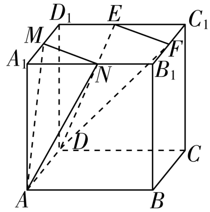
高 二 数 学 答 案

一、选择题

1. A 2. B 3. B 4. C 5. D 6. B 7. C 8. A



7. 解析：如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AN/\!/DE$，$MN/\!/EF$.

$\because AN\cap MN=N$，

$EF\cap DE=E$，

$AN,MN\subset$面 AMN，$EF,DE\subset$面 EFD，

$\therefore$ 面 $AMN/\!/$面 EFD，

$\therefore$ 面 AMN 与面 EFD 的距离即为点 D 到面 AMN 的距离.

令点 D 到面 AMN 的距离为 h.

利用等体积法，有 $V_{D-AMN}=V_{N-MAD}$.

$V_{D-AMN}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}\times h=2h$，

$V_{N-MAD}=\frac{1}{3}\times2\times\frac{1}{2}\times4\times4=\frac{16}{3}$，

则 $2h=\frac{16}{3}$，$\therefore h=\frac{8}{3}$.

$\therefore$ 面 AMN 与面 EFD 的距离为$\frac{8}{3}$.

8. 解析：设 $B(x_0,y_0)$，$P(x_1,y_1)$，

$\because$ 点 B,C 关于 y 轴对称，

$\therefore$ 点 C 的坐标为$(-x_0,y_0)$.

$\because$ 点 B,C,P 均为圆上一点，

$\therefore x_0^2+y_0^2=4$，

$x_1^2+y_1^2=4$，

直线 PB 的方程 $C_{PB}:y-y_1=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_1)$，

直线 PC 的方程 $C_{PC}:y-y_1=\frac{y_1-y_0}{x_1+x_0}(x-x_1)$，

令 $x=0$，则 M 点的纵坐标为 $y=\frac{x_1y_0-x_0y_1}{x_1-x_0}$，

N 点的纵坐标为 $y=\frac{x_0y_1+x_1y_0}{x_1+x_0}$，

$\therefore M\left(0,\dfrac{x_1y_0-x_0y_1}{x_1-x_0}\right),N\left(0,\dfrac{x_0y_1+x_1y_0}{x_1+x_0}\right)$,

$|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{ON}|=\dfrac{x_1y_0-x_0y_1}{x_1-x_0}\cdot\dfrac{x_0y_1+x_1y_0}{x_1+x_0}=\dfrac{4x_1^2-4x_0^2}{x_1^2-x_0^2}=4.$

二、选择题

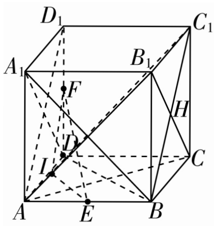
9. ABC

10. AD

11. CD

12. BCD

12. 解析:A. C_1D_1 在平面 ABH 上.



B. 连接 BD,AC,AB_1,A_1B,AC_1,

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

$AC\perp BD,CC_1\perp$面 $ABCD$,

$\therefore CC_1\perp BD.$

$\because AC\cap CC_1=C$,

$AC,CC_1\subset$面 ACC_1,

$\therefore BD\perp$面 ACC_1,

又 $AC_1\subset$面 ACC_1,

$\therefore AC_1\perp BD.$

又$\because A_1B\perp AB_1,B_1C_1\perp$面 ABB_1A_1,

$\therefore B_1C_1\perp A_1B.$

$\because AB_1\cap B_1C_1=B_1,AB_1,B_1C_1\subset$面 AB_1C_1,

$\therefore A_1B\perp$面 AB_1C_1,

$\therefore A_1B\perp AC_1.$

又 $AC_1\perp BD$,

$A_1B\cap BD=B,A_1B,BD\subset$面 A_1BD,

$\therefore AC_1\perp$面 BDA_1.

C. 取 AD 中点 I,连接 FI,EF,EI,AD_1,

在$\triangle ADD_1$ 中,$\because F,I$ 分别为 DD_1,DA 的中点,

$\therefore FI/\!/AD_1$,

又 $AD_1/\!/BC_1$,

$\therefore FI/\!/BC_1$,

$\therefore EF$ 与 BC_1 所成角为$\angle IFE$,

在$\triangle IFE$ 中,$IF=\sqrt{2},EI=\sqrt{2},EF=\sqrt{6}$,

$\therefore \cos\angle IFE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore EF$ 与 BC_1 所成的角为 $30°$.

D. 当 G 位于 A_1 点时，三棱椎 $G-DBC_1$ 的体积最大，

此时三棱锥 $G-DBC_1$ 为正三棱锥，

$\therefore S_{\triangle BDC_1}=2\sqrt{3}$，

故 $V_{G-DBC_1}=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{3}\times\frac{4}{3}\sqrt{3}=\frac{8}{3}$.

三、填空题

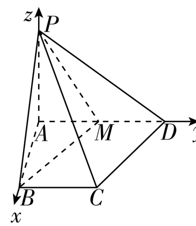
13. $4x+y=0$ 或 $x+3y=0$

14. $(x+1)^2+(y+1)^2=1$

15. 11

16. $\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{4}{3}$

16. 解析：$\because PA\perp$ 面 $ABCD$，



AB，$AD\subset$ 面 $ABCD$，

$\therefore PA\perp AB$，$PA\perp AD$.

又$\because \angle BAD=\frac{\pi}{2}$，$\therefore BA\perp AD$，

$\therefore PA$，AB，AD 两两垂直.

$\therefore$ 以 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴，AD 所在直线为 y 轴，AP 所在直线为 z 轴建立空间直角坐标系，如图所示.

则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,4,0)$，$P(0,0,4)$，

$\overrightarrow{PA}=(0,0,-4)$，$\overrightarrow{PB}=(2,0,-4)$，$PC=(2,2,-4)$，$\overrightarrow{PD}=(0,4,-4)$，

设 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$ 分别为面 PAB 与面 PCD 的法向量，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-4z_1=0,\\ 2x_1-4z_1=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}=(0,1,0)$，

$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x_2+2y_2-4z_2=0,\\ 4y_2-4z_2=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{m}=(1,1,1)$，

则 $\cos<\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}>=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

设平面 PAB 与平面 PCD 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$ 平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

如图，取 AD 中点 M，连接 BM，PM，

$\because BC\parallel MD$，$BC=MD$，

$\therefore$ 四边形 $BCDM$ 为平行四边形，

$\therefore CD /\!/ BM$,

$\because BM \subset$ 面 PBM, $CD \not\subset$ 面 PBM,

$\therefore CD /\!/$ 面 PBM,

$\therefore PB$ 与 CD 的距离为 CD 到面 PBM 的距离,

即点 C 到面 PBM 的距离.

设点 C 到面 PBM 的距离为 h.

由 $V_{P-BCM} = V_{C-PBM}$ 得,

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 4 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}h$,

解得 $h = \frac{4}{3}$,

$\therefore$ 异面直线 PB 与 CD 的距离为 $\frac{4}{3}$.

四、解答题

17. 解:(1) $k_{AB} = \frac{-1-4}{7-2} = -1$, 所以直线 AB 的斜率为 -1,

所以过 C 且平行于直线 AB 的直线的方程为

$y-1 = -(x+6)$, 化简得 $y = -x-5$. …………………………………………………… 5 分

(2) 因为直线 AB 的斜率为 -1, 所以直线 CD 的斜率为 1, 所以直线 CD 的方程为 $y-1 = x+6$, 化简得 $y = x+7$. …………………………………………………… 10 分

18. 解:(1) 因为 M 是 PC 的中点,

所以 $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BP})$

$= \frac{1}{2}[\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})]$

$= -\frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}$. …………………………………………………… 5 分

(2) 根据题意可知 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 90° = 0$,

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos 45° = 2$,

$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos 45° = 1$,

$\therefore |\overrightarrow{BM}|^2 = \frac{1}{4}(-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})^2$

$= \frac{1}{4}[\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2 + 2(-\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})]$ …………………………… 10 分

$= \frac{1}{4}[4 + 1 + 2 + 2(0 - 2 + 1)]$

$= \frac{5}{4}$, …………………………………………………… 11 分

所以 $|\overrightarrow{BM}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 所以 BM 的长为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$. …………………………………… 12 分

19. 解:(1)根据题意可知线段 AB 的中点 $E\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$,直线 AB 的斜率为 $k_{AB}=\frac{4-1}{0-3}=-1$,

所以线段 AB 的垂直平分线方程为 $y-\frac{5}{2}=x-\frac{3}{2}$,解得 $x-y+1=0$.

因为圆 C 经过 A,B 两点,所以圆心在线段 AB 的垂直平分线上.

又因为直线 $l:3x-2y=0$ 平分圆 C,所以圆心在直线 l 上.

由 $\begin{cases}x-y+1=0,\\3x-2y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=3,\end{cases}$

所以圆心的坐标为 $C(2,3)$,

又因为圆的半径 $r=|BC|=\sqrt{(3-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{5}$,

所以圆 C 的方程为 $(x-2)^2+(y-3)^2=5$.

(2)存在直线 m 使得 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=8$

设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

将 $y=kx+2$ 代入圆的方程,得 $(1+k^2)x^2-(2k+4)x=0$,

由 $\Delta=(2k+4)^2>0$,得 $k\neq-2$,

所以 $x_1+x_2=\frac{2k+4}{1+k^2}$,$x_1x_2=0$,

所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+2)(kx_2+2)=k^2+1x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4=8$,

化简得 $2k\cdot\frac{2k+4}{1+k^2}+4=8$,

即 $4k^2+8k=4(1+k^2)$,

解得 $k=\frac{1}{2}$,

经检验满足 $\Delta>0$,

所以存在直线 m 当 $k=\frac{1}{2}$ 时,使得 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=8$.

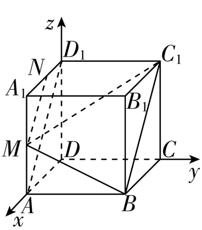
20. (1)证明:如图,连接 NM,AD_1,因为 M,N 分别为 AA_1,A_1D_1 中点,

所以 $MN/\!/AD_1$,

因为 $AD_1/\!/BC_1$,

所以 $MN/\!/BC_1$,

所以 N,M,B,C_1 四点共面.



(2)解:如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$两两垂直,以 D 为坐标原点,分别以$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向,建立空间直角坐标系,

设 $AB=2$,

则 $B(2,2,0)$,$M(2,0,1)$,$C_1(0,2,2)$,$C(0,2,0)$,

所以$\overrightarrow{BM}=(0,-2,1)$,$\overrightarrow{BC_1}=(-2,0,2)$,$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$,

设平面 MBC_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BM}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}-2y+z=0,\\ -2x+2z=0,\end{cases}$

当 $y=1$ 时,$x=2$,$z=2$,

$\therefore \boldsymbol{m}=(2,1,2)$.

设直线 CD 与平面 MBC_1 所成角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{DC},\boldsymbol{m}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{DC}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{2}{2\times3}=\dfrac{1}{3}$.

21. (1)证明:设 AC,BD 交于点 O,连接 B_1A,B_1C,B_1O,

因为 $BC=BA$,$\angle B_1BA=\angle B_1BC$,$B_1B=B_1B$,

所以$\triangle B_1BC\cong\triangle B_1BA$,所以 $B_1A=B_1C$.

又因为 O 为正方形的对角线交点,即 O 是线段 AC 的中点,

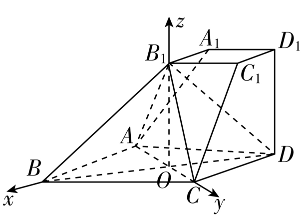
所以 $B_1O\perp AC$.

又因为四边形 $ABCD$ 为正方形,

所以 $AC\perp BD$.

又因为 $B_1O\cap BD=O$,

所以 $AC\perp$平面 BDB_1.



(2)解:$\because$ 底面 $ABCD$ 是正方形,$AB=2$,

$\therefore BD=2\sqrt{2}$,$AC\perp BD$.

又$\angle B_1BD=\dfrac{\pi}{3}$,$BB_1=2\sqrt{2}$,

$\therefore$ $\triangle B_1BD$ 为等边三角形.

$\because$ O 为 BD 中点,$\therefore$ $B_1O\perp BD$,

又 $B_1O\perp AC$,$AC\cap BD=O$,$\therefore$ $B_1O\perp$平面 $ABCD$,

$\therefore$ B_1O,OB,OC 两两垂直.

以$\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB_1}$所在直线分别为$x,y,z$轴建立空间直角坐标系，如图，

$\therefore B(\sqrt{2},0,0),C(0,\sqrt{2},0),B_1(0,0,\sqrt{6}),A(0,-\sqrt{2},0)$，

所以$\overrightarrow{BA_1}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

$=(-\sqrt{2},0\sqrt{6})+\frac{1}{2}(-\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$

$=\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{6}\right)$，

$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，

设平面BCA_1的法向量$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-\frac{3\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y+\sqrt{6}z=0,\\ -\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0,\end{cases}$

令$x=\sqrt{3}$，则$y=\sqrt{3},z=2$，

$\therefore \boldsymbol{m}=(\sqrt{3},\sqrt{3},2)$.

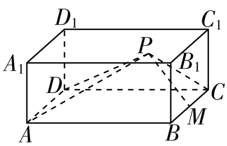
取平面BCD的法向量$\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，

设两平面所成夹角为α，

则$\cos\alpha=|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，

所以二面角A_1-BC-D的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$.

22. 解：(1)



如图，当P在面DCC_1D_1内时，$AD\perp$面DCC_1D_1，$CM\perp$面DCC_1D_1，

$\therefore \angle MCP=\angle ADP=90°$.

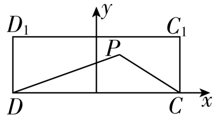
又$\angle APD=\angle MPC$，

$\therefore \triangle PDA\backsim\triangle PCM$.

$\because AD=3,\therefore MC=\frac{3}{2}$，

$\therefore \frac{AD}{PD}=\frac{MC}{PC}$，则$\frac{3}{PD}=\frac{\frac{3}{2}}{PC}$，即$PD=2PC$.

在平面DCC_1D_1中，以DC所在直线为x轴，以DC的垂直平分线为y轴建立平面直角坐标系，则$D\left(-\frac{3}{2},0\right),C\left(\frac{3}{2},0\right)$，

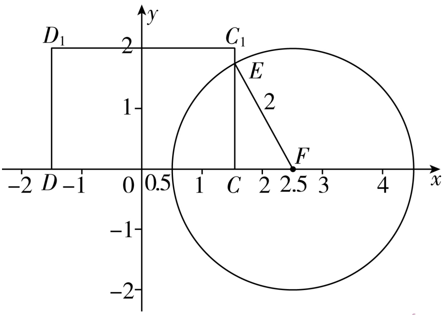


设 $P(x,y)$,由 $PD=2PC$,得$\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2}=2\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2}$,

整理得:$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=4$.

$\therefore$ 点 P 的轨迹是以 $F\left(\frac{5}{2},0\right)$为圆心,半径为 2 的圆.

(2)



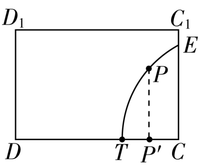
如图,$EF=2$,$CF=1$,$\angle ECF=\frac{\pi}{2}$,

$\therefore \angle EFC=\frac{\pi}{3}$,

则点 P 在长方形 DCC_1D_1 内的轨迹为圆心角是$\frac{\pi}{3}$的弧,

故点 P 在长方形 DCC_1D_1 内的轨迹长度为$\frac{2\pi}{3}$.

(3)



任意点 P 在底面投影落在 TC 上,

又 $AP^2=AP'^2+PP'^2$,

显然,当 P 在 E 处时,AP'与 PP'同时最大,

$AP_{\max}=\sqrt{3^2+3^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{21}$,

所以线段 AP 长度的最大值为 $\sqrt{21}$.