绝密★启用前

姓　名：________

考生号：________

2021年普通高等学校全国统一招生考试
湘豫名校联考

数　　学(理科)

考生注意：

1. 本试卷共8页。时间120分钟，满分150分。答题前，考生先将自己的姓名、考生号填写在试卷指定位置，并将姓名、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上，然后认真核对条形码上的信息，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。作答非选择题时，将答案写在答题卡上对应的答题区域内。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将试卷和答题卡一并收回。

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|1<x<4\}$，$B=\{x|2^x>8\}$，则 $A\cap(\complement_U B)=$　　(　　)

A. $(1,3)$　　B. $(1,3]$

C. $(2,3]$　　D. $(3,4)$

2. 已知 i 为虚数单位，复数 z 满足 $z+1=\mathrm{i}(z-1)$，则 z 的模为　　(　　)

A. 1　　B. $\sqrt{2}$

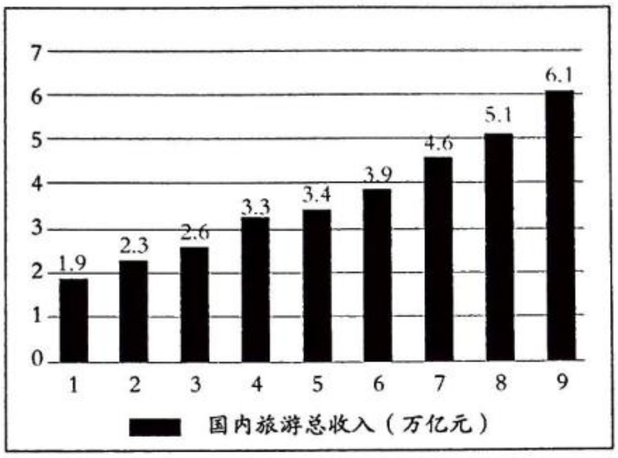
C. 2　　D. $\sqrt{3}$

3. 若 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $1+\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha=\frac{7}{5}$，则 $\cos\alpha=$　　(　　)

A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$　　D. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

4. 随着我国经济水平的提升，旅游收入持续增长，且国内旅游的旅游量最大、潜力最深、基础性最强，下图为连续 9 年我国国内旅游总收入统计图：



假设每年国内旅游总收入 y(单位：万亿元)与年份代号 x 线性相关，且满足 $\hat{y}=\hat{b}x+1.21$，则估计第 10 年国内旅游总收入约为 ( )

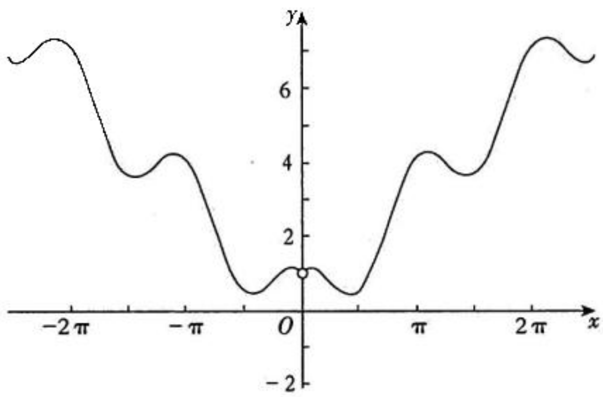
A. 5.97 万亿元　　B. 6.07 万亿元

C. 6.17 万亿元　　D. 6.37 万亿元

5. 已知直角梯形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{DC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{EC}$，$\angle BAD=60^\circ$，$AB=4$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=$ ( )

A. 16　　B. 32　　C. 34　　D. 40

6. 已知函数 $f(x)=\sin 2x$，$g(x)=e^x$，则下列图象对应的函数可能为 ( )



A. $y=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+g(\ln x^2)$　　B. $y=f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+g(\ln|x|)$

C. $y=f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+g(\ln x^3)$　　D. $y=f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+g(\ln|x|)$

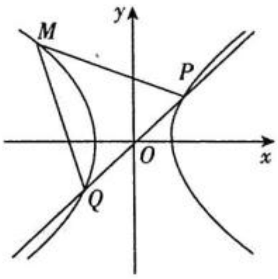
7. 已知 $f(x)$ 为二次函数，且 $f(x)=x^2+f'(x)-1$，设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $f(n)$，则 $a_{10}-a_1=$ ( )

A. 19　　B. 18　　C. 17　　D. 16

8. 已知函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2})$ 的图象沿 x 轴向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)=\sin 2x$ 的图象，则 $f(x)$ 的一个对称中心为 ( )

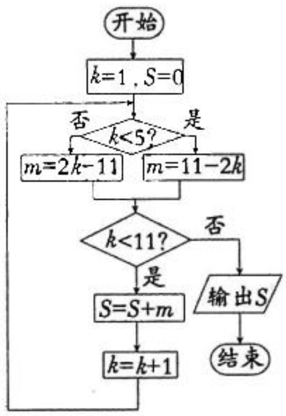
A. $\left(\frac{\pi}{8},0\right)$ B. $\left(\frac{3\pi}{8},0\right)$ C. $\left(\frac{5\pi}{8},0\right)$ D. $(\pi,0)$

9. 如图，已知 P,Q 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上关于原点对称的两点，点 M 为双曲线 C 上异于 P,Q 且不与 P,Q 关于坐标轴对称的任意一点，若直线 PM,QM 的斜率之积为 $\frac{3}{4}$，且双曲线 C 的焦点到渐近线的距离为 $\sqrt{3}$，则双曲线 C 的实轴长为 ( )



A. 2 B. $\sqrt{7}$ C. $2\sqrt{7}$ D. 4

10. 执行下面的程序框图，则输出 S 的值为 ( )



A. 41 B. 48 C. 60 D. 71

11. 2020 年疫情期间，某县中心医院分三批共派出 6 位年龄互不相同的医务人员支援武汉六个不同的方舱医院，每个方舱医院分配一人. 第一批派出一名医务人员的年龄为 P_1，第二批派出两名医务人员的年龄最大者为 P_2，第三批派出三名医务人员的年龄最大者为 P_3，则满足 $P_1<P_2<P_3$ 的分配方案的概率为 ( )

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{20}$ D. $\frac{3}{4}$

12. 设实数 a,b 满足 $5^a+11^b=18^a,7^a+9^b=15^b$，则 a,b 的大小关系为 ( )

A. $a<b$ B. $a=b$

C. $a>b$ D. 无法比较

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}2x-3\geqslant 0,\\ x-y+1\leqslant 0,\\ 2x+y-10\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=\dfrac{1}{x-1}+y$ 的最小值为________.

14. 若椭圆的任意两条互相垂直的切线的交点都在同一个圆上，该圆的圆心是椭圆中心，则称这个圆为蒙日圆. 若椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{4}=1(a^2>4)$ 的蒙日圆的半径为 $2\sqrt{3}$，则椭圆 C 的离心率为________.

15. 一个封闭的正方体容器内盛有一半的水，以正方体的一个顶点为支撑点，将该正方体在水平桌面上任意旋转，当容器内的水面与桌面间距离最大时，水面截正方体各面所形成的图形周长为 $3\sqrt{2}$，则此正方体外接球的表面积为________.

16. 已知数列 $\{b_n\}$，$b_{n+1}-b_n=2=b_1(n\in\mathbf{N}^*)$，等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=b_1$，$a_4=b_8$，若数列 $\{b_n\}$ 中去掉与数列 $\{a_n\}$ 相同的项后余下的项按原顺序组成数列 $\{c_n\}$，则 $\{c_n\}$ 前 200 项的和为________.

三、解答题：共70分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第22、23题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共60分.

17. (12分)

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $\dfrac{c-a}{b}=\sqrt{3}\sin C-\cos C$.

(1)求角 B 的大小；

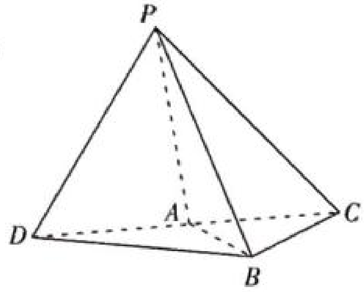
(2)若 $C=\dfrac{\pi}{6}$，$a=2$，F 为边 AC 上一点，且 $CF=\sqrt{2}BF$，求 $\triangle ABF$ 的面积.

18.（12 分）

在三棱锥 $P-BCD$ 中，$BC\perp PD$，$BC=6$，$PC=12$，$\triangle PBD$ 是边长为 $6\sqrt{3}$ 的等边三角形.

（1）证明：平面 $PCB\perp$ 平面 PBD；

（2）设 A 是 CD 的中点，求 BC 与平面 PAB 所成角的正弦值.



19.（12 分）

已知圆 $O:x^2+y^2=2$ 交抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的准线于 M,N 两点（M 点在上方），且 $OM\perp ON$.

（1）求抛物线 C 的方程；

（2）过抛物线 C 的焦点 F 的直线 l 与抛物线交于 A,B 两点，若 $MA\perp MB$，求直线 l 的斜率.

20.（12 分）

一鲜花店销售某种玫瑰花，根据以往的日销售记录，这种玫瑰花的日销售额（单位：元）服从正态分布 $N(1\ 400,100^2)$. 在销售记录中，随机抽取 n 天，至少有一天日销售额在 $(1\ 100,1\ 700)$ 之外的概率约为 0.025 7. 在这 n 天里，鲜花店老板每天给表现最好的 5 位员工每位两次抽奖的机会，每次抽奖结果只有“100 元和 50 元”两种结果. 由于某种原因，二者出现的概率不一定是等可能的，设出现“100 元”的概率为 p，各次抽奖相互独立.

(1)求 n 的值.

(2)当有 10 人次参与抽奖时，恰有 6 人次得到 100 元的概率为 $f(p)$，求 $f(p)$ 的最大值点 p_0. 当 $p=p_0$ 时，设每位员工抽奖得到的金额为 X，预计在这 n 天里，鲜花店老板需要拿出的抽奖金额的期望是多少？

附：若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-3\sigma<Z<\mu+3\sigma)=0.997\ 4$.

$0.997\ 4^9\approx0.976\ 8$	$0.997\ 4^{10}\approx0.974\ 3$	$0.997\ 4^{11}\approx0.971\ 8$	$0.997\ 4^{12}\approx0.969\ 2$

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=(1+x)e^{-2x}$ 与 $F(x)=\dfrac{x^3}{2}-3x+2x\cos x+1$. ($e=2.718\ 28\cdots$ 是自然对数的底数，$\ln 2\approx0.69$)

(1)讨论关于 x 的方程 $|\ln x|=f(x)$ 根的个数；

(2)当 $x\in[0,1]$ 时，证明：$f(x)\geqslant1-x\geqslant F(x)$.

(二)选考题:共 10 分.请考生在 22、23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做第一题计分.

22.[选修 4－4:坐标系与参数方程](10 分)

已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=-1+\dfrac{4k}{1+k^2}, \\ y=\dfrac{2(1-k^2)}{1+k^2} \end{cases}$ (k 为参数),以坐标原点为极点,x 轴的正半轴为极轴,建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=a$.

(1)将曲线 C_1 的参数方程化为普通方程;

(2)设曲线 C_1 与曲线 C_2 交于两点 A,B,$|AB|=\sqrt{14}$,求实数 a 的值.

23.[选修 4－5:不等式选讲](10 分)

设 a、b、c 为正数,$a+b+c=M$,$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$ 的最小值为$\sqrt{2}$.

(1)求 M 的值;

(2)求不等式 $3|x+M|+|x-2M|>4$ 的解集.

2021年普通高等学校全国统一招生考试
湘豫名校联考

数学(理科)答案

第Ⅰ卷

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	A	B	C	C	D	C	B	D	B	A	A

一、选择题:本大题共12小题.每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中.只有一项是符合题目要求的.

1.【答案】B

【解析】∵$B=\{x|2^x>8\}=\{x|x>3\}$,∴$\complement_U B=\{x|x\leqslant 3\}$,又$A=\{x|1<x<4\}$,则$A\cap(\complement_U B)=(1,3]$,故选B.

2.【答案】A

【解析】由已知可得$z=\frac{-i-1}{1-i}$,于是$|z|=\frac{|-i-1|}{|1-i|}=1$,故选A.

3.【答案】B

【解析】∵$1+\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha=2\cos^2\alpha+2\sin 2\alpha=\frac{2\cos^2\alpha+2\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2+4\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{7}{5}$,

∴$\tan\alpha=3$或$\tan\alpha=-\frac{1}{7}$(舍去),则$\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$,故选B.

4.【答案】C

【解析】计算可得$\bar{x}=5$,$\bar{y}\approx 3.69$,将点$(5,3.69)$代入$\hat{y}=\hat{b}x+1.21$,可得$\hat{b}=0.496$,所以$\hat{y}=0.496x+1.21$,将$x=10$代入,可得$\hat{y}=6.17$万亿元,故选C.

5.【答案】C

【解析】法一:由题意可得$AD=6$,

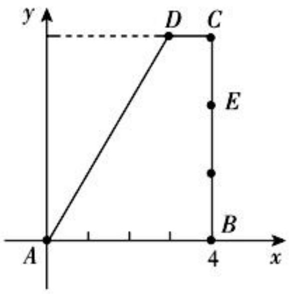
$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$,

则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}^2+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}^2=\frac{2}{3}\times 6\times 4\times\cos 60°+\frac{1}{8}\times 4^2+\frac{2}{3}\times 6^2=34$.

法二：

如图，由题意可得 $C(4,3\sqrt{3})$，$E(4,2\sqrt{3})$，



则 $\overrightarrow{AE}=(4,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC}=(4,3\sqrt{3})$，所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times4+3\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=34$，故选 C.

6.【答案】D

【解析】A. $y=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+g(\ln x^2)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+x^2=-\cos 2x+x^2$，当 $x\to0$ 时，$y\to-1$，不符合题意；

B. $y=f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+g(\ln|x|)=\sin(2x-\pi)+|x|=-\sin 2x+|x|$，其图象不关于 y 轴对称，不符合题意；

C. $y=f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+g(\ln x^3)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+x^3=\cos 2x+x^3$，其图象不关于 y 轴对称，不符合题意，根据排除法，故选 D.

7.【答案】C

【解析】由题意设 $f(x)=x^2+bx+c$，$f'(x)=2x+b$，即 $x^2+bx+c=x^2+2x+b-1$，解得 $b=2,c=1$，所以 $f(x)=x^2+2x+1$，所以 $f(n)=n^2+2n+1$，可得 $a_1=f(1)=4$，当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=f(n)-f(n-1)=2n+1$，所以 $a_{10}=21$，又 $a_1=4$，所以 $a_{10}-a_1=17$，故选 C.

8.【答案】B

【解析】易得 $\omega=2$，令 $2x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，则 $g(x)=\sin 2x$ 图象的对称中心为 $(\frac{k\pi}{2},0)$，$k\in\mathbf{Z}$，故 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的对称中心为 $(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8},0)$，$k\in\mathbf{Z}$，令 $k=1$，可得一个对称中心为 $(\frac{3\pi}{8},0)$，故选 B.

9.【答案】D

【解析】设 $M(x,y)$，$P(x_0,y_0)$，则 $Q(-x_0,-y_0)$，则 $k_{PM}=\frac{y-y_0}{x-x_0}$，$k_{QM}=\frac{y+y_0}{x+x_0}$，由题意知 $k_{PM}\cdot k_{QM}=\frac{y^2-y_0^2}{x^2-x_0^2}=\frac{b^2(\frac{x^2}{a^2}-1)-b^2(\frac{x_0^2}{a^2}-1)}{x^2-x_0^2}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$，所以 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{7}{4}$，又因为焦点到渐近线 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$ 的距离为 $\frac{|\sqrt{3}c|}{\sqrt{7}}=\sqrt{3}$，得 $c=\sqrt{7}$，所以 $a=2,2a=4$，故选 D.

10.【答案】B

【解析】执行程序框图，$k=1,S=0$，满足 $k<5$，$m=11-2=9$，满足 $k<11$，$S=9$；

$k=2$，满足 $k<5$，$m=11-4=7$，满足 $k<11$，$S=16$；

$k=3$，满足 $k<5$，$m=11-6=5$，满足 $k<11$，$S=21$；

$k=4$，满足 $k<5$，$m=11-8=3$，满足 $k<11$，$S=24$；

$k=5$，不满足 $k<5$，$m=10-11=-1$，满足 $k<11$，$S=23$；

$k=6$，不满足 $k<5$，$m=12-11=1$，满足 $k<11$，$S=24$；

$k=7$，不满足 $k<5$，$m=14-11=3$，满足 $k<11$，$S=27$；

$k=8$，不满足 $k<5$，$m=16-11=5$，满足 $k<11$，$S=32$；

$k=9$，不满足 $k<5$，$m=18-11=7$，满足 $k<11$，$S=39$；

$k=10$，不满足 $k<5$，$m=20-11=9$，满足 $k<11$，$S=48$；

$k=11$，不满足 $k<5$，$m=22-11=11$，不满足 $k<11$，输出 S 的值为 48，故选 B.

11.【答案】A

【解析】由题意知年龄最大的医务人员必在第三批，安排年龄最大的医务人员有 C_3^1 种方法，第三批中剩下的两个方舱医院安排有 A_5^2 种分配方式，在留下的三位医务人员中，把这个年龄最大的医务人员安排在第二批，有 C_2^1 种分配方式，剩下的两位医务人员有 A_2^2 种分配方式，根据分步乘法计数原理，所有分配的方式数是 $C_3^1A_5^2C_2^1A_2^2=240$，没有任何要求的分配方式为 A_6^6. 所以满足 $P_1<P_2<P_3$ 分配方案的概率为 $\frac{240}{A_6^6}=\frac{1}{3}$，故选 A.

12.【答案】A

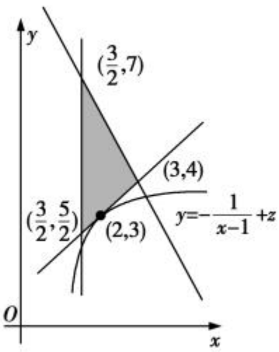
【解析】用反证法。假设 $a\geqslant b$，则 $18^a=5^a+11^b\leqslant 5^a+11^a$，所以 $1\leqslant(\frac{5}{18})^a+(\frac{11}{18})^a$，因为函数 $y=(\frac{5}{18})^x+(\frac{11}{18})^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，所以 $a\leqslant 1$. 同理，$b\geqslant 1$，而 a,b 不可能都为 1，矛盾，故 $a<b$，故选 A.

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题．每小题 5 分，共 20 分．

13.【答案】4

【解析】本题为非线性规划问题，$y=z-\frac{1}{x-1}$，所以 z 的几何意义为反比例类函数 $y=z-\frac{1}{x-1}$ 的对称中心的纵坐标，如图，当反比例类函数与直线相切时，达到最小值为 4.



14.【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】当两切线分别为 $x=a$ 和 $y=2$ 时，满足条件，则 $a^2+4=12$，解得 $a^2=8$，$\therefore e^2=\frac{a^2-4}{a^2}=\frac{1}{2}$，$\therefore e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

15.【答案】3π

【解析】设正方体的棱长为 a，则正方体的体对角线长为 $\sqrt{3}a$，当正方体旋转到一条体对角线垂直于水平面时，容器内水的高度最大，又因为水的体积是正方体体积的一半，所以容器里水面的最大高度为体对角线的一半，即最大高度为 $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. 设外接球的球心为 O，则球心 O 为体对角线的中点，设正方体为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，O 为 BD_1 的中点，取 AA_1，CC_1 的中点 G，H，A_1B_1，B_1C_1 的中点 E，F. 可证得 $BD_1\perp EF$，$BD_1\perp GE$，进而可证 $BD_1\perp$ 平面 $GEFH$，同理可得，水面截正方体各面形成的图形为正六边形，边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$，周长为 $3\sqrt{2}a$，所以 $3\sqrt{2}a=3\sqrt{2}$，则 $a=1$，所以正方体外接球的半径 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故正方体外接球的表面积为 $4\pi R^2=3\pi$.

16.【答案】42 962

【解析】$\because b_{n+1}-b_n=2$，$\therefore\{b_n\}$ 为等差数列，又 $b_1=2$，$\therefore b_n=2n$，$\therefore a_1=2$，$a_4=16$，则等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 2，$\therefore a_n=2^n$. $\because b_{208}=416$，$a_1=2$，$a_2=4$，$a_3=8$，$a_4=16$，$a_5=32$，$a_6=64$，$a_7=128$，$a_8=256$，$a_9=512$，

$\therefore c_1+c_2+\cdots+c_{200}=(b_1+b_2+\cdots+b_{208})-(a_1+a_2+\cdots+a_8)$

$=\frac{208\times(2+416)}{2}-\frac{2\times(1-2^8)}{1-2}$

$=209\times208-(2^9-2)$

$=42\ 962$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17.【解析】(1) 由正弦定理可得 $\frac{\sin C-\sin A}{\sin B}=\sqrt{3}\sin C-\cos C$，

可化为 $\sin C-\sin A=\sqrt{3}\sin B\sin C-\sin B\cos C$，

即 $\sin C-\sin(B+C)=\sqrt{3}\sin B\sin C-\sin B\cos C$，

所以 $\sin C-\sin B\cos C-\sin C\cos B=\sqrt{3}\sin B\sin C-\sin B\cos C$，

因为 $\sin C>0$，所以 $1-\cos B=\sqrt{3}\sin B$，即 $\sin(B+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$， (4 分)

因为 B 为三角形的内角，所以 $\frac{\pi}{6}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$，所以 $B+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$，

所以 $B=\frac{2\pi}{3}$. (6 分)

(2)在$\triangle BCF$中,由正弦定理得$\dfrac{CF}{\sin\angle CBF}=\dfrac{BF}{\sin\angle BCF}$,

可得$\sin\angle CBF=\dfrac{CF\cdot\sin\angle BCF}{BF}$,$\because CF=\sqrt{2}BF$,$\angle BCF=\dfrac{\pi}{6}$,$\therefore\sin\angle CBF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

(7分)

$\therefore\angle CBF=\dfrac{\pi}{4}$,$\therefore\angle ABF=\angle AFB=\dfrac{5\pi}{12}$,$\therefore S_{\triangle ABF}=\dfrac{1}{2}\times2\times2\sin\dfrac{\pi}{6}=1$. (12分)

18.【解析】(1)由$BC=6$,$PB=6\sqrt{3}$,$PC=12$,

可知$BC^2+PB^2=6^2+(6\sqrt{3})^2=12^2$,

所以$\triangle PBC$为直角三角形,且$PB\perp CB$. (2分)

又$BC\perp PD$,$PD\cap PB=P$,$PB\subset$平面PBD,$PD\subset$平面PBD,

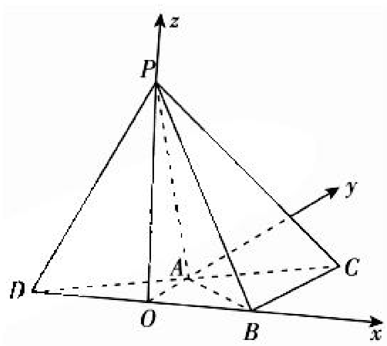
所以$CB\perp$平面PBD. (4分)

又$CB\subset$平面PCB,

所以平面$PCB\perp$平面PBD. (5分)

(2)因为$CB\perp$平面PBD,$CB\subset$平面DCB,所以平面$DCB\perp$平面PBD.如图,取BD的中点O,连接PO,因为$\triangle PDB$为等边三角形,所以$PO\perp DB$,则$PO\perp$平面DCB. (6分)

如图,以O为坐标原点,OB所在直线为x轴,OA所在直线为y轴,OP所在直线为z轴建立空间直角坐标系,



则$O(0,0,0)$,$P(0,0,9)$,$B(3\sqrt{3},0,0)$,$A(0,3,0)$,

所以$\overrightarrow{AB}=(3\sqrt{3},-3,0)$,$\overrightarrow{AP}=(0,-3,9)$. (7分)

设平面PAB的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}3\sqrt{3}x-3y=0,\\ -3y+9z=0,\end{cases}$令$x=1$,则$\boldsymbol{n}=\left(1,\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, (9分)

$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{OA}=(0,6,0)$,

设BC与平面PAB所成角的大小为θ,

所以$\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BC}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{\dfrac{13}{3}}}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$, (11分)

故BC与平面PAB所成角的正弦值为$\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$. (12分)

19.【解析】(1)由题意可知$\frac{p}{2}\cdot 2=\sqrt{2}\times\sqrt{2}$，$\therefore p=2$， (2分)

$\therefore$抛物线C的方程为$y^2=4x$. (3分)

(2)由(1)可知焦点F的坐标为$(1,0)$， (4分)

当直线l的斜率不存在时，易得不满足条件； (5分)

当直线l的斜率存在时，设直线l的方程为$y=k(x-1)$.

由$\begin{cases}y=k(x-1),\\y^2=4x,\end{cases}$

得$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则$x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}$，$x_1x_2=1$. (7分)

则$y_1+y_2=\frac{4}{k}$，$y_1y_2=-4$.

又$M(-1,1)$. (8分)

$\therefore\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1+1,y_1-1)\cdot(x_2+1,y_2-1)=x_1x_2+x_1+x_2+1+y_1y_2-(y_1+y_2)+1=1+\frac{2k^2+4}{k^2}+1-4-\frac{4}{k}+1=0$， (10分)

解得$k=2$，故直线l的斜率为2. (12分)

20.【解析】(1)根据已知，随机抽取的一天中日销售额在(1 100，1 700)之内的概率为0.997 4，抽取n天，日销售额全在(1 100，1 700)之内的概率为$0.997\ 4^n$，则至少有一天日销售额不在(1 100，1 700)之内的概率为$1-0.997\ 4^n$. (2分)

所以$1-0.997\ 4^n\approx 0.025\ 7$，即$0.997\ 4^n\approx 0.974\ 3$，所以$n=10$. (3分)

(2)有10人次参与抽奖，恰有6人次得到100元的概率为$f(p)=C_{10}^6p^6(1-p)^4$， (4分)

则$f'(p)=C_{10}^6[6p^5(1-p)^4-4p^6(1-p)^3]=(1-p)^3p^5C_{10}^6(6-10p)$，

当$0<p<\frac{3}{5}$时，$f(p)$单调递增，当$\frac{3}{5}<p<1$时，$f(p)$单调递减，所以当$p=\frac{3}{5}$时，$f(p)$最大，所以$f(p)$的最大值点为$p_0=\frac{3}{5}$. (6分)

由题意知$p=\frac{3}{5}$，X的所有可能取值为100，150，200， (7分)

则$P(X=100)=C_2^0\times\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$，$P(X=150)=C_2^1\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{25}$，

$P(X=200)=C_2^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$， (9分)

所以X的分布列为

X	100	150	200
P	$\frac{4}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{9}{25}$

$E(X)=100\times\frac{4}{25}+150\times\frac{12}{25}+200\times\frac{9}{25}=160$，（11 分）

所以这 10 天里，鲜花店老板需要拿出的抽奖金额的期望是 $10\times5E(X)=50\times160=8\,000$（元）.（12 分）

21.【解析】(1)令 $g(x)=|\ln x|-f(x)=|\ln x|-\frac{x+1}{e^{2x}}$，$x\in(0,+\infty)$，

①当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\ln x>0$，则 $g(x)=\ln x-\frac{x+1}{e^{2x}}$，

所以 $g'(x)=e^{-2x}\left(\frac{e^{2x}}{x}+2x+1\right)$，因为 $e^{-2x}>0$，$2x+1>0$，$\frac{e^{2x}}{x}>0$，

所以 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $g(1)=-\frac{2}{e^2}<0$，$g(e)=1-\frac{e-1}{e^{2e}}>0$.

根据零点存在性定理，知 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上存在唯一零点.（2 分）

②当 $x\in(0,1)$ 时，$\ln x<0$，则 $g(x)=-\ln x-\frac{x+1}{e^{2x}}$，

所以 $g'(x)=-\frac{1}{x}+\frac{2x+1}{e^{2x}}$，因为 $g''(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{4x}{e^{2x}}>0$，

所以 $g'(x)$ 单调递增，则 $g'(x)<g'(1)=-1+\frac{3}{e^2}<0$，

因此 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.（4 分）

因为 $g(1)=-\frac{2}{e^2}<0$，$g\left(\frac{1}{2}\right)=\ln2-\frac{\frac{3}{2}}{e}=\frac{e\ln2-\frac{3}{2}}{e}>0$.

根据零点存在性定理，知 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上存在唯一零点.

$x=1$ 显然不是 $g(x)$ 的根.

综上所述，关于 x 的方程 $|\ln x|=f(x)$ 根的个数是 2.（5 分）

(2)①要证 $x\in[0,1]$ 时，$(1+x)e^{-2x}\geqslant1-x$，只需证明 $(1+x)e^{-x}\geqslant(1-x)e^{x}$.（6 分）

记 $h(x)=(1+x)e^{-x}-(1-x)e^{x}$，则 $h'(x)=x(e^{x}-e^{-x})$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，因此 $h(x)$ 在 $[0,1]$ 上是增函数，故 $h(x)\geqslant h(0)=0$，

所以 $f(x)\geqslant1-x$，$x\in[0,1]$.（8 分）

②$1-x-F(x)=(1-x)-\frac{x^3}{2}+3x-2x\cos x-1$

$=-x-\frac{x^3}{2}+3x-2x\cos x=-x\left(-2+\frac{x^2}{2}+2\cos x\right)$，（9 分）

设 $G(x)=-2+\frac{x^2}{2}+2\cos x$，$\therefore G'(x)=x-2\sin x$，

所以当 $x\in[0,1]$ 时，$G''(x)=1-2\cos x<0$，于是 $G'(x)$ 在 $[0,1]$ 上是减函数，（10 分）

从而当 $x\in(0,1)$ 时，$G'(x)<G'(0)=0$，故 $G(x)$ 在 $[0,1]$ 上是减函数，

于是 $G(x)\leqslant G(0)=0$，

故 $1-x-F(x)=-x\left(-2+\frac{x^2}{2}+2\cos x\right)\geqslant 0$,

综合以上可得当 $x\in[0,1]$ 时,$f(x)\geqslant 1-x\geqslant F(x)$. (12 分)

(二)选考题:共 10 分.请考生在 22、23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做第一题计分.

22.【解析】(1)由 $y=\frac{2(1-k^2)}{1+k^2}$,得 $\frac{y}{2}=-1+\frac{2}{1+k^2}$,即 $\frac{y}{2}+1=\frac{2}{1+k^2}$, (2 分)

又 $x+1=\frac{4k}{1+k^2}$,两式相除得 $k=\frac{x+1}{y+2}$,代入 $x+1=\frac{4k}{1+k^2}$,

得 $\dfrac{4\times\frac{x+1}{y+2}}{1+\left(\frac{x+1}{y+2}\right)^2}=x+1$, (4 分)

整理得 $(x+1)^2+y^2=4(y\neq -2)$,即为 C_1 的普通方程. (5 分)

(2)曲线 C_2 的极坐标方程 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=a$ 化为直角坐标方程为 $x+y-\sqrt{2}a=0$, (6 分)

则圆 C_1 的圆心 $(-1,0)$ 到直线 $x+y-\sqrt{2}a=0$ 的距离为 $d=\frac{|-1-\sqrt{2}a|}{\sqrt{2}}$, (8 分)

则 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-\frac{(1+\sqrt{2}a)^2}{2}}=\sqrt{14}$,得 $a=0$ 或 $-\sqrt{2}$. (10 分)

23.【解析】(1)$\because a^2+b^2\geqslant 2ab$,$\therefore 2(a^2+b^2)\geqslant a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, (2 分)

即 $a^2+b^2\geqslant\frac{(a+b)^2}{2}$,两边开平方得 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}|a+b|=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$, (3 分)

同理可得 $\sqrt{b^2+c^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(b+c)$,$\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(c+a)$,

三式相加,得 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)=\sqrt{2}M$,

当且仅当 $a=b=c$ 时,等号成立,所以 $M=1$. (5 分)

(2)由(1)可知求不等式 $|3x+3|+|x-2|>4$ 的解集,

当 $x\leqslant -1$ 时,原不等式等价于 $-(3x+3)+(2-x)>4$,解得 $x<-\frac{5}{4}$, (7 分)

当 $-1<x<2$ 时,原不等式等价于 $(3x+3)+(2-x)>4$,解得 $-\frac{1}{2}<x<2$, (8 分)

当 $x\geqslant 2$ 时,原不等式等价于 $(3x+3)+(x-2)>4$,解得 $x\geqslant 2$, (9 分)

综上所述,原不等式的解集为 $\left(-\infty,-\frac{5}{4}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》