一模答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	B	D	A	B	A	B	D	C	C	D	B

二、填空题

13. $\frac{7}{17}$　　14. $(1,e^2)$　　15. $a_n=\begin{cases}1, & n=1\\ -\dfrac{2}{(2n-1)(2n-3)}, & n\geq 2\end{cases}$　　16. ①⑥、②⑤、③⑦、④⑧均可

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.解析：

（Ⅰ）由正弦定理得 $2\sin B\cos C=2\sin A++\sin C$，..............................2 分

又由 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，..............................4 分

得 $2\cos B\sin C+\sin C=0$，

因为 $0<C<\pi$，所以 $\sin C\neq 0$，所以 $\cos B=-\frac{1}{2}$．因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{2\pi}{3}$．..............................6 分

（Ⅱ）因为 D 为 AC 的中点，所以 $\overline{BA}+\overline{BC}=2\overline{BD}$，..............................8 分

所以 $(\overline{BA}+\overline{BC})^2=(2\overline{BD})^2$，即 $a^2+c^2+ac=12$，..............................10 分

因为 $a=2$，解方程 $c^2-2c-8=0$，得 $c=4$．..............................12 分

18. 解析：

(I) 连结 AB_1 交 A_1B 于 O，连结 EO,OC_1

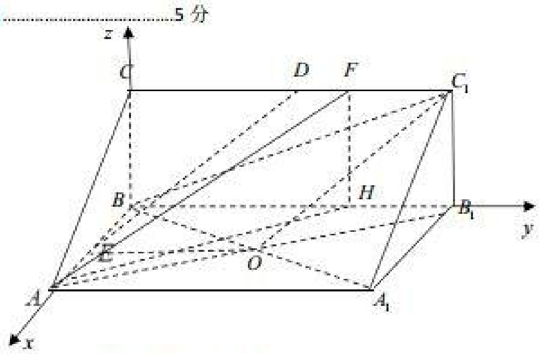
$\because OA=OB,AE=EB,\therefore OE=\frac{1}{2}BB_1,OE//BB_1$,..............................1 分

又 $DC_1=\frac{1}{2}BB_1$，$DC_1//BB_1$，

$\therefore OE\underline{\underline{//}}DC_1$，因此，四边形 $DEOC_1$ 为平行四边形，即 $ED//OC_1$..............................2 分

$\because OC_1\subset$ 面 $C_1AB,ED\not\subset$ 面 C_1AB, $\therefore DE//$ 平面 C_1BA_1..............................5 分

(II) 建立空间直角坐标系 $B-xyz$，如图



过 F 作 $FH\perp BB_1$，连结 AH

$\because BB_1\perp$ 面 $ABC,AB\subset$ 面 $ABC,\therefore AB\perp BB_1$

$\because AB\perp BC,BC\cap BB_1,\therefore AB\perp$ 面 CBB_1C_1

$\because AB\subset$ 面 $BAA_1B_1,\therefore$ 面 $BAA_1B_1\perp$ 面 CBB_1C_1,

$\because FH\subset$ 面 $CBB_1C_1,FH\perp BB_1$, 面 $BAA_1B_1\cap$ 面 $CBB_1C_1=BB_1$, $FH\perp$ 面 BAA_1B_1'

即 $\angle FAH$ 为直线 AF 与平面 ABB_1A_1 所成角，……………………………7 分

记为 θ，$\sin\theta=\frac{1}{AF}=\frac{1}{3}$，$\therefore AF=3$，

在 $Rt\Delta ACF$ 中，$5=AC^2=CF^2+AF^2=CF^2+9$，$\therefore CF=2$，

$F(0,2,1), A_1(2,3,0), \overrightarrow{BF}=(0,2,1), \overrightarrow{BA_1}=(2,3,0)$，

设平面 BAC_1 的法向量 $\vec{m}=(x,y,z)$，

$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BF}=2y+z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BA_1}=2x+3y=0\end{cases}$，取 $y=2$，$\vec{m}=(-3,2,-4)$

平面 BAA_1 的法向量 $\vec{n}=(0,0,1)$，……………………………10 分

$|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=\frac{4}{\sqrt{29}\cdot 1}$ ……………………………11 分

因此，二面角 $F-BA_1-A$ 的余弦值 $-\frac{4}{29}\sqrt{29}$ ……………………………12 分

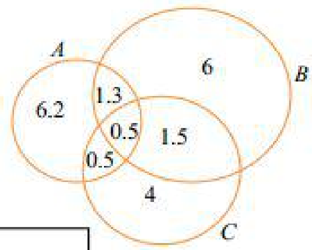
19. 解析：

设 $A=$｛出现 A 症状的人｝、$B=$｛出现 B 症状的人｝、$C=$｛出现 C 症状的人｝（$card$ 表示有限集合元素个数）

根据数据 1 可知 $card(A\cap B)=1.8, card(A\cap C)=1, card(B\cap C)=2, card(A\cap B\cap C)=0.5$，所以

$card(A\cup B\cup C)=card(A)+card(B)+card(C)-[card(A\cap B)+card(A\cap C)+card(B\cap C)]+card(A\cap B\cap C)$

$=8.5+9.3+6.5-(1.8+1+2)+0.5$
$=20$



……………………………4 分

得患病总人数为 20 万人，比例大约为 20%……………………………6 分

	失眠人数（万）	不失眠人数（万）	
患病人数（万）	5	7	12
不患病人数（万）	15	73	88
	20	80	100

……………………………9 分

$k^2=\frac{100\times(5\times73-15\times7)^2}{12\times88\times80\times20}\approx 4.001>3.841$ ……………………………11 分

有 95%的把握说明失眠与中风或心脏病存在"强关联" ……………………………12 分

20．解析：

（Ⅰ）设$P(x,y)$，$\odot P$半径为R，则$R=x+\frac{1}{2},|PF|=R+\frac{1}{2}$，所以点$P$到直线$x=-1$的距离与到$F(1,0)$的距离相等，

故点P的轨迹方程C为$y^2=4x$……………………4分

（Ⅱ）设$M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$，则$M_1\left(-\frac{1}{2},y_1\right)$、$N\left(-\frac{1}{2},y_2\right)$

设直线$MN:x=ty+n(t\neq 0)$代入$y^2=4x$中得$y^2-4ty-4n=0$

$y_1+y_2=4t,y_1y_2=-4n<0$……………………6分

$\because S_1=\frac{1}{2}\left|x_1+\frac{1}{2}\right|\cdot|y_1|$、$S_3=\frac{1}{2}\left|x_2+\frac{1}{2}\right|\cdot|y_2|$

$$\begin{aligned}\therefore 4S_1S_3&=\left(x_1+\frac{1}{2}\right)\left(x_1+\frac{1}{2}\right)|y_1y_2|\\&=\left(ty_1+n+\frac{1}{2}\right)\left(ty_2+n+\frac{1}{2}\right)|y_1y_2|\\&=\left[t^2y_1y_2+\left(n+\frac{1}{2}\right)t(y_1+y_2)+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right]\cdot|-4n|\\&=\left[-4nt^2+4t^2\left(n+\frac{1}{2}\right)+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right]\cdot 4n\\&=\left[2t^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right]\cdot 4n\end{aligned}$$

……………………8分

又$S_2=\frac{1}{2}\left|n+\frac{1}{2}\right|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\left|n+\frac{1}{2}\right|\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$\therefore S_2^2=\frac{1}{4}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\cdot(16t^2+16n)=4\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\cdot(t^2+n)$……………………10分

$S_2^2=4S_1S_3\Leftrightarrow 8nt^2=4\left(n+\frac{1}{2}\right)^2t^2\Leftrightarrow 2n=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow n=\frac{1}{2}$……………………11分

$\therefore$直线MN恒过$\left(\frac{1}{2},0\right)$……………………12分

21．解析：

（Ⅰ）$f'(x)=\ln(x+1)-ax$

令$h(x)=f'(x)=\ln(x+1)-ax$，$h'(x)=\frac{1}{x+1}-a$；……………………1分

1°当$a\le 0$时，$h'(x)>0$，$\therefore f'(x)$在$(-1,+\infty)$上递增，无减区间$h'(x)=0$……3分

2°当$a>0$时，令$h'(x)>0\Rightarrow -1<x<\frac{1}{a}-1$，

令$h'(x)<0\Rightarrow x>\frac{1}{a}-1$

所以，$f'(x)$在$\left(-1,\frac{1}{a}-1\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{a}-1,+\infty\right)$上单调递减；……5分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知，当$a\le 0$时，$\therefore f'(x)$在$(0,+\infty)$上递增，$\therefore f'(x)>f'(0)=0$

$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上递增，无最大值，不合题意；……6分

1°当$a\ge 1$时，$h'(x)=\frac{1}{x+1}-a<1-a\le 0$

$\therefore f'(x)$在$(0,+\infty)$上递减，$\therefore f'(x)<f'(0)=0$，

$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上递减，无最大值，不合题意；……8分

2°当$0<a<1$时，$\frac{1}{a}-1>0$，

由（Ⅰ）可知$f'(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}-1\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{a}-1,+\infty\right)$上单调递减；……9分

设$g(x)=x-1-\ln x$，则$g'(x)=\frac{x-1}{x}$；

令$g'(x)<0\Rightarrow 0<x<1$；令$g'(x)>0\Rightarrow x>1$

$\therefore g(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$单调递增；

$\therefore g(x)\ge g(1)=0$，即$\ln x\le x-1$

由此，当$x>0$时，$\ln\sqrt{x}\le\sqrt{x}-1<\sqrt{x}$，即$\ln x<2\sqrt{x}$．

所以，当$x>0$时，$h(x)<2\sqrt{x+1}-ax<2\sqrt{x+1}-a(x+1)=\sqrt{x+1}\left(2-a\sqrt{x+1}\right)$．

取$t=\frac{4}{a^2}-1$，则$t>\frac{1}{a}-1$，且$h(t)<\sqrt{t+1}\left(2-a\sqrt{t+1}\right)=0$．

又因为$h\left(\frac{1}{a}-1\right)>h(0)=0$，所以由零点存在性定理，存在$x_0\in\left(\frac{1}{a}-1,t\right)$，使得$h(x_0)=0$；……11分

当$x\in(0,x_0)$时，$h(x)>0$，即$f'(x)>0$；当$x\in(x_0,+\infty)$时，$h(x)<0$，即$f'(x)<0$；

所以，$f(x)$在$(0,x_0)$上单调递增，在$(x_0,+\infty)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上有最大值$f(x_0)$．

综上，$0<a<1$……12分

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

识别二维码，快速关注

福利：

1、关注后回复“答题模板”，即可获得高中 9 科答题模板资料

2、回复“清北华五”，即可获得清北华东五校特殊选拔考试模式及真题