

## 绵阳南山中学 2023 年春高三入学考试数学参考答案 (文科)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	A	B	B	B	C	A	B	C	D	C

1. 【详解】 $\because$  集合  $A = \{x | x < 1\}$ ,  $B = \{x | \log_2 x < 1\} = \{x | 0 < x < 2\}$ ,  $\therefore A \cap B = \{x | 0 < x < 1\}$ , 故 A 错误, D 正确;  $A \cup B = \{x | x < 2\}$ , 故 B, C 错误. 故选: D.

2. 【详解】因为复数  $z$  对应点的坐标为  $(1, -1)$ , 所以  $z = 1 - i$ , 所以  $\frac{z}{1+i} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{-2i}{2} = -i$ .

故选: B.

3. 【详解】因为  $f(x) = \left(1 - \frac{2}{1+e^x}\right) \sin x = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \sin x$ , 定义域为  $\mathbb{R}$ , 又

$f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} \sin(-x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \sin x = f(x)$ , 所以  $f(x)$  是偶函数, 图象关于  $y$  轴对称, 故排除 CD,

又当  $x \in (0, \pi)$  时,  $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} > 0, \sin x > 0, f(x) > 0$ , 故排除 B. 故选: A.

4. 【详解】“金、石”为打击乐器共 2 种, “匏、竹”为吹奏乐器共 2 种, “丝”为弹拨乐器, 共 1 种, 5 选 2 的基本事件有 (金、石) (金、匏) (金、竹) (金、丝) (石、匏) (石、竹) (石、丝) (匏、竹) (匏、丝) (竹、丝), 共 10 种情况, 其中恰安排了 1 个课程为吹奏乐器、1 个课程为打击乐器的基本事件为 (金、匏) (金、竹) (石、匏) (石、竹), 共 4 种, 故所求概率为  $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ . 故选: B.

5. 【详解】 $\ln \frac{a}{b} > 0$ , 则  $\frac{a}{b} > 1$ , 当  $a = -2, b = -1$  时, 满足  $\frac{a}{b} > 1$ , 但此时  $\ln a, \ln b$  无意义, 故充分性不成立, 若  $\ln a > \ln b$ , 则  $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} > 0$ , 故必要性成立, 则 “ $\ln \frac{a}{b} > 0$ ” 是 “ $\ln a > \ln b$ ” 的必要不充分条件. 故选: B.

6. 【详解】因为  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , 所以  $1 - 4 \cos 2\alpha = \sin \alpha (3 \sin \alpha - 2)$ ,  $1 - 4(1 - 2 \sin^2 \alpha) = 3 \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha$ ,

$5 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha - 3 = 0$ , 所以  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  或  $\sin \alpha = -1$ , 又  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 所以  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,

所以  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ , 所以  $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha} = \frac{\frac{3}{4} - 1}{1 + \frac{3}{4}} = -\frac{1}{7}$ . 故选: B.

7. 【详解】 $f(x) = \sin x (\sin x - \sqrt{3} \cos x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$ .

将其图象向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位得到  $g(x) = -\sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{6}\right] + \frac{1}{2} = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$  的图象:

对 A:  $g(x)$  的最小正周期  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ , 故 A 错误;

对 B: 当  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$  时,  $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}\right]$ , 此时  $g(x)$  不是单调函数, 故 B 错误;

对 C:  $g\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$  为函数最小值, 故  $x = \frac{\pi}{12}$  是  $g(x)$  的对称轴, C 正确;

对 D:  $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \neq 0$ , 故  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  不是  $g(x)$  的对称中心, D 错误. 故选: C.

8. 【详解】由题意可得,  $\begin{cases} f(0)=1.5 \\ f(2)=4.5 \end{cases}$ , 则  $\begin{cases} \frac{6}{1+3^b}=1.5 \\ \frac{6}{1+3^{2+b}}=4.5 \end{cases}$ , 解得  $b=1, k=-1$ , 所以  $f(x) = \frac{6}{1+3^{-x+1}}, x \in \mathbb{N}$ ,

由函数的解析式可得,  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增, 且  $f(3) = \frac{6}{1+3^{-2}} = 5.4$ , 故该果树的高度不低于 5.4m,

至少需要 3 年. 故选: A.

9. 【详解】由线面平行的性质定理可知, A 正确; 若  $m \parallel \alpha, m \parallel n$ , 则  $n \parallel \alpha$  或  $n \subseteq \alpha$ , 即 B 错误;

设  $\alpha, \beta$  的法向量分别为  $\vec{a}, \vec{b}$ , 若  $\alpha \cap \beta = n$ , 则  $n \perp \vec{a}, n \perp \vec{b}$ , 又  $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$ , 则  $\vec{a} \parallel \gamma, \vec{b} \parallel \gamma$ , 所

以  $n \perp \gamma$ , 即 C 正确; 若  $m \perp \alpha, m \perp \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$ , 又  $\alpha \parallel \gamma$ , 则  $\beta \parallel \gamma$ , 即 D 正确. 故选: B

10. 【详解】如图, 过点 B 作 BD 垂直准线  $x = -2$  于点 D, 则由抛物线定义可知:  $|BF| = |BD| = 3$ ,

设直线 AB 为  $x = my + 4$ ,  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(-2, y_c)$ , 不妨设  $m > 0$ , 则  $y_1 > 0, y_2 < 0$ ,

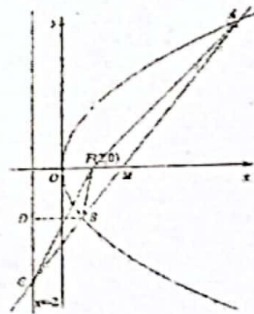
所以  $x_2 + 2 = 3$ . 解得:  $x_2 = 1$ , 则  $y_2^2 = 8x_2 = 8$ , 解得:  $y_2 = -2\sqrt{2}$ , 则  $B(1, -2\sqrt{2})$ ,

所以  $-2\sqrt{2}m + 4 = 1$ , 解得:  $m = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ , 则直线 AB 为  $x = \frac{3\sqrt{2}}{4}y + 4$ ,

所以当  $x = -2$  时, 即  $\frac{3\sqrt{2}}{4}y + 4 = -2$ , 解得:  $y_c = -4\sqrt{2}$ , 则  $C(-2, -4\sqrt{2})$ ,

联立  $x = my + 4$  与  $y^2 = 8x$  得:  $y^2 - 8my - 32 = 0$ , 则  $y_1 y_2 = -32$ ,

所以  $y_1 = 8\sqrt{2}$ , 其中  $\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}} = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_c}{y_1 - y_c} = \frac{2\sqrt{2}}{12\sqrt{2}} = \frac{1}{6}$ . 故选: C



11. 【详解】依题意得, 以线段  $F_1 F_2$  为直径的圆的方程为  $x^2 + y^2 = c^2$ , 双曲线 C 的一条渐近线的

方程为  $y = \frac{b}{a}x$ . 由  $\begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ x^2 + y^2 = c^2 \end{cases}$  以及  $a^2 + b^2 = c^2$ , 解得  $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$  或  $\begin{cases} x = -a \\ y = -b \end{cases}$ . 不妨取  $M(a, b)$ , 则

$N(-a, -b)$ . 因为  $A(-a, 0), \angle MAN = 135^\circ$ , 所以  $\angle MAO = 45^\circ$ , 又  $\tan \angle MAO = \frac{b}{2a}$ , 所以  $1 = \frac{b}{2a}$ ,

所以  $b = 2a$ , 所以该双曲线的离心率  $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{5}$ . 故选: D.

12. 【详解】令函数  $f(x) = x - \ln x$ , 则  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ ,

当  $x > 1$  时,  $f'(x) > 0$ , 函数  $f(x)$  单调递增, 当  $0 < x < 1$  时,  $f'(x) < 0$ , 函数  $f(x)$  单调递减,

所以  $f(5) > f(4) > f(3)$ , 所以  $5 - \ln 5 > 4 - \ln 4 > 3 - \ln 3$ ,

因为  $a - 5 = \ln \frac{a}{5} = \ln a - \ln 5 < 0$ ,  $b - 4 = \ln \frac{b}{4} = \ln b - \ln 4 < 0$ ,  $c - 3 = \ln \frac{c}{3} = \ln c - \ln 3 < 0$ ,

所以  $a - \ln a = 5 - \ln 5$ ,  $b - \ln b = 4 - \ln 4$ ,  $c - \ln c = 3 - \ln 3$ ,

所以  $a - \ln a > b - \ln b > c - \ln c$ , 即  $f(a) > f(b) > f(c)$ ,

因为  $a - 5 = \ln a - \ln 5 < 0$ , 可得  $a < 5$ , 又因为  $f(a) = f(5)$ , 则  $0 < a < 1$ ,

同理  $f(b) = f(4)$ ,  $f(c) = f(3)$ , 所以  $0 < b < 1$ ,  $0 < c < 1$ ,

因为当  $0 < x < 1$  时,  $f'(x) < 0$ , 函数  $f(x)$  单调递减, 所以  $c > b > a$ . 故选: C.

13. 【答案】 -1 【详解】  $f\left(\frac{2021}{2}\right) = f\left(1010 + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ . 故答案为: -1

14. 【答案】  $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$  【解析】  $\because y = (x+a)e^x, \therefore y' = (x+1+a)e^x$ ,

设切点为  $(x_0, y_0)$ , 则  $y_0 = (x_0 + a)e^{x_0}$ , 切线斜率  $k = (x_0 + 1 + a)e^{x_0}$ ,

切线方程为:  $y - (x_0 + a)e^{x_0} = (x_0 + 1 + a)e^{x_0}(x - x_0)$ .

$\because$  切线过原点,  $\therefore -(x_0 + a)e^{x_0} = (x_0 + 1 + a)e^{x_0}(-x_0)$ , 整理得:  $x_0^2 + ax_0 - a = 0$ ,

$\because$  切线有两条,  $\therefore \Delta = a^2 + 4a > 0$ , 解得  $a < -4$  或  $a > 0$ ,  $\therefore a$  的取值范围是  $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ ,

故答案为:  $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

15. 【答案】  $24\pi$  【详解】解: 由题意, 画出示意图如图: 则正方形  $ABCD$  面积  $S = 4$ ,

$\therefore$  四棱锥  $P-ABCD$  的体积  $V = \frac{1}{3}S \cdot PA = \frac{1}{3} \times 4 \times PA = \frac{16}{3}$ ,  $\therefore PA = 4$ ,

$AC = \sqrt{2}AB = 2\sqrt{2}$ ,  $PC = \sqrt{AC^2 + AP^2} = 2\sqrt{6}$

球  $O$  的半径  $R = \frac{1}{2}PC = \sqrt{6}$

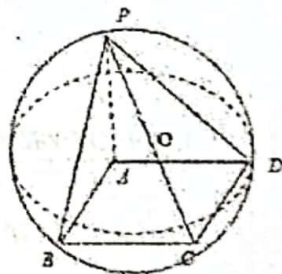
球  $O$  的表面积:  $S = 4\pi R^2 = 24\pi$ . 故答案为:  $24\pi$

16. 【详解】①: 由  $l_2: mx - y - m + 3 = 0 \Rightarrow m(x-1) + (3-y) = 0$ ,

有  $\begin{cases} x-1=0 \\ 3-y=0 \end{cases} \Rightarrow x=1, y=3$ , 所以直线过的定点为  $(1, 3)$ , 故①正确;

②: 由圆的标准方程可得圆心为  $C(2, 4)$ , 半径  $r = \sqrt{3}$ , 直线  $l_2$  过的定点为  $B(1, 3)$ , 当  $l_2 \perp CB$  时所得弦长最短, 则  $k_{l_2} \cdot k_{CB} = -1$ , 又  $k_{l_2} = m$ ,  $k_{CB} = 1$ , 所以  $m = -1$ , 得

$l_2: x + y - 4 = 0$ , 则圆心到直线  $l_2$  的距离为  $d = \frac{|2+4-4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ , 所以弦长为:  $2\sqrt{r^2 - d^2} = 2$ , 故②正确;



③: 当  $m=0$  时,  $l_1: x=0, l_2: y=3$ , 则点  $P(0,3)$ , 此时点  $P$  在圆  $C$  外:

当  $m \neq 0$  时, 由直线  $l_1$  得  $m = -\frac{x}{y}$ , 代入直线  $l_2$  中得点  $P$  的方程为

$$\text{圆 } N: (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{5}{2}, \text{ 得 } N(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), \text{ 半径为 } R = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

所以圆心距  $NC = \frac{\sqrt{34}}{2} < \sqrt{3} + \frac{\sqrt{10}}{2} = r + R$ , 所以两圆相交. 故③正确:

④: 由  $l_1: x + my = 0 \Rightarrow A(0,0)$ . 当  $m=0$  时,  $l_1: x=0, l_2: y=3$ , 有  $l_1 \perp l_2$ ,

当  $m \neq 0$  时,  $k_{l_1} = -\frac{1}{m}, k_{l_2} = m$ , 则  $k_{l_1} k_{l_2} = -1$ , 所以  $l_1 \perp l_2$ .

又点  $P$  是两直线的交点, 所以  $PA \perp PB$ , 所以  $|PA|^2 + |PB|^2 = |AB|^2 = 10$ ,

设  $\angle ABP = \theta$ , 则  $|PA| = \sqrt{10} \sin \theta, |PB| = \sqrt{10} \cos \theta$ . 因为  $|PA| \geq 0, |PB| \geq 0$ , 所以  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

所以  $|PA| + |PB| = \sqrt{10}(\sin \theta + \cos \theta) = 2\sqrt{5} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \leq 2\sqrt{5}$ , 故④错误. 故选: ①②③.

17. 【答案】(1) 证明见解析; (2)  $S_n = 2 \ln(n+1)$

【详解】(1) 法 1: 由  $na_{n+1} = (n+1)a_n + n(n+1)$ ,

两边同除以  $n(n+1)$  得,  $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + 1, \frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = 1 (n \geq 1)$  为常数,

$\therefore$  数列  $\left\{ \frac{a_n}{n} \right\}$  为等差数列, 首项  $\frac{a_1}{1} = 1$ , 公差为 1.

法 2: 由  $na_{n+1} = (n+1)a_n + n(n+1)$  得  $a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n + (n+1)$ ,

$\therefore \frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = \left( \frac{a_n}{n} + 1 \right) - \frac{a_n}{n} = 1 (n \geq 1)$  为常数.

$\therefore$  数列  $\left\{ \frac{a_n}{n} \right\}$  为等差数列, 首项  $\frac{a_1}{1} = 1$ , 公差为 1.

(2) 由  $\frac{a_n}{n} = \frac{a_1}{1} + (n-1) \times 1 = n, \therefore a_n = n^2$ .

法 1:  $b_n = \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ln \frac{(n+1)^2}{n^2}$ ,

则  $S_n = \ln \frac{2^2}{1^2} + \ln \frac{3^2}{2^2} + \dots + \ln \frac{(n+1)^2}{n^2} = 2 \ln \left( \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{n+1}{n} \right) = 2 \ln(n+1)$ .

法 2:  $b_n = \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ln \frac{(n+1)^2}{n^2} = \ln(n+1)^2 - \ln n^2$ ,

则  $S_n = (\ln 2^2 - \ln 1^2) + (\ln 3^2 - \ln 2^2) + \dots + [\ln(n+1)^2 - \ln n^2] = \ln(n+1)^2 - \ln 1^2 = 2 \ln(n+1)$ .

18. 【解析】(1)由正弦定理知:  $2\sin B \cos C = 2\sin A + \sin C$

又:  $\sin A = \sin(B+C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$ , 代入上式可得:  $2\cos B \sin C + \sin C = 0$

$C \in (0, \pi)$ , 则  $\sin C > 0$ , 故有:  $\cos B = -\frac{1}{2}$ , 又  $B \in (0, \pi)$ , 则  $B = \frac{2\pi}{3}$

故  $\angle B$  的大小为:  $\frac{2\pi}{3}$

(2)若选①: 由  $BD$  平分  $\angle ABC$  得:  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$

则有:  $\frac{1}{2}ac \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} \times 1 \times c \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \times 1 \times a \sin \frac{\pi}{3}$ , 即  $ac = a + c$

在  $\triangle ABC$  中, 由余弦定理可得:  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \frac{2\pi}{3}$ .

又  $b = 2\sqrt{3}$ , 则有:  $a^2 + c^2 + ac = 12$ , 联立  $\begin{cases} ac = a + c \\ a^2 + c^2 + ac = 12 \end{cases}$ , 可得:  $(ac)^2 - ac - 12 = 0$ ,

解得:  $ac = 4$  ( $ac = -3$  舍去), 故  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

若选②: 可得:  $\vec{BD} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BC})$ ,  $|\vec{BD}|^2 = \frac{1}{4}(\vec{BA} + \vec{BC})^2 = \frac{1}{4}(|\vec{BA}|^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{BC} + |\vec{BC}|^2)$

$1 = \frac{1}{4}(c^2 + 2ac \cos \frac{2\pi}{3} + a^2)$ , 可得:  $a^2 + c^2 - ac = 4$

在  $\triangle ABC$  中, 由余弦定理可得:  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \frac{2\pi}{3}$ , 即  $a^2 + c^2 + ac = 12$

联立  $\begin{cases} a^2 + c^2 - ac = 4 \\ a^2 + c^2 + ac = 12 \end{cases}$ , 解得:  $ac = 4$ , 故  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ .

19. 【解析】(1) 记  $x' = x - 12$ ,  $y' = y - 86$ , 将统计的最后三组数据进行处理得到下表,

$x'$	-1	0	1
$y'$	-1	0	4

此时  $\bar{x}' = \frac{-1+0+1}{3} = 0$ ,  $\bar{y}' = \frac{-1+0+4}{3} = 1$ ,  $\hat{b} = \frac{1+4-3 \times 0 \times 1}{1+1-3 \times 0} = \frac{5}{2}$ ,  $\hat{a} = \bar{y}' - \hat{b} \cdot \bar{x}' = 1 - \frac{5}{2} \times 0 = 1$ ,

所以  $\hat{y} - 86 = \frac{5}{2}(x - 12) + 1$ , 故  $\hat{y} = \frac{5}{2}x + 57$ ;

(2) 当  $x = 8$  时,  $\hat{y} = 77$ ,  $79 - 77 = 2 \leq 2$ , 当  $x = 10$  时,  $\hat{y} = 82$ ,  $82 - 81 = 1 < 2$ .

所以 (1) 中得到的线性回归方程是可靠的;

(3) 当  $x = 9$  时,  $\hat{y} = 79.5$ , 此时发芽率  $n\% = 79.5\%$ , 即  $n = 79.5$ .

因为该农场有土地 10 万公顷, 所以估计该农场种植小麦的收益为  $79.5 \times 150 \times 10 = 119250$  (万元).

20. 【解析】(1) 由题意得  $c = \sqrt{3}$ . 又点  $C(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$  在椭圆  $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  上, 所以  $\frac{3}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1$ ,

且  $a^2 - b^2 = 3$ , 所以  $a = 2, b = 1$ , 故椭圆  $M$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

设点  $P(x, y)$ , 由  $A(\sqrt{3}, 0), B(-\sqrt{3}, 0)$  得  $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = x^2 - 3 + y^2 = x^2 - 3 + 1 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} - 2$ .

又  $x \in [-2, 2]$ , 所以  $\overline{PA} \cdot \overline{PB} \in [-2, 1]$ .

(2) 设过点  $B$  且斜率为  $k$  的直线方程为  $y = k(x - \sqrt{3})$ .

联立椭圆  $M$  方程得  $(1 + 4k^2)x^2 - 8\sqrt{3}k^2x + 12k^2 - 4 = 0$ .

设两点  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ , 故  $x_1 + x_2 = \frac{8\sqrt{3}k^2}{1 + 4k^2}, x_1x_2 = \frac{12k^2 - 4}{1 + 4k^2}$ .

因为  $k_1 + k_2 = \frac{y_1 - \frac{1}{2}}{x_1 - \sqrt{3}} + \frac{y_2 - \frac{1}{2}}{x_2 - \sqrt{3}} = \frac{(y_1 + y_2) - \sqrt{3}(y_1 + y_2) - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \sqrt{3}}{x_1x_2 - \sqrt{3}(x_1 + x_2) + 3}$ ,

其中  $y_1x_2 + x_1y_2 = 2kx_1x_2 - \sqrt{3}k(x_1 + x_2) = \frac{-8k}{1 + 4k^2}, y_1 + y_2 = \frac{-2\sqrt{3}k}{1 + 4k^2}$ .

故  $k_1 + k_2 = \frac{\frac{-8k}{1 + 4k^2} + \frac{6k}{1 + 4k^2} - \frac{4\sqrt{3}k^2}{1 + 4k^2} + \sqrt{3}}{\frac{12k^2 - 4}{1 + 4k^2} - \frac{24k^2}{1 + 4k^2} + 3} = 2k - \sqrt{3}$ , 所以  $k_1 + k_2 - 2k = -\sqrt{3}$  为定值.

21. 【解析】(1) 由题意知:  $f(x)$  定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x) = \ln x + \frac{m}{x} + 1$ ,

令  $g(x) = f'(x) = \ln x + \frac{m}{x} + 1$ , 则  $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{m}{x^2} = \frac{x - m}{x^2}$ .

当  $m \leq 0$  时,  $g'(x) > 0$  恒成立,  $\therefore f'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增;

当  $m > 0$  时, 若  $x \in (0, m)$ ,  $g'(x) < 0$ ; 若  $x \in (m, +\infty)$ ,  $g'(x) > 0$ ;

$\therefore f'(x)$  在  $(0, m)$  上单调递减, 在  $(m, +\infty)$  上单调递增;

综上所述: 当  $m \leq 0$  时,  $f'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增;

当  $m > 0$  时,  $f'(x)$  在  $(0, m)$  上单调递减, 在  $(m, +\infty)$  上单调递增.

(2) 由 (1) 知:  $\ln x + \frac{m}{x} + 1 > \frac{m}{3} + 2$  对  $\forall x > 1$  恒成立, 即  $\ln x + \frac{m}{x} - \frac{m}{3} - 1 > 0$  对  $\forall x > 1$  恒成立,

令  $h(x) = \ln x + \frac{m}{x} - \frac{m}{3} - 1$ , 则  $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{m}{x^2} = \frac{x - m}{x^2}$ ;

① 当  $m \leq 0$  且  $m \in \mathbb{Z}$  时,  $h'(x) > 0$ ,  $\therefore h(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增,

$\therefore h(x) > h(1) = \frac{2m}{3} - 1 \geq 0$ , 解得:  $m \geq \frac{3}{2}$  (舍);

②当  $0 < m \leq 1$  且  $m \in \mathbb{Z}$ , 即  $m=1$  时,  $h(\sqrt{e}) = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{5}{6} < 0$ , 不合题意;

③当  $m > 1$  且  $m \in \mathbb{Z}$  时, 若  $x \in (1, m)$ ,  $h'(x) < 0$ ; 若  $x \in (m, +\infty)$ ,  $h'(x) > 0$ ;

$\therefore h(x)$  在  $(1, m)$  上单调递减, 在  $(m, +\infty)$  上单调递增,  $\therefore h(x)_{\min} = h(m) = \ln m - \frac{m}{3} \geq 0$ ;

令  $F(m) = \ln m - \frac{m}{3}$ , 则  $F'(m) = \frac{1}{m} - \frac{1}{3} = \frac{3-m}{3m}$ ;

$\therefore$  当  $m \in (1, 3)$  时,  $F'(m) > 0$ ; 当  $m \in (3, +\infty)$  时,  $F'(m) < 0$ ;

$\therefore F(m)$  在  $(1, 3)$  上单调递增, 在  $(3, +\infty)$  上单调递减;

又  $F(2) = \ln 2 - \frac{2}{3} > 0$ ,  $F(3) = \ln 3 - 1 > 0$ ,  $F(4) = \ln 4 - \frac{4}{3} = 2\ln 2 - \frac{4}{3} > 0$ ,  $F(5) = \ln 5 - \frac{5}{3} < 0$ ,

$\therefore$  满足  $F(m) \geq 0$  且  $m > 1$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  的所有整数为 2, 3, 4;

综上所述:  $m$  的所有值为 2, 3, 4.

22. 【解析】(1) 将直线  $l$  的参数方程  $\begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases}$  中的参数  $t$  消去, 得  $x - \sqrt{3}y - 2 = 0$ ;

$\rho^2 = \frac{6}{2 + \sin^2 \theta}$  即为  $12\rho^2 + (\rho \sin \theta)^2 = 6$ ,

把  $\rho^2 = x^2 + y^2$ ,  $\rho \sin \theta = y$  代入, 得  $2(x^2 + y^2) + y^2 = 6$ ,

即曲线  $C$  的直角坐标方程为  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ .

所以直线  $l$ :  $x - \sqrt{3}y - 2 = 0$ ,  $C$ :  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ ;

(2) 易知点  $M(2, 0)$  在直线  $l$  上, 把直线  $l$  的参数方程  $\begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases}$  ( $t$  为参数),

代入  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ , 整理得  $9t^2 + 16\sqrt{3}t + 8 = 0$ .  $\Delta = (16\sqrt{3})^2 - 4 \times 9 \times 8 > 0$ ,

设直线  $l$  与曲线  $C$  的交点  $A, B$  对应的参数分别为  $t_1, t_2$ ,

则  $t_1 + t_2 = -\frac{16\sqrt{3}}{9}$ ,  $t_1 t_2 = \frac{8}{9}$ , 得  $t_1, t_2$  同号,

所以  $\frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|} = \frac{1}{|t_1|} + \frac{1}{|t_2|} = \frac{|t_1| + |t_2|}{|t_1 t_2|} = \frac{|t_1 + t_2|}{|t_1 t_2|} = 2\sqrt{3}$ .

23. 【解析】(1)  $\because a+b=2$ , 则  $b=2-a>0$ , 可得  $0<a<2$ .

$$\therefore (a+2)^2 + (b+1)^2 = (a+2)^2 + (3-a)^2 = 2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}.$$

又  $\because y = 2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}$  开口向上, 对称轴为  $a = \frac{1}{2}$ .

$$\therefore \text{当 } a = \frac{1}{2} \text{ 时, } 2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{2} = \frac{25}{2}; \text{ 当 } a = 2 \text{ 时, } 2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{2} = 17.$$

$$\text{故 } \frac{25}{2} \leq (a+2)^2 + (b+1)^2 < 17.$$

$$(2) \because (\sqrt{a+3} + \sqrt{b+3})^2 \leq 2[(\sqrt{a+3})^2 + (\sqrt{b+3})^2] = 2(a+b+6) = 16,$$

当且仅当  $\sqrt{a+3} = \sqrt{b+3}$ , 即  $a=b=1$  时等号成立;

$$\therefore \sqrt{a+3} + \sqrt{b+3} \leq 4,$$

$$\text{又 } \because |3x+m+1| + |3x-m-1| \geq |(3x+m+1) - (3x-m-1)| = 2|m+1|,$$

当且仅当  $(3x+m+1)(3x-m-1) \leq 0$  时等号成立.

$$\therefore 2|m+1| \geq 4, \text{ 解得 } m \geq 1 \text{ 或 } m \leq -3.$$

故  $m$  的取值范围为  $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$ .