高三理科数学试卷

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：高考范围（不含立体几何）。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 U，集合 A，B 为其子集，若 $B\cap(\complement_U A)=\varnothing$，则 $A\cup B=$

A. $\complement_U A$　　B. $\complement_U B$　　C. A　　D. B

2. 已知复数 z 满足 $2(z+\bar{z})-3(z-\bar{z})=4+6i$，则 $\left|\frac{z}{i}-1\right|=$

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{5}$

3. 已知 a，b，c 为实数，p：$ac^2>bc^2$，q：$a>b$，则 p 是 q 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知函数 $f(x)=A\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(A>0,\omega>0)$ 的图象向右平移 $\frac{3\pi}{4}$ 个单位长度后与原图象重合，则实数 ω 的最小值是

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{8}{3}$　　C. $\frac{16}{3}$　　D. 8

5. 在 2022 年北京冬季奥运会志愿者活动中，甲、乙等 6 人报名参加了 A，B，C 三个项目的志愿者工作，因工作需要，每个项目仅需 1 名志愿者，且甲不能参加 A，B 项目，乙不能参加 B，C 项目，那么不同的志愿者分配方案共有

A. 52 种　　B. 68 种　　C. 72 种　　D. 108 种

6. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(4-x)+f(x)=0$，且当 $x\in(-2,0)$ 时，$f(x)=\log_3(2x+5)$，则 $f(2\,021)+f(2\,022)=$

A. 1　　B. -1　　C. -2　　D. 2

7. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geq 1,\\ x-y\geq -1,\\ 2x-y\leq 2,\end{cases}$ 则目标函数 $z=|x-2y+1|$ 的取值范围是

A. $[2,4]$　　B. $[0,2]$

C. $[0,4]$　　D. $[1,4]$

8. 已知 $\tan\theta=2$，则 $\dfrac{\sin^3\theta+\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin\theta\cos^2\theta}=$

A. $\dfrac{5}{2}$　　B. $\dfrac{16}{3}$

C. 6　　D. 8

9. 若点 $P(-2,-1)$ 为圆 $x^2+y^2=9$ 的弦 AB 的一个三等分点，则弦 AB 的长度为

A. $3\sqrt{2}$　　B. 4　　C. $2\sqrt{6}$　　D. $2\sqrt{5}$

10. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$2a_{n+1}a_{n-1}=a_{n-1}a_n+a_na_{n+1}(n\geq 2)$，$a_1=1$，$a_2=\dfrac{1}{3}$，则 $a_{20}=$

A. $\dfrac{1}{37}$　　B. $\dfrac{1}{39}$　　C. $\dfrac{1}{41}$　　D. $\dfrac{1}{13}$

11. 设 $a=\log_5 3$，$b=\log_4\pi+\log_2 3$，$c=\left(\dfrac{1}{\pi}\right)$，则

A. $b<a<c$　　B. $b<c<a$

C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

12. 已知 $f(x)=\dfrac{ax}{x+1}+\ln(x+1)$，则下列说法正确的是

A. 当 $a>0$ 时，$f(x)$ 有极大值点和极小值点

B. 当 $a<0$ 时，$f(x)$ 无极大值点和极小值点

C. 当 $a>0$ 时，$f(x)$ 有最大值

D. 当 $a<0$ 时，$f(x)$ 的最小值小于或等于 0

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 x,y 之间具有线性相关关系，若通过 10 组数据 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,10)$ 得到的回归方程为 $\hat{y}=-2.2x+5$，且 $\sum\limits_{i=1}^{10}x_i=20$，则 $\sum\limits_{i=1}^{10}y_i=$________.

14. 若双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线 l 与直线 $g:ax+2by+a=0$ 平行，则直线 l,g 间的距离为________.

15. 已知 $\boldsymbol{a}=(-2,3)$，$\boldsymbol{b}=(2,m)$，当 $|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|$ 取得最小值时，实数 $m=$________，此时 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的正切值为________.

16. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率是 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，若 C 上一动点 P 到 $M(0,-1)$ 的最大距离为 $\sqrt{15}$，则椭圆 C 的方程是________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，$AC=2\sqrt{2}$，$\tan C=\frac{\sqrt{7}}{7}$，$D$ 为 BC 边上一点，且 $CD=\sqrt{7}-2$.

（1）求 AD；

（2）若 $AB=\sqrt{2}$，求角 B 的大小.

18.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，对任意正整数 n 均有$\frac{S_1}{2^1}+\frac{S_2}{2^2}+\frac{S_3}{2^3}+\cdots+\frac{S_n}{2^n}=n-1+\frac{1}{2^n}$成立.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

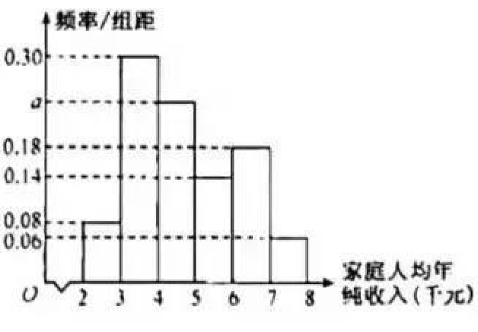
（2）记 $b_n=\frac{2^n}{S_nS_{n+1}}$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，求满足 $T_n\leqslant\frac{2021}{2022}$的最大正整数 n 的值.

19.（本小题满分 12 分）

2020 年是具有里程碑意义的一年，我们将全面建成小康社会，实现第一个百年奋斗目标。2020 年也是脱贫攻坚决战决胜之年（总书记 2020 年新年贺词）。截至 2019 年底，中国农村贫困人口从 2012 年的9 899 万人减少至 1 109 万人，贫困发生率由 2012 年的 10.2%下降至 2019 年的 0.6%，连续 8 年每年减贫规模都在 500 万人以上；确保到 2020 年农村贫困人口实现脱贫，是我们党立下的军令状，脱贫攻坚越到最后时刻，越要响鼓重锤。某贫困地区截至 2019 年底，按照农村家庭人均年纯收入8 000元的小康标准，该地区仅剩部分家庭尚未实现小康。现从这些尚未实现小康的家庭中随机抽取 50 户，得到这 50 户家庭 2019 年的家庭人均年纯收入的频率分布直方图.

（1）求出频率分布直方图中的 a 的值，并求出这 50 户家庭人均年纯收入的平均数；（同一组数据用该区间的中点值作代表）

（2）现从这 50 户 2019 年的家庭人均年纯收入在[2，4)之间的家庭中任抽取 3 户进行调查，进一步了解家庭生活情况，设抽取的家庭人均年纯收入在[2，3)的户数为 X，求 X 的分布列和数学期望.



20.（本小题满分 12 分）

已知抛物线 $C: y^2=4x$ 上有一动点 $P(x_0, y_0)(y_0>0)$，过点 P 作抛物线 C 的切线 l 交 x 轴于点 M.

(1)判断线段 MP 的中垂线是否过定点？若过，求出定点坐标；若不过，请说明理由；

(2)过点 P 作 l 的垂线交抛物线 C 于另一点 N，求△PMN 的面积的最小值.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的图象在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程；

(2)判断函数 $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{2\pi}$ 在区间 $(0,2\pi]$ 内的零点的个数，并证明.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分 10 分）选修 4－4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=t,\\ y=1+t\end{cases}$（$t$ 为参数）．以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\sin\theta+3=0$.

(1)求直线 l 的普通方程和圆 C 的直角坐标方程；

(2)设直线 l 与圆 C 交于 A，B 两点，P 为圆 C 上不同于 A、B 的动点，若满足△PAB 面积为 S 的点 P 恰有两个，求 S 的取值范围.

23.（本小题满分 10 分）选修 4－5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=(x+1)(|x|+|x+2|)$.

(1)求不等式 $f(x)>4$ 的解集；

(2)当 $x\geq -1$ 时，$f(x)\geq mx$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

高三理科数学试卷
参考答案、提示及评分细则

1. C　由 $B\cap(\complement_U A)=\varnothing$ 得 $B\subseteq A$,所以 $A\cup B=A$. 故选 C.

2. D　设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,则 $z+\bar{z}=2a$,$z-\bar{z}=2bi$,所以 $2(z+\bar{z})-3(z-\bar{z})=4a-6bi=4+6i$,解得 $a=1$,$b=-1$,所以 $z=1-i$,所以 $\left|\frac{z}{i}-1\right|=\left|\frac{1-i}{i}-1\right|=|-2-i|=\sqrt{5}$. 故选 D.

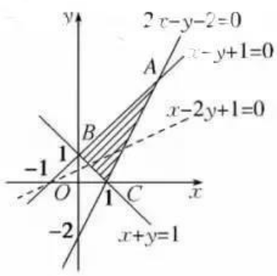
3. A　若 $ac^2>bc^2$,则 $a>b$ 为真命题,反之则不然,则 p 是 q 的充分不必要条件. 故选 A.

4. B　由题可知,$\frac{3\pi}{4}$ 是该函数的周期的整数倍,即:$\frac{3\pi}{4}=\frac{2\pi}{\omega}\times k$,$k\in\mathbf{Z}$,解得 $\omega=\frac{8k}{3}$,$k\in\mathbf{Z}$,又 $\omega>0$,故其最小值为 $\frac{8}{3}$. 故选 B.

5. A　若甲、乙都参加,则甲只能参加 C 项目,乙只能参加 A 项目,B 项目有 4 种方法;若甲参加,乙不参加,则甲只能参加 C 项目,A,B 项目有 $A_4^2=12$ 种方法;若乙参加,甲不参加,则乙只能参加 A 项目,B,C 项目有 $A_4^2=12$ 种方法;若甲不参加,乙不参加,有 $A_4^3=24$ 种方法,根据分类计数原理,共有 $4+12+12+24=52$ 种. 故选 A.

6. B　因为函数 $f(x)$ 为奇函数,所以 $f(-x)=-f(x)$,所以 $f(4-x)=-f(x-4)$,所以 $f(x)=-f(4-x)=f(x-4)$,所以 $f(x+4)=f(x+4-4)=f(x)$,即 $f(x+4)=f(x)$,所以 $f(x)$ 的周期为 4. 所以 $f(2\ 021)=f(4\times505+1)=f(1)=-f(-1)$,又 $x\in(-2,0)$ 时,$f(x)=\log_3(2x+5)$,所以 $f(-1)=\log_3(-2+5)=1$,所以 $f(2\ 021)=-1$,而 $f(2\ 022)=f(2)=0$,所以 $f(2\ 021)+f(2\ 022)=-1$. 故选 B.

7. C　作出约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant1,\\x-y\geqslant-1,\\2x-y\leqslant2\end{cases}$ 表示的可行域如图所示,$z=|x-2y+1|=\sqrt{5}\cdot\frac{|x-2y+1|}{\sqrt{5}}$,其几何意义为可行域内的点到直线 $x-2y+1=0$ 的距离的 $\sqrt{5}$ 倍. 由 $\begin{cases}x-y=-1,\\2x-y=2\end{cases}$ 解得 $A(3,4)$. 由图可知,z 的最大值为点 $A(3,4)$ 到直线 $x-2y+1=0$ 的距离的 $\sqrt{5}$ 倍,即为 4;因为直线 $x-2y+1=0$ 与可行域有公共点,所以 z 的最小值为 0. 故选 C.



8. C　$\frac{\sin^3\theta+\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin\theta\cos^2\theta}=\frac{\sin^3\theta+\sin\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{\cos^3\theta+\sin\theta\cos^2\theta}=\frac{2\sin^3\theta+\sin\theta\cos^2\theta}{\cos^3\theta+\sin\theta\cos^2\theta}=\frac{2\tan^3\theta+\tan\theta}{1+\tan\theta}=\frac{18}{3}=6$. 故选 C.

9. A　不妨设 P 为靠近 A 的一个三等分点,设 AB 的中点为 Q,原点为 O,$|PQ|=m$,则 $|AP|=2m$,由 $|OA|^2=(3m)^2+|OQ|^2$,$|OP|^2=m^2+|OQ|^2$ 得 $8m^2=|OA|^2-|OP|^2=4$,所以 $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故 $|AB|=6m=3\sqrt{2}$. 故选 A.

10. B　由 $2a_{n-1}a_{n+1}=a_{n-1}a_n+a_na_{n+1}(n\geqslant2)$,得 $\frac{2}{a_n}=\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant2)$,可得 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}$. 设 $\frac{1}{a_n}=b_n$,

$b_{n+1}-b_n=b_n-b_{n-1}=d$，可得数列$\{b_n\}$为等差数列，其公差为 d. 由 $a_1=1$，$a_2=\frac{1}{3}$，可得 $b_1=1$，$b_2=3$，所以 $b_n=1+2(n-1)=2n-1$，故 $a_n=\frac{1}{2n-1}$，所以 $a_{20}=\frac{1}{39}$. 故选 B.

11. A　因为 $a=\log_{\pi}3\in(0,1)$，$b=\log_{\frac{1}{2}}\pi+\log_2 3=\log_2\frac{1}{\pi}+\log_2 3=\log_2\frac{3}{\pi}<0$，$c=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}=\pi^{\frac{1}{2}}>1$，所以 $b<a<c$. 故选 A.

12. D　因为 $f(x)=\frac{ax}{x+1}+\ln(x+1)(x>-1)$，所以 $f'(x)=\frac{a(x+1)-ax}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}=\frac{x+1+a}{(x+1)^2}$. ①当 $a\geqslant 0$ 时，因为 $x>-1$，所以 $f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，无极值点；②当 $a<0$ 时，由 $\begin{cases}f'(x)<0,\\x>-1,\end{cases}$ 得 $-1<x<-1-a$；由 $\begin{cases}f'(x)>0,\\x>-1,\end{cases}$ 得 $x>-1-a$；故函数 $f(x)$ 在 $(-1,-1-a)$ 上单调递减，在 $(-1-a,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)$ 有极小值点 $x=-1-a$，无极大值点，且 $f(x)_{极小值}=\frac{a(-1-a)}{-1-a+1}+\ln(-1-a+1)=1+a+\ln(-a)$，即 $f(x)$ 的最小值为 $1+a+\ln(-a)$. 令 $g(a)=1+a+\ln(-a)(a<0)$，所以 $g'(a)=1+\frac{1}{a}$，令 $g'(x)=1+\frac{1}{a}>0$ 得 $a<-1$；令 $g'(a)=1+\frac{1}{a}<0$ 得 $-1<a<0$，所以 $g(a)$ 的极大值（也是最大值）为 $g(-1)=0$. 故选 D.

13. 6　依题意知，$\bar{x}=\frac{20}{10}=2$，因为回归方程为 $\hat{y}=-2.2x+5$，所以可以计算出 $\bar{y}=-2.2\bar{x}+5=0.6$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{10}y_i=10\times0.6=6$.

14. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　由题意，得 l 的方程为 $bx+ay=0$，因为 $l//g$，所以 $-\frac{b}{a}=-\frac{a}{2b}$，即 $a=\sqrt{2}b$，所以直线 l 的方程为 $x+\sqrt{2}y=0$，直线 g 的方程为 $x+\sqrt{2}y+1=0$，所以 l，g 之间的距离为 $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

15. 3（2 分）　$\frac{12}{5}$（3 分）　设 $A(-2,3)$，$B(2,m)$，则 $|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{AB}|$，当 AB 与直线 $x=2$ 垂直时，$|\overrightarrow{AB}|$ 有最小值，此时 $m=3$，$\tan\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\tan 2\angle AOy=\dfrac{2\times\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{12}{5}$.

16. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$　由 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得 $\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{3}$，即 $a^2=\frac{3}{2}b^2$，得椭圆 C 的方程为 $\frac{2x^2}{3b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 设 $P(x,y)$ 是椭圆上任一点，依题意，$|PM|$ 的最大值为 $\sqrt{15}$，则 $|PM|^2=x^2+(y+1)^2=\left(\frac{3b^2-3y^2}{2}\right)+(y+1)^2=-\frac{1}{2}(y-2)^2+\frac{3}{2}b^2+3(-b\leqslant y\leqslant b)$. 若 $b\geqslant 2$，则 $y=2$ 时，$|PM|_{\max}=\sqrt{\frac{3}{2}b^2+3}=\sqrt{15}$，$\therefore b=2\sqrt{2}$，此时椭圆方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$；若 $0<b<2$，则 $y=b$ 时，$|PM|_{\max}=b+1=\sqrt{15}$，$\therefore b=\sqrt{15}-1>2$，与 $0<b<2$ 矛盾. 综上可得椭圆方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$.

17. 解：(1)在△ACD中，由 $\tan C=\frac{\sqrt{7}}{7}$ 得 $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$\cos C=\frac{\sqrt{14}}{4}$，…… 2 分

由余弦定理得 $AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos C$ …… 4 分

$=(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{7}-2)^2-2\times2\sqrt{2}\times(\sqrt{7}-2)\times\frac{\sqrt{14}}{4}=5$，

所以 $AD=\sqrt{5}$. …… 6 分

(2)在△ABC中，$AB=\sqrt{2}$，$AC=2\sqrt{2}$，$\sin C=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}$，即 $\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin B}$， …… 8 分

所以 $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$， …… 10 分

解得 $B=\frac{\pi}{4}$ 或 $B=\frac{3\pi}{4}$. …… 11 分

当 $B=\frac{\pi}{4}$ 时，求得 $BC=\sqrt{7}+1$，当 $B=\frac{3\pi}{4}$ 时，求得 $BC=\sqrt{7}-1$，均满足 $BC>CD$，符合题意，所以 $B=\frac{\pi}{4}$ 或

$B=\frac{3\pi}{4}$. …… 12 分

18. 解：(1)当 $n=1$ 时，$\frac{S_1}{2}=\frac{1}{2}$，得 $S_1=1$. …… 1 分

当 $n\geqslant2$ 时，由 $\frac{S_1}{2^1}+\frac{S_2}{2^2}+\frac{S_3}{2^3}+\cdots+\frac{S_n}{2^n}=n-1+\frac{1}{2^n}$ ①对任意正整数 n 均成立，得 $\frac{S_1}{2^1}+\frac{S_2}{2^2}+\frac{S_3}{2^3}+\cdots+\frac{S_{n-1}}{2^{n-1}}$

$=(n-1)-1+\frac{1}{2^{n-1}}$， ②

①−②，得 $\frac{S_n}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$，所以 $S_n=2^n-1$，$S_1=1$ 也满足该式，

所以 $S_n=2^n-1$. …… 4 分

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1$；当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-1-2^{n-1}+1=2^{n-1}$，$a_1=1$ 也满足上式，

所以 $a_n=2^{n-1}$. …… 6 分

(2)由①知 $S_n=2^n-1$，所以 $b_n=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$， …… 8 分

所以 $T_n=\left(\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^2-1}\right)+\left(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}$， …… 10 分

由 $1-\frac{1}{2^{n+1}-1}\leqslant\frac{2021}{2022}$，得 $\frac{1}{2^{n+1}-1}\geqslant\frac{1}{2022}$，所以 $2^{n-1}-1\leqslant2022$，即 $2^{n+1}\leqslant2023$，

所以 $n+1\leqslant10$，即 $n\leqslant9$，故满足 $T_n\leqslant\frac{2021}{2022}$ 的最大正整数 $n=9$. …… 12 分

19. 解：(1)由题意知 $a=1-0.08-0.30-0.14-0.18-0.06=0.24$， …… 2 分

平均数 $\bar{x}=2.5\times0.08+3.5\times0.30+4.5\times0.24+5.5\times0.14+6.5\times0.18+7.5\times0.06=4.72$(千元).

…… 4 分

(2)家庭人均年纯收入在[2,3)有 $50\times0.08=4$ 户,家庭人均年纯收入在[3,4)有 $50\times0.30=15$ 户,…… 6分

易知 X 的所有可能取值为 0,1,2,3, …… 7分

$P(X=0)=\frac{C_{15}^3}{C_{19}^3}=\frac{455}{969}$,$P(X=1)=\frac{C_4^1C_{15}^2}{C_{19}^3}=\frac{140}{323}$,$P(X=2)=\frac{C_4^2C_{15}^1}{C_{19}^3}=\frac{30}{323}$,$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_{19}^3}=\frac{4}{969}$,

所以 X 分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{455}{969}$	$\frac{140}{323}$	$\frac{30}{323}$	$\frac{4}{969}$

…… 10分

所以 $E(X)=0\times\frac{455}{969}+1\times\frac{140}{323}+2\times\frac{30}{323}+3\times\frac{4}{969}=\frac{12}{19}$. …… 12分

20. 解:(1)显然直线 MP 的斜率存在,设直线 MP 的方程为 $y=kx+b(k\neq0)$.

由$\begin{cases}y^2=4x,\\y=kx+b,\end{cases}$ 得:$ky^2-4y+4b=0$,

由 $k\neq0$,$\Delta=0$,得 $kb=1$, …… 2分

则 $ky^2-4y+4b=0$ 的解为 $y=\frac{2}{k}$,由 $y_0=\frac{2}{k}>0$,得 $k>0$,$x_0=\frac{y_0-b}{k}=\frac{1}{k^2}$,得 $P\left(\frac{1}{k^2},\frac{2}{k}\right)$. …… 3分

在 $y=kx+b$ 中,令 $y=0$ 得 $x=-\frac{b}{k}=-\frac{1}{k^2}$,所以 $M\left(-\frac{1}{k^2},0\right)$, …… 4分

所以 MP 的中点为 $\left(0,\frac{1}{k}\right)$,所以线段 MP 的中垂线方程为 $y=-\frac{1}{k}(x-1)$, …… 5分

所以线段 MP 的中垂线过定点(1,0). …… 6分

(2)直线 NP 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x+\frac{1}{k^3}+\frac{2}{k}$,

由$\begin{cases}y^2=4x,\\y=-\frac{1}{k}x+\frac{1}{k^3}+\frac{2}{k},\end{cases}$ 得 $\frac{1}{4k}y^2+y-\left(\frac{1}{k^3}+\frac{2}{k}\right)=0$,

所以 $y_N=-4k-y_P=-\left(4k+\frac{2}{k}\right)$, …… 7分

$|PM|=\sqrt{1+k^2}\,|x_P-x_M|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2}{k^2}$,

$|PN|=\sqrt{1+k^2}\,|y_N-y_P|=\sqrt{1+k^2}\left|-4k-\frac{4}{k}\right|$. …… 8分

所以 $\triangle PMN$ 的面积为 $S=\frac{4(1+k^2)^2}{k^3}(k>0)$, …… 10分

则 $S'=\frac{4(1+k^2)(k^2-3)}{k^4}$.

当 $0<k<\sqrt{3}$ 时,$S'<0$,S 单调递减,当 $k>\sqrt{3}$ 时,$S'>0$,S 单调递增,

所以 $k=\sqrt{3}$ 时,$S_{\min}=\frac{64\sqrt{3}}{9}$. …… 12分

21.(1)解：由题意知 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=0$，…… 1分

$f'(x)=\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$，所以 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}=-\frac{2}{\pi}$，…… 2分

所以函数 $f(x)$ 的图象在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程是 $y-0=-\frac{2}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$，即 $y=-\frac{2}{\pi}x+1$. …… 4分

(2)函数 $g(x)$ 在 $(0,2\pi]$ 上有3个零点. …… 5分

证明：$g(x)=\frac{\cos x}{x}-\frac{1}{2\pi}$，则 $g'(x)=\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}=\frac{-(x\sin x+\cos x)}{x^2}$.

又 $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}}-\frac{1}{2\pi}=\frac{3\sqrt{3}}{\pi}-\frac{1}{2\pi}>0$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2\pi}=-\frac{1}{2\pi}<0$，

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上至少有一个零点. …… 6分

又当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，故在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上只有一个零点；…… 7分

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 时，$\cos x<0$，故 $g(x)<0$.

所以函数 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 上无零点；…… 8分

当 $x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ 时，令 $h(x)=x\sin x+\cos x$，$h'(x)=x\cos x\geqslant 0$，当且仅当 $x=\frac{3\pi}{2}$ 时等号成立.

所以 $h(x)$ 在 $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ 上单调递增，…… 9分

$h(2\pi)>0$，$h\left(\frac{3\pi}{2}\right)<0$，所以 $\exists x_0\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，使得 $h(x_0)=0$，所以 $g(x)$ 在 $\left[\frac{3\pi}{2},x_0\right]$ 上单调递增，在 $(x_0,2\pi]$ 上单调递减. …… 10分

又 $g(2\pi)=0$，$g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{\cos\frac{3\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2}}-\frac{1}{2\pi}=-\frac{1}{2\pi}<0$，所以 $g(x_0)>g(2\pi)=0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ 上有2个零点. …… 11分

综上所述，函数 $g(x)$ 在 $(0,2\pi]$ 上有3个零点. …… 12分

22.解：(1)由 $\begin{cases}x=t,\\y=1+t\end{cases}$ (t 为参数)得 $y=1+x$，

故直线 l 的普通方程为 $x-y+1=0$；…… 2分

由 $\rho^2-4\rho\sin\theta+3=0$ 及公式 $\begin{cases}\rho\cos\theta=x,\\\rho\sin\theta=y,\end{cases}$ 得 $x^2+y^2-4y+3=0$，

即圆 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-4y+3=0$. ………… 4 分

(2)圆 C 化为标准方程是 $x^2+(y-2)^2=1$,圆心为 $C(0,2)$,半径 $r=1$. ………… 5 分

因为圆心 $C(0,2)$ 到直线 l:$x-y+1=0$ 的距离 $d=\frac{|0-2+1|}{\sqrt{1+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ………… 6 分

$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$, ………… 7 分

因为满足△PAB 面积为 S 的点 P 恰有两个,

所以 $\frac{1}{2}|AB|\cdot(r-d)<S<\frac{1}{2}|AB|\cdot(r+d)$, ………… 9 分

解得 S 的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2},\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$. ………… 10 分

23. 解:(1) $f(x)>4$ 即为 $(x+1)(|x|+|x+2|)>4$, ………… 1 分

①当 $x\leqslant-2$ 时,得 $(x+1)(-x-x-2)>4$,即 $x^2+2x+3<0$,此不等式无解; ………… 2 分

②当 $-2<x<0$ 时,得 $(x+1)(-x+x+2)>4$,解得 $x>1$,舍去; ………… 3 分

③当 $x\geqslant0$ 时,得 $(x+1)(x+x+2)>4$,解得 $x<-\sqrt{2}-1$(舍去)或 $x>\sqrt{2}-1$. ………… 4 分

故不等式 $f(x)>4$ 的解集为 $(\sqrt{2}-1,+\infty)$. ………… 5 分

(2)当 $x>0$ 时,则 $f(x)=(x+1)(x+x+2)=2(x+1)^2\geqslant mx$,

所以 $m\leqslant\frac{2(x+1)^2}{x}=2\left(x+\frac{1}{x}+2\right)$. ………… 6 分

由基本不等式可得 $2\left(x+\frac{1}{x}+2\right)\geqslant2\left(2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+2\right)=8$, ………… 7 分

当且仅当 $x=1$ 时,等号成立,所以 $m\leqslant8$.

当 $x=0$ 时,$m\in\mathbf{R}$. ………… 8 分

当 $-1\leqslant x<0$ 时,$f(x)=2(x+1)\geqslant mx$,即 $m\geqslant2+\frac{2}{x}$.

因为 $x=-1$ 时,$2+\frac{2}{x}$ 有最大值 0,所以 $m\geqslant0$. ………… 9 分

因此实数 m 的取值范围是 $[0,8]$. ………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。