2023年高考适应性考试（二）

数 学 试 题

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共计40分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的．

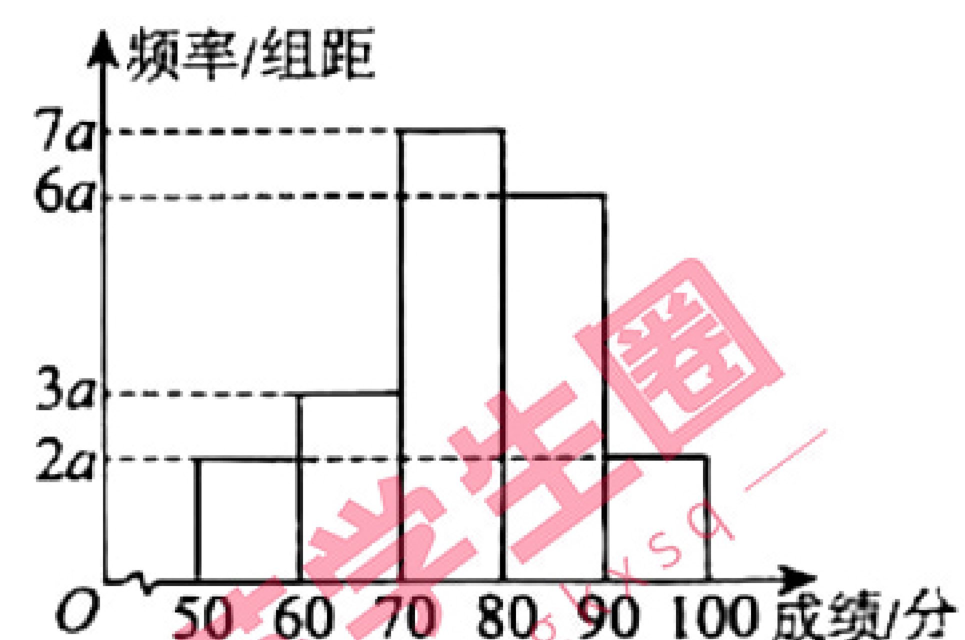
1．已知集合 $A=\{x|1<\log_2 x<2\}$，集合 $B=\{x\in Z|x^2-8x+12\le 0\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$[2,6]$　　B．$(2,4)$　　C．$\{3\}$　　D．$\{2,3,4,5,6\}$

2．已知复数 z 满足 $z(1+i)=i^{2023}$，其中 i 为虚数单位，则 z 的虚部为（　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{1}{2}i$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

3．为宣传我国第三艘航空母舰"中国人民解放军海军福建舰"正式服役，增强学生的国防意识，某校组织1000名学生参加了"逐梦深蓝，山河荣耀"国防知识竞赛，从中随机抽取20名学生的考试成绩（单位：分），成绩的频率分布直方图如图所示，则下列说法正确的是（　）



A．频率分布直方图中 a 的值为0.004

B．估计这20名学生考试成绩的第60百分位数为75

C．估计这20名学生数学考试成绩的众数为80

D．估计总体中成绩落在 $[60,70)$ 内的学生人数为150

4．若 $a=(1+\tan 20^\circ)(1+\tan 21^\circ)$，$b=(1+\tan 24^\circ)(1+\tan 25^\circ)$，则下列结论不正确的是（　）

A．$a<b$　　B．$ab=4$　　C．$a+b>4$　　D．$a^2+b^2=9$

5．已知圆 C 的方程为 $x^2+y^2=16$，直线 l 为圆 C 的切线，记 $A(-2,0),B(2,0)$ 两点到直线 l 的距离分别为 d_1,d_2，动点 P 满足 $|PA|=d_1$，$|PB|=d_2$，则动点 P 的轨迹方程为（　）

A．$x^2+y^2=4$　　B．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$　　C．$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{12}=1$　　D．$y^2=4x$

6．已知 $a=4e^{\frac{3}{2}}$，$b=5e^{\frac{6}{5}}$，$c=\frac{3}{2}e^{\frac{2}{3}}$，则（　）

A．$c<a<b$　　B．$c<b<a$　　C．$a<c<b$　　D．$b<c<a$

7．已知圆台两个底面圆的半径分别为1和2，圆台的侧面中存在两条母线互相垂直，则圆台侧面积的最大值为（　　）

A．$4\sqrt{2}\pi$　　B．$3\sqrt{2}\pi$　　C．$2\sqrt{2}\pi$　　D．$\sqrt{2}\pi$

8．若曲线$f(x)=a^x(a>1)$与曲线$g(x)=\log_a x(a>1)$有且只有一个公共点，且在公共点处的切线相同，则实数a的值为（　　）

A．e　　B．e^2　　C．$e^{\frac{1}{e}}$　　D．$\sqrt{e}$

二、多项选择题：（本大题共4小题，每小题5分，共20分）在每小题给出的选项中有多个选项符合要求．全部选对得5分，部分选对得2分，有选错的得0分．

9．已知平面向量$\vec{a}=(2,1)$，$\vec{b}=(t,t-3)$，则（　　）

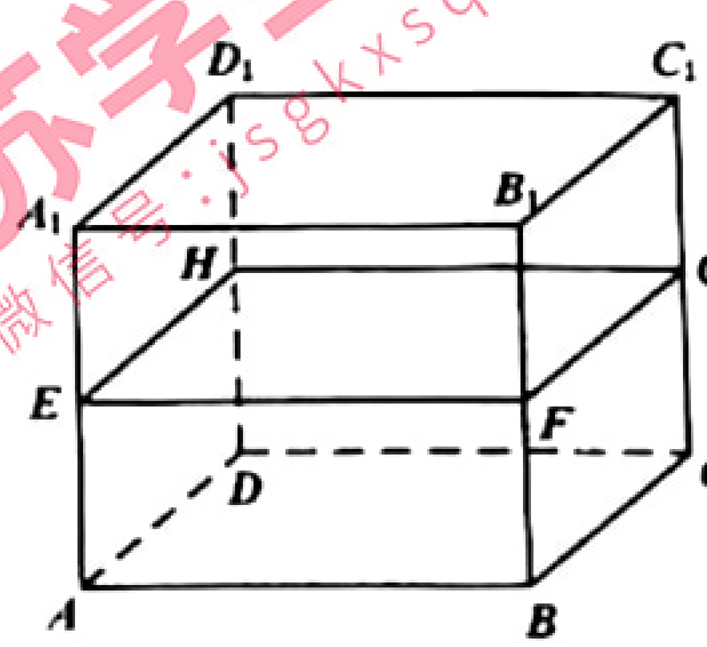
A．若$t=6$，则$\vec{a}//\vec{b}$

B．若$t>1$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为锐角

C．若$\vec{c}$为非零向量，则存在实数t，使得$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$

D．若$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量为$\frac{3}{5}\vec{b}$，则$t=2$或$t=\frac{7}{2}$

10．如图，透明塑料制成的长方体容器$ABCD-A_1B_1C_1D_1$内灌进一些水，固定容器底面一边BC于地面上，再将容器以BC为轴顺时针旋转，则（　　）



A．有水的部分始终是棱柱

B．水面所在四边形$EFGH$为矩形且面积不变

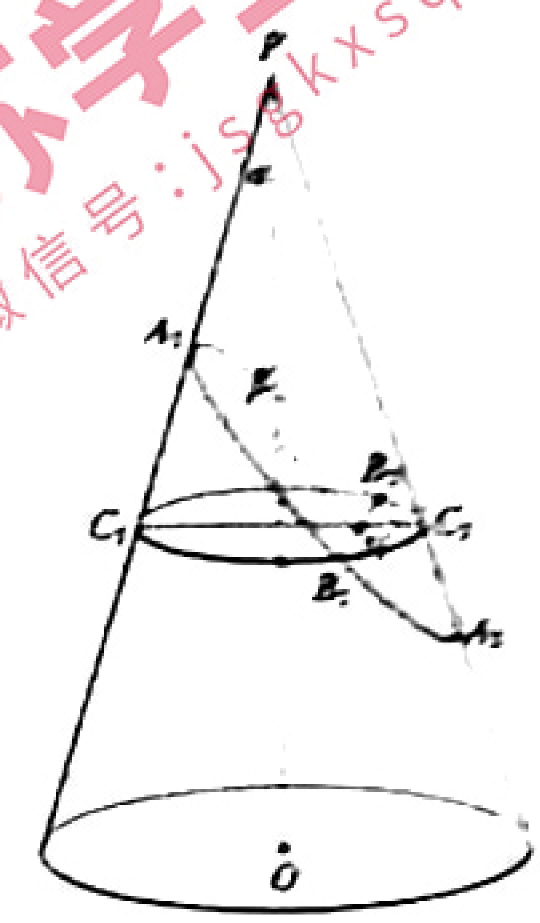
C．棱A_1D_1始终与水面平行

D．当点H在棱CD上且点G在棱CC_1上（均不含端点）时，$BE\cdot BF$是定值

11．函数$y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位，再将所得图象上所有点的横坐标变为原来的2倍，纵坐标不变，得到函数$f(x)$的图象．若对于任意$x_1\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，都存在$x_2\in[0,1]$，使得$f(x_1+\theta)+x_2=1$，则$\theta$的可能值为（　　）

A．π　　B．$\frac{7}{6}\pi$　　C．$\frac{3}{2}\pi$　　D．$\frac{4}{3}\pi$

12．如图，已知圆锥PO的轴PO与母线所成的角为α，过A_1的平面与圆锥的轴所成的角为$\beta(\beta>\alpha)$，该平面截这个圆锥所得的截面为椭圆，椭圆的长轴为A_1A_2，短轴为B_1B_2，长半轴长为a，短半轴长为b，椭圆的中心为N，再以B_1B_2为弦且垂直于PO的圆截面，记该圆与直线PA_1交于C_1，与直线PA_2交于C_2，则下列说法正确的是（　　）



A．当$\beta<\alpha$时，平面截这个圆锥所得的截面也为椭圆

B．$NC_1\cdot NC_2=a^2\dfrac{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}{\cos^2\alpha}$

C．平面截这个圆锥所得椭圆的离心率$e=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$

D．平面截这个圆锥所得椭圆的离心率$e=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

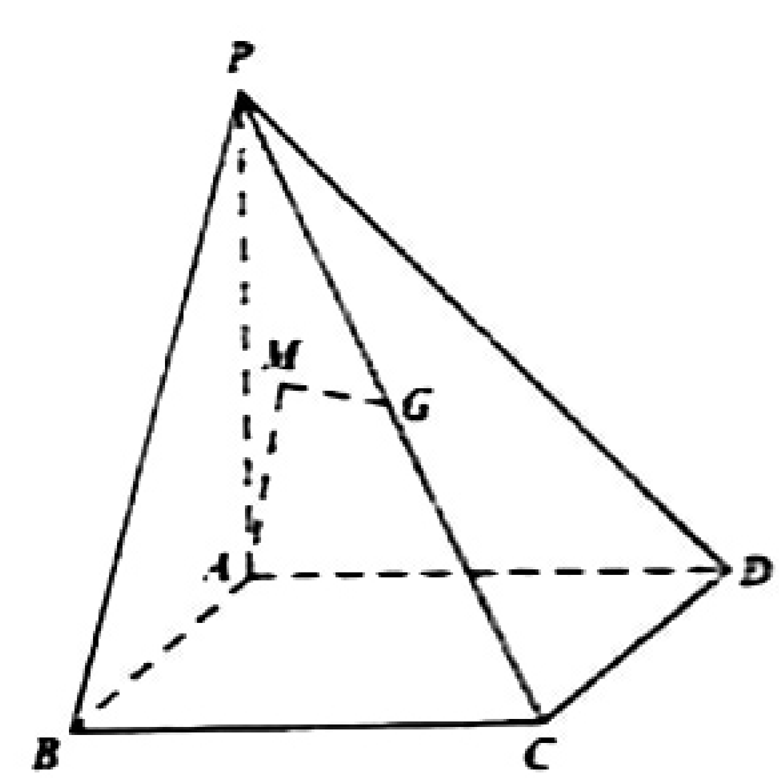
三、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13．若$\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)^n$的展开式中各项系数和为64，则该二项式展开式中所有有理项的系数之和为__▲__．

14．已知点M,N在双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$上，且$M,N$中点在直线$x=-1$上，直线$MN$的中垂线与$x$轴交于点$(-3,0)$，则双曲线的离心率为__▲__．

15．若函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，且$f(x)+f(y)=f(xy)$，$f(a_n)=n+f(\dfrac{1}{n})$，则$\sum\limits_{i=1}^{100}f(ia_i)=$__▲__．

16．在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为正方形，$PA=AB=1$，M为空间中一动点，G为PC的中点，$PA\perp$平面$ABCD$．若$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MG}=0$，则$M$的轨迹围成封闭图形的体积为__▲__；若$PC$与平面$PBA$所成的角等于$\angle AMG$，则平面$PBD$与$M$的轨迹的交线长为__▲__．



四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分）

17．(本小题满分 10 分)

已知 ΔABC 的内角 A,B,C 对应的边分别为 a,b,c，ΔABC 的面积为 $\dfrac{a^2-3b^2}{4}\sin C$．

(1) 求证：$\sin A=3\sin B$；

(2) 点 D 在边 BC 上，若 $DC=DA=\dfrac{1}{3}BC$，求 $\cos A$．

18．(本小题满分 12 分)

已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_1=1$，且 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是公差为 1 的等差数列．正项等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$，$b_{a_3}=16$．

(1) 求数列 $\{b_{a_n}\}$ 的通项；

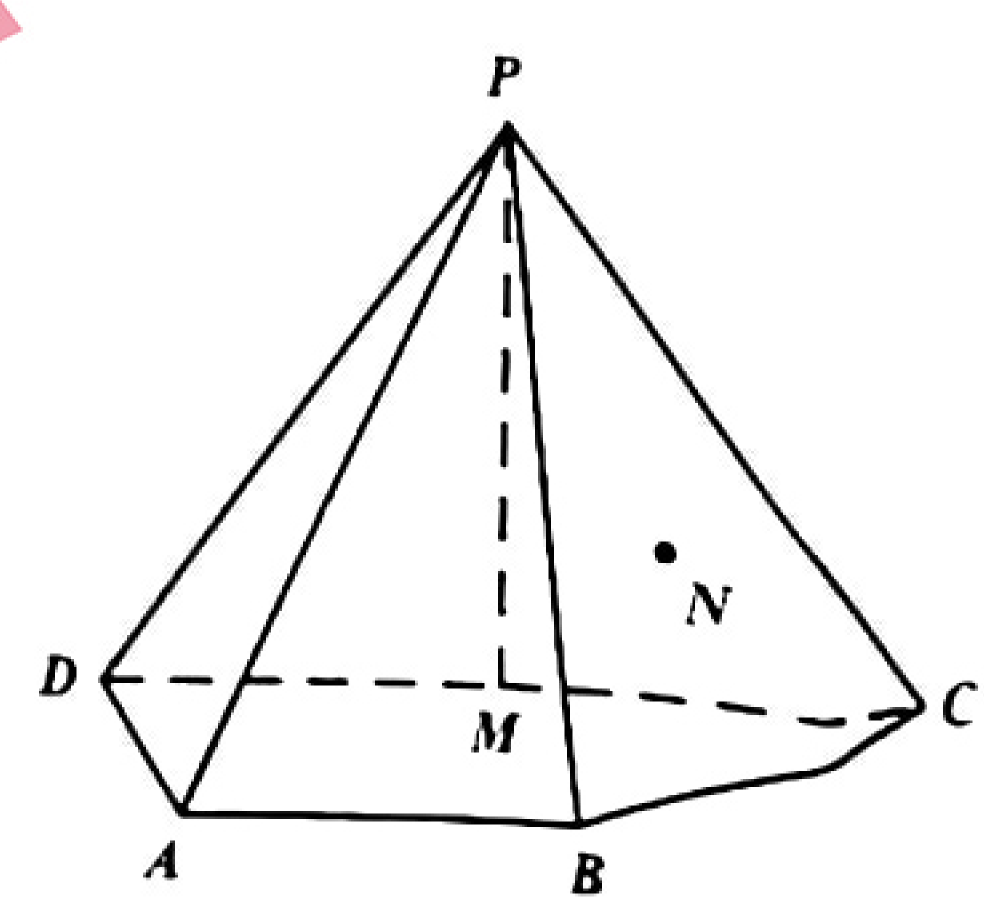
(2) 求数列 $\{a_n\cdot\sqrt{b_{a_n}}\}$ 的前 n 项和 T_n．

19．(本小题满分 12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是等腰梯形，$AB//CD$，$\angle ABC=120^\circ$，$AB=BC=2$，$PB=PC=\sqrt{13}$，M 为 CD 的中点，$PM\perp CD$，N 为 ΔPBC 的重心．

(1) 证明：$PM\perp$ 平面 $ABCD$；

(2) 求直线 DN 与平面 PMB 所成角的正弦值．



20．(本小题满分 12 分)

2023 年 3 月 11 日，丁俊晖在泰国巴吞他尼府举行的 2023 斯诺克 6 红球世锦赛决赛中以 8:6 战胜泰国球员塔猜亚·乌努，第二次夺得这项赛事冠军．丁俊晖认为"中式台球更易在职业和业余之间找到平衡，更容易让台球运动在全中国乃至全世界流行起来．"为了促进中国台球运动的发展，某体育公司面向社会推出"台球培训"活动，由以往培训经验测算这项"台球培训"成本为 800 元/人，为了确定其培训价格，调查了对这项"台球培训"有意向培训的人员预期价位，并将收集的 100 名有意向培训的人员预期价位整理如下：

有意向培训人员预期价位（元/人）	900	1000	1100	1200
人数	10	20	50	20

假设当且仅当这项"台球培训"的培训价格小于或等于某位有意向培训人员的预期价位时，该有意向培训的人员就会参加培训．设这项"台球培训"价格为 x（单位：元/人），$900<x\le 1200$，且每位有意向培训的人员报名参加培训活动相互独立．用样本的频率分布估计总体的分布，频率视为概率．

(1) 若 $x=1000$，已知某阶段有 4 名有意向培训的人员询价，X 为这一时段该项"台球培训"的参加人数，试求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

(2) 假设共有 M 名有意向培训的人员，设该公司组织"台球培训"活动所得总利润为 Y（单位：元），当这项培训活动的销售价格 x 定为多少时，Y 的数学期望 $E(Y)$ 达到最大值？

21．(本小题满分 12 分)

已知动圆 M 过点 $F(1,0)$ 且与直线 $x=-1$ 相切，记动圆圆心 M 的轨迹为曲线 C.

(1) 求曲线 C 的方程；

(2) 若直线 $l: x=m(m<0)$ 与 x 轴相交于点 P，点 B 为曲线 C 上异于顶点 O 的动点，直线 PB 交曲线 C 于另一点 D，直线 BO 和 DO 分别交直线 l 于点 S 和 T. 若 O,F,S,T 四点共圆，求 m 的值.

22．(本小题满分 12 分)

设函数 $f(x)=(ax-1)\ln(ax-1)-ax-x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2) 若 $g(x)=f(x)-e^x$ 在区间 $\left[\frac{1}{3},1\right]$ 上单调递减，其中 e 为自然对数的底数，求实数 a 的取值范围.