0-\sqrt{3}} = \frac{x-0}{x_0-0}$ , 令  $y=0, x_Q = \frac{-\sqrt{3}x_0}{y_0-\sqrt{3}}$ ,

则  $|MQ| = 2 + x_Q = 2 + \frac{-\sqrt{3}x_0}{y_0-\sqrt{3}} = \frac{2y_0 - 2\sqrt{3} - \sqrt{3}x_0}{y_0-\sqrt{3}}$ ; (8分)

又易知  $NP \perp MQ$ ,

所以四边形  $MNQP$  的面积为  $S = \frac{1}{2} |NP| \cdot |MQ|$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}x_0 + 2\sqrt{3} - 2y_0}{x_0 + 2} \cdot \frac{2y_0 - 2\sqrt{3} - \sqrt{3}x_0}{y_0 - \sqrt{3}} = \frac{-3x_0^2 - 4y_0^2 - 12 + 4\sqrt{3}x_0y_0 - 12x_0 + 8\sqrt{3}y_0}{2(x_0y_0 - \sqrt{3}x_0 + 2y_0 - 2\sqrt{3})}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}(x_0y_0 - \sqrt{3}x_0 + 2y_0 - 2\sqrt{3})}{2(x_0y_0 - \sqrt{3}x_0 + 2y_0 - 2\sqrt{3})} = 2\sqrt{3},$$

所以四边形  $MNQP$  的面积为  $2\sqrt{3}$ . (12分)

数学(文)[第5页]

22. 解:(1)依题意,曲线  $C_1$  的普通方程为  $\cos \alpha \cdot y - \sin \alpha \cdot x = 0$ , (1分)

即曲线  $C_1$  的极坐标方程为  $\theta = \alpha (\rho \in \mathbf{R})$ ; (2分)

曲线  $C_2$  的普通方程为  $(x-1)^2 + y^2 = 4$ , 即  $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ ,

故曲线  $C_2$  的极坐标方程为  $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 3 = 0$ . (5分)

(2)将  $\theta = \frac{\pi}{3}$  代入曲线  $C_2$  的极坐标方程  $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 3 = 0$  中,

可得  $\rho^2 - \rho - 3 = 0$ , (7分)

设上述方程的两根分别是  $\rho_1, \rho_2$ , 则  $\rho_1 \rho_2 = -3$ ,

故  $|OM| \cdot |ON| = |\rho_1| \cdot |\rho_2| = 3$ . (10分)

23. 解:(1)依题意,  $|x-2| + |x-6| > 12$ ,

若  $x < 2$ , 则  $2-x+6-x > 12$ , 解得  $x < -2$ , 故  $x < -2$ ; (2分)

若  $2 \leq x \leq 6$ , 则  $x-2+6-x = 4 < 12$ , 故无解; (3分)

若  $x > 6$ , 则  $x-2+x-6 > 12$ , 解得  $x > 10$ , 故  $x > 10$ ; (4分)

综上所述, 不等式  $f(x) > 12$  的解集为  $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 10\}$ . (5分)

(2)依题意,  $|x-2| + |x-6| \geq |x-2-x+6| = 4$ , (7分)

当且仅当  $2 \leq x \leq 6$  时等号成立, (8分)

故  $4 \geq 2m^2$ , 即  $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$ , 故实数  $m$  的取值范围为  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ . (10分)

## 关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于中国拔尖人才培养的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户（官方网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承“专业、专注、有态度”的创办公念，不断探索“K12 教育+互联网+ 大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的新高考拔尖人才培养服务平台。



微信搜一搜



自主选拔在线