

河北省衡水中学2023届上学期高三年级四调考试

数学

本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分。共4页,总分150分,考试时间120分钟。

第I卷(选择题 共60分)

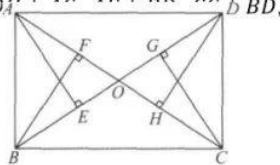
一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 已知 $z = \frac{i(3-i)}{2+i}$, 则 z 在复平面内对应的点位于
A. 实轴上 B. 虚轴上
C. 第一、三象限的角平分线上 D. 第二、四象限的角平分线上
- 已知向量 \mathbf{a} , \mathbf{b} 满足 $|\mathbf{a}| = 2$, $\mathbf{b} = (1, 1)$, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{10}$, 则向量 \mathbf{a} 在向量 \mathbf{b} 上的投影向量的坐标为
A. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ B. $(1, 1)$ C. $(-1, -1)$ D. $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
- 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $A = 90^\circ$, $B = 60^\circ$, $AB = 2$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} =$
A. -4 B. 4 C. -8 D. 8
- 已知 A, B, C 为平面内任意三点, 则“ \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{AC} 的夹角为钝角”是“ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| < |\overrightarrow{BC}|$ ”的
A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 2

000多年前,古希腊雅典学派的第三大算学家欧道克萨斯首先提出黄金分割,所谓黄金分割点,指的是把一条线段分割为两部分,使其中一部分与全长之比等于另一部分与这部分之比,黄金分割比为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 相交于点 O , $BF \perp AC$, $DE \perp AC$, $AF = EF = FC$, $CG = GH = HD$, 且点 E 为线段 BO 的黄金分割点, 则 $\overrightarrow{BF} =$

- A. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\overrightarrow{BG}$ B. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\overrightarrow{BG}$
C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\overrightarrow{BG}$ D. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{\sqrt{5}}{5}\overrightarrow{BG}$



- 已知复数 z 满足 $z \cdot \bar{z} + 4i \cdot \bar{z} = 5 + ai$, 则实数 a 的取值范围是
A. $[-4, 4]$ B. $[-6, 6]$ C. $[-8, 8]$ D. $[-12, 12]$

7. 已知点P是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 有下列四个等式:

① $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$; ② $\vec{PA} \cdot (\vec{PA} - \vec{PB}) = \vec{PC} \cdot (\vec{PA} - \vec{PB})$;

③ $|\vec{PA}| = |\vec{PB}| = |\vec{PC}|$; ④ $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = \vec{PB} \cdot \vec{PC} = \vec{PC} \cdot \vec{PA}$

如果只有一个等式不成立, 则该等式为

- A. ① B. ② C. ③ D. ④

8. 对于给定的正整数 n , 设集合 $X_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $A \subseteq X_n$, 且 $A \neq \emptyset$. 记 $I(A)$ 为集合 A 中的最大元素, 当 A 取遍 X_n 的所有非空子集时, 对应的所有 $I(A)$ 的和记为 $S(n)$, 则 $S(2023) =$

- A. $2023 \times 2^{2023} + 1$ B. $2023 \times 2^{2022} + 1$
C. $2022 \times 2^{2022} + 1$ D. $2022 \times 2^{2023} + 1$

二、选择题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分。

9. 设非零向量 \mathbf{a} , \mathbf{b} 的夹角为 θ , \mathbf{c} 为任意非零向量, 定义运算 $\mathbf{a} * \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin \theta$, 则下列结论正确的是

- A. 若 $\mathbf{a} * \mathbf{b} = 0$, 则 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$ B. $\mathbf{a} * (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} * \mathbf{b} + \mathbf{a} * \mathbf{c}$
C. $2(\mathbf{a} * \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 \sin 2\theta$ D. 若 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$, 则 $\mathbf{a} * \mathbf{b}$ 的最大值为1

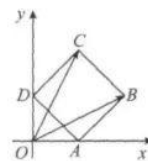
10. 已知复数 z_1, z_2 满足 $|z_1| \cdot |z_2| \neq 0$, 则下列结论正确的是

- A. 若 $|z_1| = |z_2|$, 则 $z_1 = \pm z_2$ B. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
C. 若 $|z_1| = |z_2|$, 则 $z_1^2 = z_2^2$ D. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

11. 如图放置的边长为1的正方形 $ABCD$ 的顶点 A, D 分别在 x 轴的正半轴、

y 轴的非负半轴上滑动, 则 $\vec{OB} \cdot \vec{OC}$ 的值可能是

- A. 1 B. -1 C. 2 D. -2



12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} . 若对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y)$, 则下列结论正确的是

- A. $f(0) = 1$ B. $f(x) + f(0) \geq 0$
C. 若 $f(1) = \frac{1}{2}$, 则 $\sum_{n=1}^{2023} f(n) = \frac{1}{2}$ D. $f'(x)$ 必为奇函数

第II卷(非选择题 共90分)

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 已知 $\frac{2z-1}{1+z} = i$, 则 z 的虚部是_____.

14. 若函数 $f(x) = a\sin x + \cos x$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称, 则实数 $a =$ _____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$, P 是线段 BC 上的动点, 有下列三个结论:

① $2|\overrightarrow{AP}| \geq \sqrt{3}|\overrightarrow{AB}|$; ② $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \geq \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC}$; ③ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} \geq \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP}$.

则所有正确结论的序号是_____.

16. 已知向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 满足 $|\mathbf{a}| = 1, \mathbf{b} = -2\mathbf{a}, |\mathbf{c} - \mathbf{b}| = 2|\mathbf{c} - \mathbf{a}|$, 则向量 $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ 与 \mathbf{a} 的夹角的最大值是_____.

四、解答题: 本题共6小题, 共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分)

设复数 $z_1 = 1 - i, z_2 = \cos \theta + i\sin \theta$, 其中 $\theta \in [0, \pi]$.

(1) 若复数 $z = \overline{z_1} \cdot z_2$ 为实数, 求 θ 的值;

(2) 求 $|z_1 + z_2|$ 的取值范围.

18. (12分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R = \sqrt{2}$,

且 $\tan B + \tan C = \frac{\sqrt{2}\sin A}{\cos C}$.

(1) 求 B 和 b 的值;

(2) 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

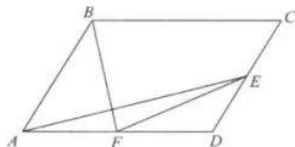
19. (12分)

如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 2, AD = 3, \angle BAD = \frac{\pi}{3}$, E 为 CD 的中点,

$\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{AD} (0 \leq \lambda \leq 1)$.

(1) 若 $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BF}$, 求实数 λ 的值;

(2) 求 $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{FE}$ 的取值范围.



20. (12分)

已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$ 为奇函数，且在区间 $(-\infty, -1)$ 上单调递增，在区间 $(-1, 1)$ 上单调递减。

(1) 求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 若过点 $A(1, m)$ ($m \neq -2$) 可作曲线 $y = f(x)$ 的三条切线，求实数 m 的取值范围。

21. (12分)

治理垃圾是某市改善环境的重要举措。2021年该市产生的垃圾量为200万吨，通过扩大宣传、环保处理等一系列措施，预计从2022年开始，连续5年，每年的垃圾排放量比上一年减少20万吨，从第6年开始，每年的垃圾排放量为上一年的75%。

(1) 写出该市从2022年开始的年垃圾排放量与治理年数 n ($n \in \mathbb{N}^*$) 的表达式；

(2) 设 A_n 为从2022年开始 n

年内的年平均垃圾排放量。如果年平均垃圾排放量呈逐年下降趋势，则认为现有的治理措施是有效的；否则，认为无效。试判断现有的治理措施是否有效，并说明理由。

22. (12分)

已知函数 $f(x) = \ln(x+1) - 1$ 。

(1) 证明： $f(x-1) \leq 2\sqrt{x}-3$ ；

(2) 设函数 $g(x) = (x+1)f(x) - \frac{1}{2}ax^2 + 1$ ，若 $g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上存在最大值，求实数 a 的取值范围。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线