

雅礼教育集团 2022 级新高一入学考试试卷
数 学

时量：120 分钟 满分：100 分

一、填空题（共 18 题，每小题 3 分，共 54 分。请将答案直接填在答题卡的相应位置）

1. 一组数据如下：7, 10, 9, 6, 11, 9, 8, 4, 则这组数据的中位数为_____.

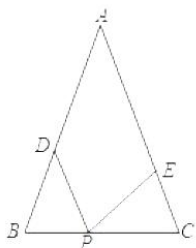
2. 计算： $|2 - \tan 60^\circ| + 2^{-2} + \frac{1}{2}\sqrt{12} =$ _____.

3. 化简： $\left(\frac{3}{a-2} + \frac{12}{a^2-4}\right) \div \left(\frac{2}{a-2} - \frac{1}{a+2}\right) =$ _____.

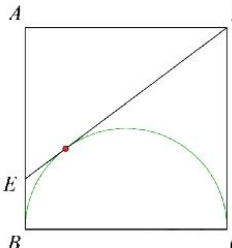
4. 计算： $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} =$ _____.

5. 已知 $a+b=4$, $ab=2$, 则 $a^2+b^2 =$ _____.

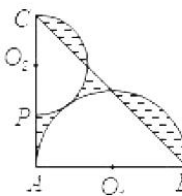
6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = \angle C$, $BP \perp CE$, $BD \perp CP$, 则 $\angle DPE =$ _____.



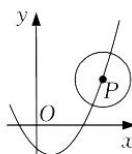
第 6 题图



第 8 题图



第 11 题图



第 12 题图

7. 已知 $x^2 - 3x + 1 = 0$, 求 $x^3 + \frac{1}{x^3} + 3$ 的值_____.

8. 如图，边长为 20 的正方形 ABCD 中，以 BC 为直径画一个半圆，直线 DE 与半圆相切，交 AB 于 E 点，则 $DE =$ _____.

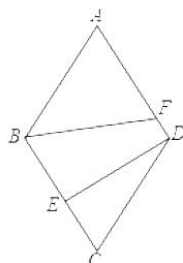
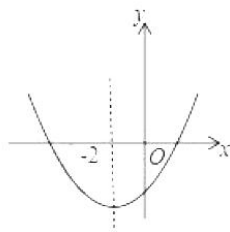
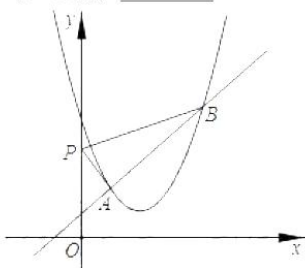
9. 不等式 $(a^2 - 1)x^2 - (a - 1)x - 1 < 0$ 的解集是全体实数，求实数 a 的取值范围_____.

10. 若方程 $(x - 2)(x^2 - 4x + m) = 0$ 的三个根可以作为一个三角形的三条边的长，则实数 m 的取值范围是_____.

11. 如图， $\triangle ABC$ 是直角边长为 a 的等腰直角三角形，直角边 AB 是半圆 O_1 的直径，半圆 O_2 过 C 点且与半圆 O_1 相切，则图中阴影部分的面积是_____.

12. 如图，P 已知的半径是 1，圆心 P 在抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$ 上运动，当 $\odot P$ 与 x 轴相切时，圆心 P 的坐标为_____.

13. 如图，直线 $y = x + 1$ 与抛物线 $y = x^2 - 4x + 5$ 交于 A, B 两点，点 P 是 y 轴上的一个动点，当 $\triangle PAB$ 的周长最小时， $S_{\triangle PAB} =$ _____.



第 13 题图

第 15 题图

第 17 题图

14. 因式分解: $6x^3 - 11x^2 + x + 4 =$ _____.

15. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的大致图象如图所示, 顶点坐标为 $(-2, -9a)$, 下列结论: ① $abc > 0$; ② $4a + 2b + c < 0$; ③ $9a - b + c = 0$; ④若方程 $a(x+5)(x-1) = -1$ 有两个根 x_1 和 x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则 $-5 < x_1 < x_2 < 1$; ⑤若方程 $|ax^2 + bx + c| = 1$ 有四个根, 则这四个根的和为 -8 , 其中正确的结论有 _____ 个.

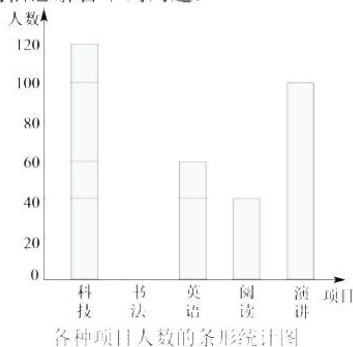
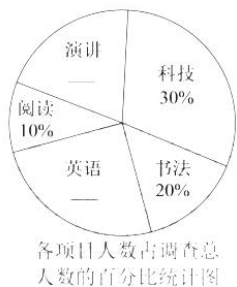
16. 若二次函数 $y = -x^2 + mx$ 在 $-2 \leq x \leq 1$ 时的最大值为 3, 那么 m 的值是 _____.

17. 如图, 在菱形 ABCD 中, 边 $AB = 5$, E, F 分别在 BC 和 AD 上, 若 $DF = 1$, $BE = 3$, 且此时 $BF = DE$, 则 BF 的长为 _____.

18. 已知三个关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$, $bx^2 + cx + a = 0$, $cx^2 + ax + b = 0$ 恰有一个公共实数根, 则 $\frac{a^2}{ac} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}$ 的值为 _____.

二、解答题 (共 5 小题, 请将答案及必要的解题过程直接写在答题卡的相应位置)

19. (本小题 6 分) 随着选修课的全面开展, 我校决定围绕在“科技、阅读、书法、演讲和英语”活动项目中, 你最喜欢哪一项 (每人只限一项) 活动的问题, 采用随机抽样的方式进行问卷调查, 根据调查情况绘制成了如图所示的两幅不完整的统计图, 由图中所给出的信息解答下列问题:



(1) 求在此次调查活动中一共抽查了多少名学生, 并将不完整的统计图补充完整;

(2) 在此次调查活动中, 初三 (1) 班的两个学习小组内各有 2 人都最喜欢演讲活动, 其中, 只有 1 人是女同学, 现从中任选 2 人去参加学校的演讲比赛, 用列表或画树状图的方法求出所选 2 人来自同一个小组且恰有 1 人是女同学的概率.

20. (本小题 8 分) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + (4m + 1) = 0$ 有实数根.

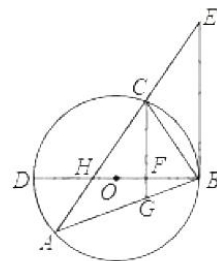
(1) 求 m 的取值范围;

(2) 若该方程的两个实数根为 x_1 、 x_2 , 且 $|x_1 - x_2| = 4$, 求 m 的值.

21. (本小题 10 分) 如图, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, BD 为 $\odot O$ 的直径, BD 与 AC 相交于点 H , AC 的延长线与过点 B 的直线相交于点 E , 且 $\angle A = \angle EBC$.

(1) 求证: BE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 已知 $CG \parallel EB$, 且 CG 与 BD , BA 分别相交于点 F , G , 若 $BG \cdot BA = 48$, $FG = \sqrt{2}$, $DF = 2BF$, 求 AH 的值.

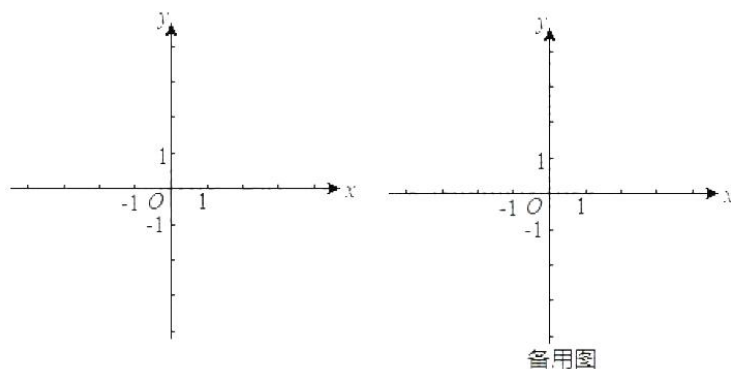


22. (本小题 10 分) 平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 - 4ax + 4a + c$ 与 x 轴交于点 A、点 B, 与 y 轴的正半轴交于点 C, 点 A 的坐标为 $(1, 0)$, $OB = OC$, 抛物线的顶点为 D.

(1) 求此抛物线的解析式;

(2) 若此抛物线的对称轴上的点 P 满足 $\angle APB = \angle ACB$, 求点 P 的坐标;

(3) Q 为线段 BD 上一点, 点 A 关于 $\angle AQB$ 的平分线的对称点为 A' , 若 $QA - QB = \sqrt{2}$, 求点 Q 的坐标和此时 $\triangle QAA'$ 的面积.

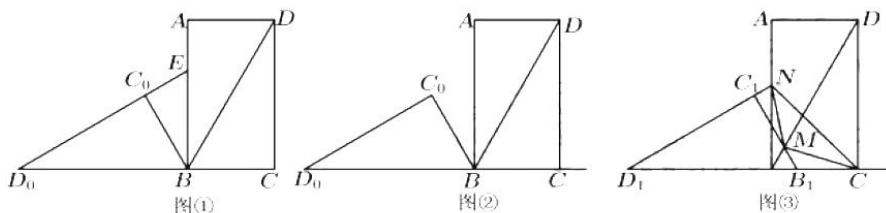


23. (本小题 12 分) 在矩形 ABCD 中, BD 为矩形 ABCD 的对角线, $\angle CBD = 60^\circ$, $BD = 12$.

(1) 如图①, 将 $\triangle BCD$ 绕点 B 逆时针旋转 120° 得到 $\triangle BC_0D_0$, 其中, 点 C、D 的对应点分别是点 C_0 、 D_0 , 延长 D_0C_0 交 AB 于点 E. 求 BE 的长;

(2) 如图②, 将 (1) 中的 $\triangle BC_0D_0$ 以每秒 1 个单位长度的速度沿射线 BC 向右平行移动, 得到 $\triangle B_1C_1D_1$, 其中, 点 B、 C_0 、 D_0 的对应点分别是点 B_1 、 C_1 、 D_1 , 当点 C_1 移动到边 CD 上时停止移动. 设移动的时间为 t 秒, $\triangle B_1C_1D_1$ 与矩形 ABCD 重叠部分的面积为 S , 请直接写出 S 与 t 之间的函数关系式, 并写出 t 的取值范围;

(3) 如图③, 在 $\triangle B_1C_1D_1$ 移动过程中, 直线 D_1C_1 与线段 AB 交于点 N, 直线 B_1C_1 与线段 BD 交于点 M. 是否存在某一时刻 t , 使 $\triangle MNC$ 为等腰三角形, 若存在, 求出时间 t ; 若不存在, 请说明理由.



雅礼教育集团 2022 级新高一入学考试试卷

数 学

时量：120 分钟 满分：100 分

一、填空题（共 18 题，每小题 3 分，共 54 分。请将答案直接填在答题卡的相应位置）

1. 一组数据如下：7, 10, 9, 6, 11, 9, 8, 4, 则这组数据的中位数为_____.

【解析】8.5

2. 计算： $|2 - \tan 60^\circ| + 2^{-2} + \frac{1}{2}\sqrt{12} =$ _____.

【解析】原式 $= 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{4} + \sqrt{3} = 2\frac{1}{4}$.

3. 化简： $\left(\frac{3}{a-2} + \frac{12}{a^2-4}\right) \div \left(\frac{2}{a-2} - \frac{1}{a+2}\right) =$ _____.

【解析】原式 $= \frac{3(a+2)+12}{(a+2)(a-2)} \times \frac{(a+2)(a-2)}{2(a+2)-(a-2)} = \frac{3(a+6)}{a+6} = 3$.

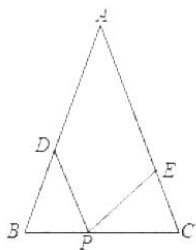
4. 计算： $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} =$ _____.

【解析】 $\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}+\sqrt{5}-2+\sqrt{6}-\sqrt{5} = \sqrt{6}-1$

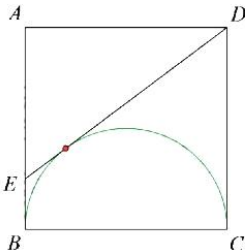
5. 已知 $a+b=4$, $ab=2$, 则 $a^2+b^2 =$ _____.

【解析】 $\because a+b=4$, $ab=2$, $\therefore a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 4^2 - 2 \times 2 = 16 - 4 = 12$;

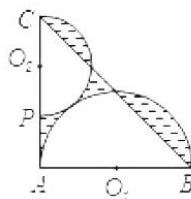
6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = \angle C$, $BP \perp CE$, $BD \perp CP$, 则 $\angle DPE =$ _____.



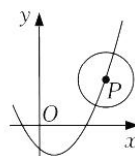
第 6 题图



第 8 题图



第 11 题图



第 12 题图

【解析】 $\because \angle A = 40^\circ$, $\angle B = \angle C$,

$\therefore \angle B = \angle C = 70^\circ$,

在 $\triangle BDP$ 和 $\triangle CPE$ 中,

$$\begin{cases} BP = CE \\ \angle B = \angle C, \\ BD = CP \end{cases}$$

$\therefore \triangle BDP \cong \triangle CPE (SAS)$,

$\therefore \angle BDP = \angle CPE$,

$\because \angle BPD + \angle BDP = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$,

$\therefore \angle CPE + \angle BPD = 110^\circ$,

$\therefore \angle DPE = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$,

故答案为: 70° .

7. 已知 $x^2 - 3x + 1 = 0$, 求 $x^3 + \frac{1}{x^3} + 3$ 的值_____.

【解析】原式=21



8. 如图, 边长为20的正方形ABCD中, 以BC为直径画一个半圆, 直线DE与半圆相切, 交AB于E点, 则DE=_____.

【解析】DE=15

9. 不等式 $(a^2-1)x^2-(a-1)x-1<0$ 的解集是全体实数, 求实数a的取值范围_____.

【解析】 $-\frac{3}{5}<a\leq 1$

10. 若方程 $(x-2)(x^2-4x+m)=0$ 的三个根可以作为一个三角形的三条边的长, 则实数m的取值范围是_____.

【解析】 $3<m\leq 4$

11. 如图, $\triangle ABC$ 是直角边长为a的等腰直角三角形, 直角边AB是半圆 O_1 的直径, 半圆 O_2 过C点且与半圆 O_1 相切, 则图中阴影部分的面积是_____.

【解析】连接 O_1E , O_2D , O_1O_2 .

设半圆 O_2 的半径是x, 根据勾股定理, 得

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a-x)^2 = \left(\frac{a}{2}+x\right)^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{a}{3}.$$

$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

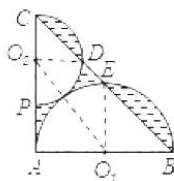
$$\therefore \angle B = \angle C = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle O_2DC = \angle C = 45^\circ, \angle O_1EB = \angle B = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle CO_2D = \angle EO_1B = 90^\circ.$$

$\therefore$ 阴影部分的面积 = 直角三角形ABC的面积 - 2 (直角三角形 CO_2D 的面积 + 直角三角形 BO_1E 的面积)

$$= \frac{1}{2}a^2 - 2\left(\frac{1}{2} \times \frac{a^2}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{a^2}{4}\right) = \frac{5}{36}a^2.$$



12. 如图, P 已知的半径是1, 圆心P在抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$ 上运动, 当 $\odot P$ 与x轴相切时, 圆心P的坐标为_____.

【解析】设点 $P(x, y)$,

$\because \odot P$ 与x轴相切,

$$\therefore |y| = 1,$$

$$\therefore y = \pm 1,$$

$$\text{当 } y = 1 \text{ 时, } 1 = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2},$$

$$\text{解得: } x_1 = 3, x_2 = -1,$$

$$\therefore \text{点 } P(3, 1), (-1, 1),$$

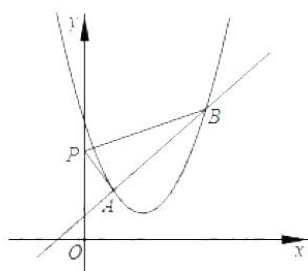
$$\text{当 } y = -1 \text{ 时, } -1 = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2},$$

$$\text{解得: } x_1 = x_2 = 1,$$

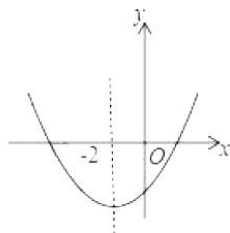
$$\therefore \text{点 } P(1, -1),$$

故答案为: (3,1) 或 (-1,1) 或 (1,-1).

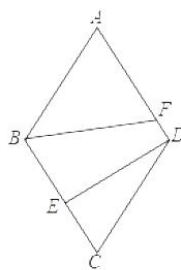
13. 如图, 直线 $y = x + 1$ 与抛物线 $y = x^2 - 4x + 5$ 交于A, B两点, 点P是y轴上的一个动点, 当 $\triangle PAB$ 的周长最小时, $S_{\triangle PAB} =$ _____.



第 13 题图



第 15 题图



第 17 题图

【解析】解：
$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x^2 - 4x + 5 \end{cases}$$

解得，
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$$

∴ 点 A 的坐标为 (1, 2)，点 B 的坐标为 (4, 5)，

∴ $AB = \sqrt{(5-2)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2}$ ，

作点 A 关于 y 轴的对称点 A'，连接 A'B 与 y 轴的交于 P，则此时 $\triangle PAB$ 的周长最小，

点 A' 的坐标为 (-1, 2)，点 B 的坐标为 (4, 5)，

设直线 A'B 的函数解析式为 $y = kx + b$ ，

$$\begin{cases} -k + b = 2 \\ 4k + b = 5 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} k = \frac{3}{5} \\ b = \frac{13}{5} \end{cases}$$

∴ 直线 A'B 的函数解析式为 $y = \frac{3}{5}x + \frac{13}{5}$ ，

当 $x = 0$ 时， $y = \frac{13}{5}$ ，

即点 P 的坐标为 $(0, \frac{13}{5})$ ，

将 $x = 0$ 代入直线 $y = x + 1$ 中，得 $y = 1$ ，

∴ 直线 $y = x + 1$ 与 y 轴的夹角是 45° ，

∴ 点 P 到直线 AB 的距离是： $(\frac{13}{5} - 1) \times \sin 45^\circ = \frac{8}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$ ，

∴ $\triangle PAB$ 的面积是： $\frac{3\sqrt{2} \times \frac{4\sqrt{2}}{5}}{2} = \frac{12}{5}$ ，

故答案为： $\frac{12}{5}$ 。

14. 因式分解： $6x^3 - 11x^2 + x + 4 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解析】原式 $= (x-1)(3x-4)(2x+1)$

15. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的大致图象如图所示，顶点坐标为 $(-2, -9a)$ ，下列结论：① $abc > 0$ ；

② $4a + 2b + c < 0$ ；③ $9a - b + c = 0$ ；④ 若方程 $a(x+5)(x-1) = -1$ 有两个根 x_1 和 x_2 ，且 $x_1 < x_2$ ，则



$-5 < x_1 < x_2 < 1$; ⑤若方程 $|ax^2 + bx + c| = 1$ 有四个根, 则这四个根的和为 -8 , 其中正确的结论有 _____ 个.

【解析】解: $\because$ 抛物线的开口向上, 则 $a > 0$, 对称轴在 y 轴的左侧, 则 $b > 0$, 交 y 轴的负半轴, 则 $c < 0$,

$\therefore abc < 0$, 所以①结论错误;

$\because$ 抛物线的顶点坐标 $(-2, -9a)$,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -2, \quad \frac{4ac - b^2}{4a} = -9a,$$

$$\therefore b = 4a, \quad c = -5a,$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = ax^2 + 4ax - 5a$,

$\therefore 4a + 2b + c = 4a + 8a - 5a = 7a > 0$, 所以②结论正确,

$9a - b + c = 9a - 4a - 5a = 0$, 故③结论正确,

$\because$ 抛物线 $y = ax^2 + 4ax - 5a$ 交 x 轴于 $(-5, 0)$, $(1, 0)$,

$\therefore$ 若方程 $a(x+5)(x-1) = -1$ 有两个根 x_1 和 x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则 $-5 < x_1 < x_2 < 1$, 正确, 故结论④正确,

若方程 $|ax^2 + bx + c| = 1$ 有四个根, 设方程 $ax^2 + bx + c = 1$ 的两根分别为 x_1, x_2 , 则 $\frac{x_1 + x_2}{2} = -2$, 可得 $x_1 + x_2 = -4$,

设方程 $ax^2 + bx + c = -1$ 的两根分别为 x_3, x_4 , 则 $\frac{x_3 + x_4}{2} = -2$, 可得 $x_3 + x_4 = -4$,

所以这四个根的和为 -8 , 故结论⑤正确,

故答案为: 4.

16. 若二次函数 $y = -x^2 + mx$ 在 $-2 \leq x \leq 1$ 时的最大值为 3, 那么 m 的值是 _____.

【解析】解: $\because y = -x^2 + mx$,

$\therefore$ 抛物线开口向下, 抛物线的对称轴为 $x = -\frac{m}{2 \times (-1)} = \frac{m}{2}$,

①当 $\frac{m}{2} \leq -2$, 即 $m \leq -4$ 时, 当 $x = -2$ 时, 函数最大值为 3,

$$\therefore -4 - 2m = 3,$$

解得: $m = -3.5$ (舍去);

②当 $\frac{m}{2} \geq 1$, 即 $m \geq 2$ 时, 当 $x = 1$ 时, 函数最大值为 3,

$$\therefore -1 + m = 3,$$

解得: $m = 4$.

③当 $-2 < \frac{m}{2} < 1$, 即 $-4 < m < 2$ 时, 当 $x = \frac{m}{2}$ 时, 函数最大值为 3,

$$\therefore -\frac{m^2}{4} + \frac{m^2}{2} = 3,$$

解得 $m = 2\sqrt{3}$ (舍去) 或 $m = -2\sqrt{3}$,

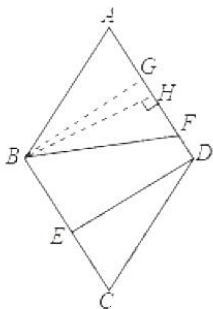
综上所述, $m = 4$ 或 $m = -2\sqrt{3}$,

17. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, 边 $AB = 5$, E, F 分别在 BC 和 AD 上, 若 $DF = 1$, $BE = 3$, 且此时 $BF = DE$, 则 BF 的长为 _____.

【解析】解: $\because$ 在菱形 $ABCD$ 中, 边 $AB = 5$, $DF = 1$, $BE = 3$,

$$\therefore CE = 2, AF = 4,$$

如图，在 AF 上截取 $AG = CE = 2$ ，过点 B 作 $BH \perp FG$ 于点 H ，



$$\text{则 } FG = AF - AG = 2,$$

$\because$ 菱形 $ABCD$ 中， $\angle A = \angle C$ ， $AB = DC$ ，

$\therefore$ 在 $\triangle BAG$ 和 $\triangle DCE$ 中，

$$\begin{cases} BA = DC \\ \angle A = \angle C \\ AG = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAG \cong \triangle DCE (SAS).$$

$$\therefore BG = DE,$$

$$\therefore BF = DE,$$

$$\therefore BG = BF.$$

过点 B 作 $BH \perp FG$ 于点 H ，则 $FH = HG = \frac{1}{2}FG = 1$ ，

$$\therefore AH = AG + GH = 2 + 1 = 3,$$

$$\therefore AB = 5,$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中，由勾股定理得： $BH = 4$ ，

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle BHF \text{ 中，由勾股定理得：} BF = \sqrt{BH^2 + HF^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}.$$

故答案为： $\sqrt{17}$ 。

18. 已知三个关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ， $bx^2 + cx + a = 0$ ， $cx^2 + ax + b = 0$ 恰有一个公共实数根，

则 $\frac{a^2}{ac} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}$ 的值为_____。

【解析】解：设公共实数根为 t ，

$$\text{则 } at^2 + bt + c = 0, bt^2 + ct + a = 0, ct^2 + at + b = 0,$$

$$\text{三式相加得 } (a+b+c)t^2 + (a+b+c)t + a+b+c = 0,$$

$$\text{即 } (a+b+c)(t^2 + t + 1) = 0,$$

$$\text{因为 } t^2 + t + 1 = (t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0,$$

$$\text{所以 } a+b+c = 0,$$

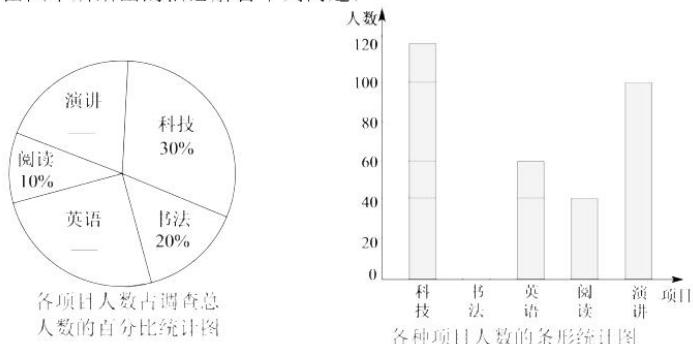
$$\text{所以原式} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)+c^3}{abc} \\
 &= \frac{(a+b)[(a+b)^2-3ab]+c^3}{abc} \\
 &= \frac{-c(c^2-3ab)+c^3}{abc} \\
 &= \frac{3abc}{abc} \\
 &= 3.
 \end{aligned}$$

故答案为3.

二、解答题（共5小题，请将答案及必要的解题过程直接写在答题卡的相应位置）

19.（本小题6分）随着选修课的全面开展，我校决定围绕在“科技、阅读、书法、演讲和英语”活动项目中，你最喜欢哪一项（每人只限一项）活动的问题，采用随机抽样的方式进行问卷调查，根据调查情况绘制成了如图所示的两幅不完整的统计图，由图中所给出的信息解答下列问题：



（1）求在此次调查活动中一共抽查了多少名学生，并将不完整的统计图补充完整；

（2）在此次调查活动中，初三（1）班的两个学习小组内各有2人都最喜欢演讲活动，其中，只有1人是女同学，现从中任选2人去参加学校的演讲比赛，用列表或画树状图的方法求出所选2人来自同一个小组且恰有1人是女同学的概率。

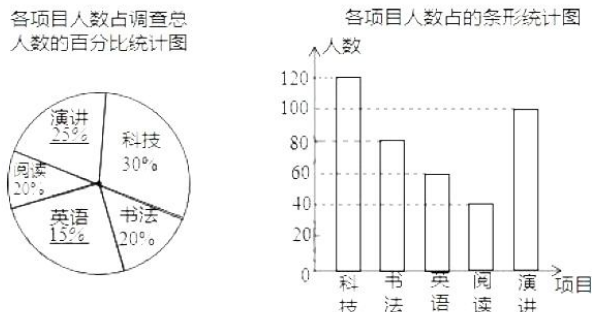
【解析】解：（1）一共抽查了 $120 \div 30\% = 400$ 名学生。

扇形统计图，演讲： $\frac{100}{400} \times 100\% = 25\%$ ，

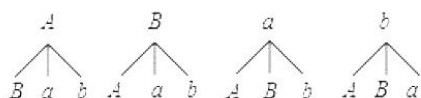
英语： $\frac{60}{400} \times 100\% = 15\%$ 。

条形统计图书法： $400 \times 20\% = 80$ 人；

如图：



（2）设第一小组中男为A、女为B，则第二小组中两男为a，b；



由树状图知一共有 12 种等可能的结果，其中有一名女生且来自不同小组的有 4 种，

$$\text{则 } P = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

20. (本小题 8 分) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + (4m+1) = 0$ 有实数根.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 若该方程的两个实数根为 x_1, x_2 , 且 $|x_1 - x_2| = 4$, 求 m 的值.

【解析】解: (1) $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + (4m+1) = 0$ 有实数根,

$$\therefore \Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (4m+1) \geq 0,$$

解得: $m \leq 2$.

(2) $\because$ 方程 $x^2 - 6x + (4m+1) = 0$ 的两个实数根为 x_1, x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = 6, \quad x_1 x_2 = 4m+1,$$

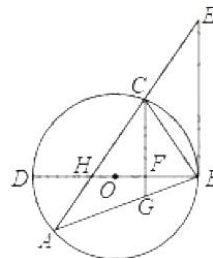
$$\therefore (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 4^2, \quad \text{即 } 32 - 16m = 16,$$

解得: $m = 1$.

21. (本小题 10 分) 如图, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, BD 为 $\odot O$ 的直径, BD 与 AC 相交于点 H , AC 的延长线与过点 B 的直线相交于点 E , 且 $\angle A = \angle EBC$.

(1) 求证: BE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 已知 $CG \parallel EB$, 且 CG 与 BD , BA 分别相交于点 F , G , 若 $BG \cdot BA = 48$, $FG = \sqrt{2}$, $DF = 2BF$, 求 AH 的值.



【解析】(1) 证明: 连接 CD ,

$\because BD$ 是直径,

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ, \quad \text{即 } \angle D + \angle CBD = 90^\circ,$$

$$\because \angle A = \angle D, \quad \angle A = \angle EBC,$$

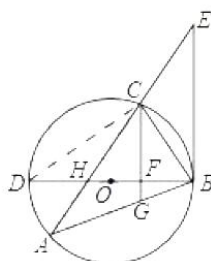
$$\therefore \angle CBD + \angle EBC = 90^\circ,$$

$$\therefore BE \perp BD,$$

$\therefore BE$ 是 $\odot O$ 切线.

(2) 解: $\because CG \parallel EB$,

$$\therefore \angle BCG = \angle EBC,$$



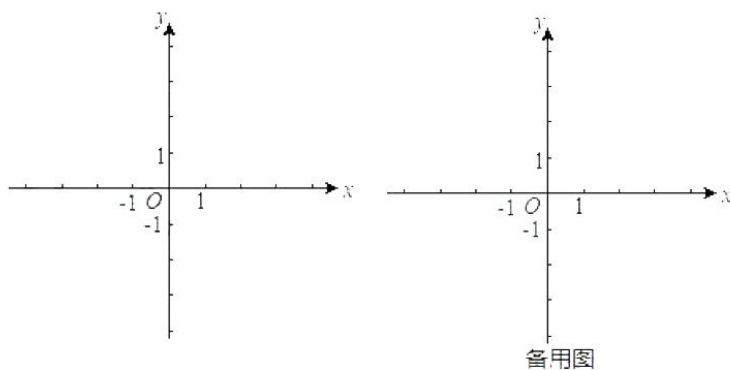
$$\begin{aligned}
 &\therefore \angle A = \angle BCG, \\
 &\because \angle CBG = \angle ABC \\
 &\therefore \triangle ABC \sim \triangle CBG, \\
 &\therefore \frac{BC}{BG} = \frac{AB}{BC}, \text{ 即 } BC^2 = BG \cdot BA = 48, \\
 &\therefore BC = 4\sqrt{3}, \\
 &\because CG \parallel EB, \\
 &\therefore CF \perp BD, \\
 &\therefore \triangle BFC \sim \triangle BCD, \\
 &\therefore BC^2 = BF \cdot BD, \\
 &\because DF = 2BF, \\
 &\therefore BF = 4, \\
 &\text{在 } RT\triangle BCF \text{ 中, } CF = \sqrt{BC^2 - BF^2} = 4\sqrt{2}, \\
 &\therefore CG = CF + FG = 5\sqrt{2}, \\
 &\text{在 } RT\triangle BFG \text{ 中, } BG = \sqrt{BF^2 + FG^2} = 3\sqrt{2}, \\
 &\because BG \cdot BA = 48, \\
 &\therefore BA = 8\sqrt{2} \text{ 即 } AG = 5\sqrt{2}, \\
 &\therefore CG = AG, \\
 &\therefore \angle A = \angle ACG = \angle BCG, \quad \angle CFH = \angle CFB = 90^\circ, \\
 &\therefore \angle CHF = \angle CBF, \\
 &\therefore CH = CB = 4\sqrt{3}, \\
 &\because \triangle ABC \sim \triangle CBG, \\
 &\therefore \frac{AC}{CG} = \frac{BC}{BG}, \\
 &\therefore AC = \frac{BC \cdot CG}{BG} = \frac{20\sqrt{3}}{3}, \\
 &\therefore AH = AC - CH = \frac{8\sqrt{3}}{3}.
 \end{aligned}$$

22. (本小题 10 分) 平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 - 4ax + 4a + c$ 与 x 轴交于点 A、点 B, 与 y 轴的正半轴交于点 C, 点 A 的坐标为 $(1, 0)$, $OB = OC$, 抛物线的顶点为 D.

(1) 求此抛物线的解析式;

(2) 若此抛物线的对称轴上的点 P 满足 $\angle APB = \angle ACB$, 求点 P 的坐标;

(3) Q 为线段 BD 上一点, 点 A 关于 $\angle AQB$ 的平分线的对称点为 A', 若 $QA - QB = \sqrt{2}$, 求点 Q 的坐标和此时 $\triangle QAA'$ 的面积.



【解析】解：（1） $\because y = ax^2 - 4ax + 4a + c = a(x-2)^2 + c$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = 2$.

$\because$ 抛物线 $y = ax^2 - 4ax + 4a + c$ 与 x 轴交于点 A 、点 B ，点 A 的坐标为 $(1, 0)$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(3, 0)$ ， $OB = 3$.

可得该抛物线的解析式为 $y = a(x-1)(x-3)$.

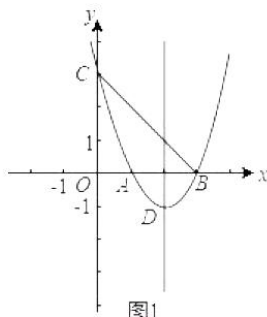
$\because OB = OC$ ，抛物线与 y 轴的正半轴交于点 C ，

$\therefore OC = 3$ ，点 C 的坐标为 $(0, 3)$.

将点 $C(0, 3)$ 代入该解析式 $y = a(x-1)(x-3)$.

解得 $a = 1$.

$\therefore$ 此抛物线的解析式为 $y = x^2 - 4x + 3$. (如图1)



（2）作 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot E$ ，设抛物线的对称轴与 x 轴的交点为点 F ，设 $\odot E$ 与抛物线的对称轴位于 x 轴上方的部分的交点为点 P_1 ，点 P_1 关于 x 轴的对称点为点 P_2 ，点 P_1 、点 P_2 均为所求点. (如图2)

可知圆心 E 必在 AB 边的垂直平分线即抛物线的对称轴直线 $x = 2$ 上.

$\because \angle AP_1B$ 、 $\angle ACB$ 都是弧 AB 所对的圆周角，

$\therefore \angle AP_1B = \angle ACB$ ，且射线 FE 上的其它点 P 都不满足 $\angle APB = \angle ACB$.

由（1）可知 $\angle OBC = 45^\circ$ ， $AB = 2$ ， $OF = 2$.

可得圆心 E 也在 BC 边的垂直平分线即直线 $y = x$ 上.

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $E(2, 2)$.

$\therefore$ 由勾股定理得 $EA = \sqrt{5}$.

$\therefore EP_1 = EA = \sqrt{5}$.

$\therefore$ 点 P_1 的坐标为 $P_1(2, 2 + \sqrt{5})$.

由对称性得点 P_2 的坐标为 $P_2(2, 2 - \sqrt{5})$.

$\therefore$ 符合题意的点 P 的坐标为 $P_1(2, 2 + \sqrt{5})$ 、 $P_2(2, 2 - \sqrt{5})$.

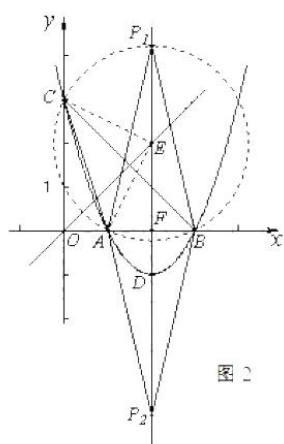


图 2

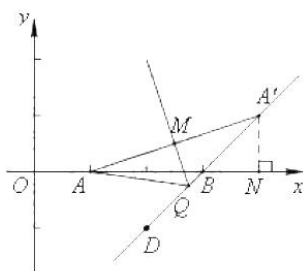


图 3

(3) $\because$ 点 B 、 D 的坐标分别为 $B(3,0)$ 、 $D(2,-1)$,

可得直线 BD 的解析式为 $y=x-3$, 直线 BD 与 x 轴所夹的锐角为 45° .

$\because$ 点 A 关于 $\angle AQB$ 的平分线的对称点为 A' , (如图 3)

若设 AA' 与 $\angle AQB$ 的平分线的交点为 M ,

则有 $QA=QA'$, $AM=A'M$, $AA' \perp QM$, Q, B, A' 三点在一条直线上.

$$\because QA-QB=\sqrt{2},$$

$$\therefore BA'=QA'-QB=QA-QB=\sqrt{2}.$$

作 $A'N \perp x$ 轴于点 N .

$\because$ 点 Q 在线段 BD 上, Q, B, A' 三点在一条直线上,

$$\therefore A'N=BA' \cdot \sin 45^\circ=1, \quad BN=BA' \cdot \cos 45^\circ=1.$$

$\therefore$ 点 A' 的坐标为 $A'(4,1)$.

$\because$ 点 Q 在线段 BD 上,

$\therefore$ 设点 Q 的坐标为 $Q(x, x-3)$, 其中 $2 < x < 3$.

$$\because QA=QA',$$

$$\therefore \text{由两点间的距离公式得 } (x-1)^2 + (x-3)^2 = (x-4)^2 + (x-3-1)^2.$$

$$\text{解得 } x = \frac{11}{4}.$$

经检验, $x = \frac{11}{4}$ 在 $2 < x < 3$ 的范围内.

$$\therefore \text{点 } Q \text{ 的坐标为 } Q\left(\frac{11}{4}, -\frac{1}{4}\right).$$

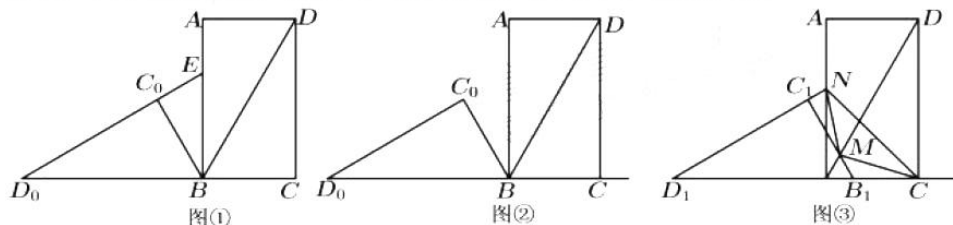
$$\text{此时 } S_{\triangle QAD} = S_{\triangle QAB} + S_{\triangle QAD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot (|y_A| + |y_Q|) = \frac{1}{2} \times 2 \times \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}.$$

23. (本小题 12 分) 在矩形 $ABCD$ 中, BD 为矩形 $ABCD$ 的对角线, $\angle CBD = 60^\circ$, $BD = 12$.

(1) 如图①, 将 $\triangle BCD$ 绕点 B 逆时针旋转 120° 得到 $\triangle BC_0D_0$, 其中, 点 C, D 的对应点分别是点 C_0, D_0 , 延长 D_0C_0 交 AB 于点 E . 求 BE 的长;

(2) 如图②, 将(1)中的 $\triangle BC_0D_0$ 以每秒1个单位长度的速度沿射线BC向右平行移动, 得到 $\triangle B_1C_1D_1$, 其中, 点B、 C_0 、 D_0 的对应点分别是点 B_1 、 C_1 、 D_1 , 当点 C_1 移动到边CD上时停止移动. 设移动的时间为 t 秒, $\triangle B_1C_1D_1$ 与矩形ABCD重叠部分的面积为 S , 请直接写出 S 与 t 之间的函数关系式, 并写出 t 的取值范围;

(3) 如图③, 在 $\triangle B_1C_1D_1$ 移动过程中, 直线 D_1C_1 与线段AB交于点N, 直线 B_1C_1 与线段BD交于点M, 是否存在某一时刻 t , 使 $\triangle MNC$ 为等腰三角形, 若存在, 求出时间 t ; 若不存在, 请说明理由.



【解析】

(1) 在矩形ABCD中, $\angle ABC = \angle C = 90^\circ$,

$\because \angle CBD = 60^\circ$, $\angle DBD_0 = 120^\circ$, $\therefore \angle D_0BD + \angle DBC = 180^\circ$,

$\therefore D_0$ 、B、C三点在一条直线上, $\angle ABD_0 = 90^\circ$,

又由旋转知 $\triangle DBC \cong \triangle D_0BC_0$, $\therefore \angle D_0BC_0 = \angle DBC = 60^\circ$, $D_0B = DB = 12$,

$\therefore \angle ED_0B = 30^\circ$, $\therefore BE = BD_0 \tan 30^\circ = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$;

(2) 当 $0 < t < 3$ 时, $s = \frac{\sqrt{3}}{2}t^2$,

当 $3 \leq t < 6$ 时, $s = -\frac{\sqrt{3}}{6}t^2 + 4\sqrt{3}t - 6\sqrt{3}$

当 $6 \leq t < 9$ 时, $s = -\frac{2\sqrt{3}}{3}t^2 + 10\sqrt{3}t - 24\sqrt{3}$.

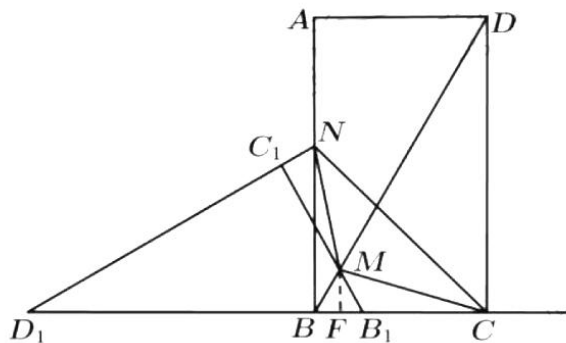




$$(3) \quad CD = BD \sin \angle CBD = 12 \times \sin 60^\circ = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

$$BC = BD \cos \angle CBD = 12 \times \cos 60^\circ = 12 \times \frac{1}{2} = 6.$$

过点 M 作 $MF \perp$ 于点 F (如图).



$\because \triangle BB_1M$ 为等边三角形, $\therefore BM = B_1M = BB_1 = t$,

$$\therefore C_1M = |6-t|, \quad D_1B = 12-t, \quad CF = 6 - \frac{1}{2}t, \quad MF = \frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

$$\therefore BN = \frac{\sqrt{3}}{3}(12-t), \quad D_1N = \frac{2\sqrt{3}}{3}(12-t).$$

$$C_1N = \left| \frac{2\sqrt{3}}{3}(12-t) - 6\sqrt{3} \right| = \left| \frac{\sqrt{3}}{3}(2t-6) \right|.$$

$$\therefore MN^2 = C_1N^2 + C_1M^2 = \left| \frac{\sqrt{3}}{3}(2t-6) \right|^2 + |6-t|^2 = \frac{7}{3}t^2 - 20t + 48.$$

$$MC^2 = CF^2 + MF^2 = \left(6 - \frac{1}{2}t \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right)^2 = t^2 - 6t + 36.$$

$$NC^2 = BC^2 + BN^2 = 6^2 + \left[\frac{\sqrt{3}}{3}(12-t) \right]^2 = \frac{1}{3}t^2 - 8t + 84.$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } MN = MC \text{ 时, } \frac{7}{3}t^2 - 20t + 48 = t^2 - 6t + 36, \text{ 解得: } t_1 = \frac{21+3\sqrt{33}}{4} > 9 \text{ (舍去)}, \quad t_2 = \frac{21-3\sqrt{33}}{4}.$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } MC = NC \text{ 时, } t^2 - 6t + 36 = \frac{1}{3}t^2 - 8t + 84, \text{ 解得: } t_3 = \frac{-3-3\sqrt{33}}{2} < 0 \text{ (舍去)}, \quad t_4 = \frac{-3+3\sqrt{33}}{2}.$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } MN = NC \text{ 时, } \frac{7}{3}t^2 - 20t + 48 = \frac{1}{3}t^2 - 8t + 84, \text{ 解得: } t_5 = 3 - 3\sqrt{3} < 0 \text{ (舍去)}, \quad t_6 = 3 + 3\sqrt{3}.$$

综上所述: 当 t 的值为 $\frac{21-3\sqrt{33}}{4}$ 或 $\frac{-3+3\sqrt{33}}{2}$ 或 $3+3\sqrt{3}$ 时, $\triangle MNC$ 为等腰三角形.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线



微信



自主选拔在线
微信号：zizzsw



自主选拔在线
微信号：zizzsw