参照秘密级管理★启用前　　　　试卷类型：A

# 2019级高三校际联合考试

# 数学试题

2022.05

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束，将试题卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M=\{x|x^2-2x<0\}$，$N=\{-2,-1,0,1,2\}$，则 $M\cap N=$

A. $\varnothing$　　B. $\{1\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{-1,0,1\}$

2. $z_1$，$z_2$ 互为共轭复数，$z_1=1-\mathrm{i}$，则 $z_1\cdot z_2=$

A. $-2$　　B. $2$　　C. $2-\mathrm{i}$　　D. $2+\mathrm{i}$

3. 若 $a$，$b$，$c$ 为实数，且 $a<b$，$c>0$，则下列不等关系一定成立的是

A. $a+c<b+c$　　B. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

C. $ac>bc$　　D. $b-a>c$

4. 已知曲线 $C:\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{a-1}=1$，则“$a>0$”是“曲线 $C$ 是椭圆”的

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 曲线 $y=\ln x-\frac{2}{x}$ 在 $x=1$ 处的切线的倾斜角为 $\alpha$，则 $\cos2\alpha$ 的值为

A. $\frac{4}{5}$　　B. $-\frac{4}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $-\frac{3}{5}$

6. 设$a=\sin 1$，则

A. $\log_{0.5}a<a^2<2^a$　　B. $\log_{0.5}a<2^a<a^2$

C. $a^2<2^a<\log_{0.5}a$　　D. $a^2<\log_{0.5}a<2^a$

7. 王大爷养了5只灰兔子和3只白兔子，晚上关在同一间兔舍里，清晨打开门，若这些兔子随机逐一向外走，则恰有2只白兔子相邻走出兔舍的概率为

A. $\frac{5}{28}$　　B. $\frac{5}{14}$　　C. $\frac{15}{56}$　　D. $\frac{15}{28}$

8. 设$0<a<1$，若$x_1=a$，$x_2=a^{x_1}$，$x_3=a^{x_2}$，……，$x_n=a^{x_{n-1}}$，……，则数列$\{x_n\}$

A. 是递增的　　B. 是递减的

C. 奇数项递增，偶数项递减　　D. 偶数项递增，奇数项递减

二、多项选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的，全部选对得5分，选对但不全的得2分，有选错的得0分。

9. 已知向量$\boldsymbol{m}=(2,0)$，$\boldsymbol{n}=(1,1)$，则

A. $\boldsymbol{m}\,//\,\boldsymbol{n}$　　B. $(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})\perp\boldsymbol{n}$　　C. $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$　　D. $|\boldsymbol{m}|=\sqrt{2}|\boldsymbol{n}|$

10. 关于函数$f(x)=3\sin(2x-\frac{\pi}{3})+1(x\in\mathbf{R})$，下列说法正确的是

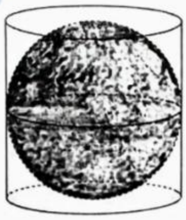
A. 若$f(x_1)=f(x_2)=1$，则$x_1-x_2=k\pi(k\in\mathbf{Z})$

B. $y=f(x)$的图像关于点$(\frac{2\pi}{3},1)$对称

C. $y=f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递增

D. $y=f(x)$的图像向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度后所得图像关于$y$轴对称

11. 传说古希腊科学家阿基米德的墓碑上刻着一个圆柱，圆柱内有一个内切球，这个球的直径与圆柱的高相等.因为阿基米德认为这个“圆柱容球”是他在几何上最为得意的发现，于是留下遗言：他去世后，墓碑上要刻上一个“圆柱容球”的几何图形.设圆柱的体积与球的体积之比为$m$，圆柱的表面积与球的表面积之比为$n$，若$f(x)=(\frac{m}{n}x^3-\frac{1}{x})^8$，则



A. $n=\frac{3}{2}$　　B. $f(x)$ 的展开式中的 $x^4$ 的系数为56

C. $f(x)$ 的展开式中的各项系数之和为0　D. $f(\mathrm{i})=-16$，其中 i 为虚数单位

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n(\ln a_n+1)+1$，则下列说法正确的有

A. $\frac{2a_3}{a_1+a_2}<5$　　B. $a_{n+1}\le 2a_n^2+1$

C. 若 $n\ge 2$，则 $\frac{3}{4}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+1}<1$　　D. $\sum_{i=1}^{n}\ln(a_i+1)\le(2^n-1)\ln 2$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\ge 0$ 时，$f(x)=2x^2-x$，则 $f(-1)=$______.

14. 已知第一象限的点 $M(a,\ b)$ 在直线 $x+y-1=0$ 上，则 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 的最小值是______.

15. 如图1所示，双曲线具有光学性质：从双曲线右焦点发出的光线经过双曲线镜面反射，其反射光线的反向延长线经过双曲线的左焦点．若双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1$，$F_2$，从 $F_2$ 发出的光线经过图2中的 $A$，$B$ 两点反射后，分别经过点 $C$ 和 $D$，且 $\cos\angle BAC=-\frac{4}{5}$，$AB\perp BD$，则 $E$ 的离心率为______.

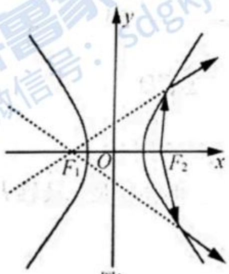


图1

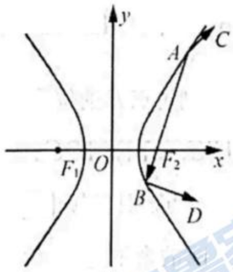


图2

16. 在棱长为3的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知点 $P$ 为棱 $AA_1$ 上靠近点 $A_1$ 的三等分点，点 $Q$ 为棱 $CD$ 上一动点．若 $M$ 为平面 $D_1PQ$ 与平面 $ABCD$ 的公共点，且点 $M$ 在正方体的表面上，则所有满足条件的点 $M$ 构成的区域面积为______.

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

已知等差数列$\{a_n\}$的公差为正数，$a_2$与$a_8$的等差中项为8，且$a_3a_7=28$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）从$\{a_n\}$中依次取出第3项，第6项，第9项，…，第$3n$项，按照原来的顺序组成一个新数列$\{b_n\}$，判断938是不是数列$\{b_n\}$中的项？并说明理由.

18.（12 分）

$\Delta ABC$的内角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，已知$c\cos A+a\cos C=2b\cos A$.

（1）求$A$；

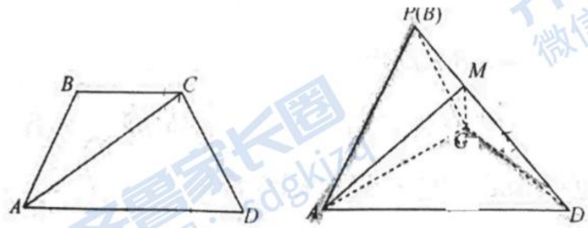
（2）若$b+c=5$，$\Delta ABC$的面积为$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，求$a$.

19.（12 分）

如图，等腰梯形$ABCD$中，$AD//BC$，$AB=BC=CD=\dfrac{1}{2}AD$，现以$AC$为折痕把$\Delta ABC$折起，使点$B$到达点$P$的位置，且$PA\perp CD$.

（1）证明：平面$APC\perp$平面$ADC$；

（2）若$M$为$PD$上一点，且三棱锥$D-ACM$的体积是三棱锥$P-ACM$体积的 2 倍，求二面角$P-AC-M$的余弦值.



20.（12分）

2018年9月10日，全国教育大会在北京召开，习近平总书记在会上提出“培养德智体美劳全面发展的社会主义建设者和接班人”.某学校贯彻大会精神，为学生开设了一门模具加工课，经过一段时间的学习，拟举行一次模具加工大赛，学生小明、小红打算报名参加大赛.

（1）赛前，小明进行了一段时间的强化训练，加工完成一个模具的平均速度$y$(秒)与训练天数$x$(天)有关，经统计得到如下表数据：

| $x$(天) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$(秒) | 990 | 990 | 450 | 320 | 300 | 240 | 210 |

经研究发现，可用$y=a+\frac{b}{x}$作为回归方程模型，请利用表中数据，求出该回归方程，并预测小明经过50天训练后，加工完成一个模具的平均速度$y$约为多少秒?

（2）小明和小红拟先举行一次模拟赛，每局比赛各加工一个模具，先加工完成模具的人获胜，两人约定先胜4局者赢得比赛．若小明每局获胜的概率为$\frac{3}{5}$，已知在前3局中小明胜2局，小红胜1局．若每局不存在平局，请你估计小明最终赢得比赛的概率.

参考数据：(其中$t_i=\frac{1}{x_i}$)

| $\sum\limits_{i=1}^{7}t_iy_i$ | $\bar{t}$ | $\sum\limits_{i=1}^{7}t_i^2-7\times\bar{t}^2$ |
|---|---|---|
| 1845 | 0.37 | 0.55 |

参考公式：对于一组数据$(u_1,v_1)$，$(u_2,v_2)$，…，$(u_n,v_n)$，其回归直线$\hat{v}=\alpha+\beta u$的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为$\beta=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}u_iv_i-n\bar{u}\cdot\bar{v}}{\sum\limits_{i=1}^{n}u_i^2-n\bar{u}^2}$，$\alpha=\bar{v}-\beta\cdot\bar{u}$.

21.（12分）

已知抛物线$C_1: x^2 = 2py(p>0)$过点$M(4,4)$，$O$为坐标原点.

（1）求抛物线$C_1$的方程；

（2）直线$l$经过抛物线$C_1$的焦点，且与抛物线$C_1$相交于$A$，$B$两点，若弦$AB$的长等于6，求$\Delta OAB$的面积；

（3）抛物线$C_1$上是否存在异于$O$，$M$的点$N$，使得经过$O$，$M$，$N$三点的圆$C$和抛物线$C_1$在点$N$处有相同的切线，若存在，求出点$N$的坐标，若不存在，请说明理由.

22.（12分）

已知函数$f(x)=a|\ln x|+x+\dfrac{1}{x}$，其中$a>0$.

（1）当$a=1$时，求$f(x)$的最小值；

（2）讨论方程$e^x+e^{-x}-a|\ln(ax)|-\dfrac{1}{ax}=0$根的个数.

2019级高三校际联合考试

# 数学答案

2022.05

**一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。**

1-4.BBAC　5-8.BADC

6. 答案：A 解析：因为 $a=\sin 1\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以 $a^2\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$，$2^a>1$，$\log_{0.5}a<\log_{0.5}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$

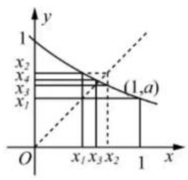
所以 $\log_{0.5}a<a^2<2^a$　故选：A．

7. 答案：D. 解析：兔子走出房门，共有 $A_8^8$ 种不同的方案，其中恰有2只白兔子相邻走出房子的方案为：先排5只灰兔子，会产生6个空隙，再从3只白兔子中选2只捆绑排列，最后与剩下的兔子排列到6个空隙中共有：$A_5^5A_3^2A_6^2$ 种方案，故恰有2只兔子相邻走出房子的概率为：$P=\frac{A_5^5A_3^2A_6^2}{A_8^8}=\frac{15}{28}$.故选：D.

8. 答案：C　解析:作 $y=a^x$ 的图像，在图像上取点 $x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$，由 $0<a<1$，知 $x_1<x_3<x_4<x_2$，即A、B、D错，选C.

**二、多项选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的，全部选对得5分，选对但不全的得2分，有选错的得0分。**

9. BD　10. BD　11. AC　12 . BCD




9. 答案：BD 解析：由 $\boldsymbol{m}=(2,0)$，$\boldsymbol{n}=(1,1)$，A：若 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，由 $2\times1\neq0\times1$，故A错误；B：若 $(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})\perp\boldsymbol{n}$，则 $1\times1+(-1)\times1=0$，符合题意，故B正确；C：若 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，由 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\neq0$，故C错误；D：$|\boldsymbol{m}|=2$，$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{2}$，故D正确.故选：BD

10. 答案：BD 解析：A 由 $f(x_1)=f(x_2)=1$ 知 $(x_1,1)$，$(x_2,1)$ 是 $f(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$ 图象的两个对称中心，则 $x_1-x_2$ 是 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$ 的整数倍（$T$ 是函数 $f(x)$ 的最小正周期），即 $x_1-x_2=\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$，所以结论A错误；B 因为 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=3\sin\pi+1=1$，所以 $\left(\frac{2\pi}{3},1\right)$ 是 $f(x)$ 的对称中心，所以结论B正确；由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 解得 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=0$ 时，$f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$ 上单调递增，则 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{5\pi}{12}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，所以结论C错误；D. $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后所得

图象对应的函数 $y=3\sin\left(2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{3}\right)+1=-3\cos 2x+1$，是偶函数，所以图象关于 $y$ 轴对称，所以结论 D 正确.故选：BD.

11. 【答案】AC 设内切球的半径为 $r$，则圆柱的高为 $2r$，$\therefore m=\frac{\pi r^2\cdot 2r}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{3}{2}$，$n=\frac{2\pi r^2+2\pi r\cdot 2r}{4\pi r^2}=\frac{3}{2}$，A 正确;则 $\frac{m}{n}=1$，$\therefore f(x)=\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^8$；对于 B，$f(x)$ 展开式通项公式为：$T_{r+1}=C_8^r x^{24-3r}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^r C_8^r x^{24-4r}$，令 $24-4r=4$，解得 $r=5$，$\therefore f(x)$ 的展开式中的 $x^4$ 的系数为 $(-1)^5C_8^5=-56$，B 错误；对于 C，$f(1)=0$，即 $f(x)$ 展开式的各项系数之和为 0，C 正确；对于 D，$f(i)=\left(i^3-\frac{1}{i}\right)^8=(-i+i)^8=0$，D 错误.故选：AC.

12．答案：BCD 解析：$a_2=2a_1(\ln a_1+1)+1=3$，$a_3=2a_2(\ln a_2+1)+1=6\ln 3+7$，则

$2a_3-5(a_1+a_2)=12\ln 3-6>0$，又 $a_1+a_2>0$，所以 $\frac{2a_3}{a_1+a_2}>5$，A 错误；

令函数 $f(x)=x-\ln x-1$，则 $f'(x)=1-\frac{1}{x}$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$f(x)\geq f(1)=0$，即 $x\geq \ln x+1$，又易得 $\{a_n\}$ 是递增数列，$a_n\geq a_1=1$，故 $a_n\geq \ln a_n+1$，所以

$a_{n+1}\leq 2a_n{}^2+1$，B 正确；

易知 $\{a_n\}$ 是递增数列，所以 $a_n\geq a_1=1$，则 $\ln a_n+1\geq 1$，$a_{n+1}=2a_n(\ln a_n+1)+1\geq 2a_n+1$，则

$a_{n+1}+1\geq 2(a_n+1)$，即 $\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}\geq 2$，所以 $\frac{a_n+1}{a_{n-1}+1}\cdot\frac{a_{n-1}+1}{a_{n-2}+1}\cdots\cdots\frac{a_2+1}{a_1+1}\geq 2^{n-1}$，即 $a_n+1\geq 2^{n-1}(a_1+1)=2^n$，

所以 $\frac{1}{a_n+1}\leqslant\frac{1}{2^n}$，所以 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+1}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}<1$，

而当 $n\geq 2$ 时，则有 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+1}\geq\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}=\frac{3}{4}$，C 正确；

令函数 $g(x)=2\ln x-x+\frac{1}{x}$，则 $g'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+2x-1}{x^2}\leq 0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以当 $x\geq 1$ 时，$g(x)\leqslant g(1)=0$，则 $\ln x\leqslant\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$，所以 $a_{n+1}\leqslant 2a_n\left[\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{a_n}\right)+1\right]+1=a_n^2+2a_n$，

$a_{n+1}+1\leqslant(a_n+1)^2$，$\frac{\ln(a_{n+1}+1)}{\ln(a_n+1)}\leqslant 2$，$\frac{\ln(a_n+1)}{\ln(a_{n-1}+1)}\cdot\frac{\ln(a_{n-1}+1)}{\ln(a_{n-2}+1)}\cdots\cdots\frac{\ln(a_2+1)}{\ln(a_1+1)}\leqslant 2^{n-1}$，

$\ln(a_n+1)\leqslant 2^{n-1}\ln(a_1+1)=2^{n-1}\ln 2$，所以$\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(a_i+1)\leqslant(1+2+\cdots+2^{n-1})\ln 2=(2^n-1)\ln 2$，D正确.故选：BCD.

**三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。**

13. $-1$　14. $3+2\sqrt{2}$　15. $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　16. $\dfrac{15}{2}$

13. 答案：$-1$　解析：$f(1)=2\times1^2-1=1$，$f(-1)=-f(1)=-1$.14. 答案：$3+2\sqrt{2}$

15. 答案：$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.解析：如图，连接$F_1B$，$F_1A$，则$F_1$，$A$，$C$和$F_1$，$B$，$D$都三点共线.

设$|F_2B|=x$，则$|F_1B|=x+2a$.

由$\cos\angle F_1AB=\cos(\pi-\angle BAC)=\dfrac{4}{5}$，得$\tan\angle F_1AB=\dfrac{3}{4}$，

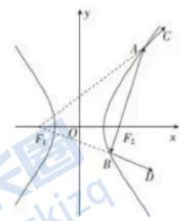
又$AB\perp BD$，则$|AB|=\dfrac{4}{3}|F_1B|$，$|F_1A|=\dfrac{5}{3}|F_1B|$，$|F_2A|=|AB|-|F_2B|$，

因此$|F_1A|-|F_2A|=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}a=2a$，即$x=a$，

则$\tan\angle F_1F_2B=3$，$(2c)^2=(x+2a)^2+x^2=10a^2$，$c^2=\dfrac{5}{2}a^2$，故$e=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

16. 答案：$\dfrac{15}{2}$.解析:延长$DA$，$D_1P$交于点$N$，连接$NQ$交$AB$于点$E$，则线段$EQ$为平面$D_1PQ$与平面$ABCD$的公共点$M$的集合，当$Q$运动到点$D$时，$E$与$A$重合；当$Q$运动到点$C$时，设此时$E$点运动到$F$点，则梯形$FADC$即为点$M$构成的区域，因为$\triangle PAF\backsim\triangle D_1DC$，所以$\dfrac{AF}{DC}=\dfrac{AP}{DD_1}=\dfrac{2}{3}$，所以$AF=2$，所以$S=\dfrac{1}{2}\times(2+3)\times3=\dfrac{15}{2}$.

**四、解答题：共70分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。**

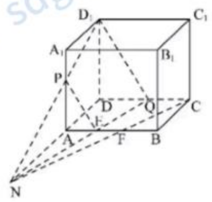



17. 解析：（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为$d$，根据等差中项的性质可得$a_2$与$a_8$的等差中项为$a_5$，所以$a_5=8$，又因为$a_3a_7=28$，即$(a_5-2d)(a_5+2d)=28$.所以$d^2=9$，

$d=\pm3$，因为公差为正数,所以$d=3$.　…………2分

则$a_5=a_1+4d=8$，则$a_1=-4$.　………4分

$\therefore\{a_n\}$的通项公式$a_n=a_1+(n-1)d=-4+3(n-1)=3n-7(n\in N^*)$.　……5分




（2）结合（1）可知 $b_n=a_{3n}=9n-7(n\in N^*)$.　…………………8分

令$938=9n-7$，即$n=105\in N^*$，符合题意，即$b_{105}=938$.

所以938是数列$\{b_n\}$中的项　……………………10分

18．解（1）由已知及正弦定理得

$\sin C\cos A+\sin A\cos C=2\sin B\cos A.$ .....2 分

即 $\sin(A+C)=2\cos A\sin B.$ ..........4 分

由 $\sin(A+C)=\sin B\neq 0$，可得 $\cos A=\frac{1}{2}$，因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$ ..........6 分

（2）由面积公式 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，可得 $bc=3$， ..........8 分

根据余弦定理可得 $a^2=c^2+b^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc(1+\cos A)$ ......10 分

因为 $b+c=5,\cos A=\frac{1}{2}$，所以 $a=4$. ......12 分

19. 解析：（1）在梯形 $ABCD$ 中取 $AD$ 中点 $N$，连接 $CN$，

则由 $BC$ 平行且等于 $AN$ 知 $ABCN$ 为平行四边形，

所以 $CN=AB$，由 $CN=\frac{1}{2}AD$ 知 $C$ 点在以 $AD$ 为直径的圆上，

所以 $AC\perp CD$ ..............2 分

又 $AP\perp CD$，$AP\cap AC=A$，所以 $CD\perp$ 面 $PAC$ ..........4 分

又因为 $CD\subset$ 面 $ADC$，所以平面 $APC\perp$ 平面 $ADC$； ..........5 分

（2）取 $AC$ 中点 $O$，连接 $PO$，由 $AP=PC$，可知 $PO\perp AC$，

再由面 $PAC\perp$ 面 $ACD$，$AC$ 为两面交线，所以 $PO\perp$ 面 $ACD$，

以 $O$ 为原点，$OA$ 为 $x$ 轴，过 $O$ 且与 $OA$ 垂直的直线为 $y$ 轴，

$OP$ 为 $z$ 轴建立直角坐标系， ...... 6 分

令 $AB=2$，则 $A(\sqrt{3},0,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$P(0,0,1)$，$D(-\sqrt{3},2,0)$，由 $V_{P-ACM}:V_{D-ACM}=1:2$

得 $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PD}$

所以 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PD}=(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$， ...........8 分

设平面 $ACM$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OM}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OA}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z=0\\ \sqrt{3}x=0\end{cases}$

取 $z=-1$ 得 $x=0$，$y=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(0,1,-1)$

而平面 $PAC$ 的法向量 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$ ...........10 分

所以 $\cos<\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}>=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ .........11 分

又因为二面角 $P-AC-M$ 为锐二面角，所以其余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ...........12 分

20．解析：（1）由题意，$\bar{y}=\frac{1}{7}(990+990+450+320+300+240+210)=500$，….1 分

令 $t=\frac{1}{x}$，设 $y$ 关于 $t$ 的线性回归方程为 $\hat{y}=\hat{b}t+\hat{a}$，

则 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{7}t_iy_i-7\bar{t}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{7}t_i^2-7\bar{t}^2}=\dfrac{1845-7\times0.37\times500}{0.55}=1000$，…3 分

则 $\hat{a}=500-1000\times0.37=130$．

$\therefore\hat{y}=1000t+130$，又 $t=\frac{1}{x}$，$\therefore y$ 关于 $x$ 的回归方程为 $\hat{y}=\frac{1000}{x}+130$，….5 分

故 $x=50$ 时，$\hat{y}=150$．

∴经过 50 天训练后，加工完成一个模具的平均速度 $y$ 约为 150 秒．…..6 分

（2）设比赛再继续进行 $X$ 局小明最终赢得比赛，则最后一局一定是小明获胜，

由题意知，最多再进行 4 局就有胜负．

当 $X=2$ 时，小明 4：1 胜，$\therefore P(X=2)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$；…..7 分

当 $X=3$ 时，小明 4：2 胜，$\therefore P(X=3)=C_2^1\times\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\frac{3}{5}=\frac{36}{125}$；….9 分

当 $X=4$ 时，小明 4：3 胜，$\therefore P(X=4)=C_3^1\times\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{3}{5}=\frac{108}{625}$，…..11 分

∴小明最终赢得比赛的概率为 $\frac{9}{25}+\frac{36}{125}+\frac{108}{625}=\frac{513}{625}$．…..12 分

21.解析：（1）抛物线 $C_1:x^2=2py(p>0)$ 过点 $M(4,4)$，

$p=2$，抛物线 $C_1$ 方程 $x^2=4y$．…………………2 分

（2）设直线 $l$ 的斜率为 $k$，则 $l$：$y=kx+1$，

由 $\begin{cases}y=kx+1\\4y=x^2\end{cases}$，得 $x^2-4kx-4=0$，

∵直线 $l$ 与抛物线 $C_1$ 有两个交点 $A,B$，所以 $\Delta=16k^2+16>0$ ①，

∴ 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 则可得 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$，

于是 $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{(1+k^2)\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]}$

$=\sqrt{k^2+1}\sqrt{16k^2+16}$

$=4(k^2+1)=6$，………………5 分

由 $4(k^2+1)=6$ ②，由①②解得 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，直线 $l$ 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x+1$．

原点 $O$ 到直线 $l$ 距离 $d=\frac{2}{\sqrt{4+2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

$\Delta OAB$ 的面积为 $S=\frac{\sqrt{6}}{3}\times 6\times\frac{1}{2}=\sqrt{6}$． …………………7 分

（3）已知 $O$，$M$ 的坐标分别为 $(0,0)$，$(4,4)$．抛物线 $C_1$ 方程 $x^2=4y$，

假设抛物线 $C_1$ 上存在点 $N(t,\frac{t^2}{4})$（$t\neq 0$ 且 $t\neq 4$），

使得经过 $O$，$M,N$ 三点的圆 C 和抛物线 $C_1$ 在点 $N$ 处有相同的切线.

设经过 $O$，$M,N$ 三点的圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

则 $\begin{cases}F=0,\\4D+4E+F=-32,\\16tD+4t^2E+16F=-t^4-16t^2.\end{cases}$ …………………8 分

整理得 $t^3+4(E+4)t-16(E+8)=0$． ①

$\because$ 函数 $\frac{x^2}{4}=y$ 的导数为 $y'=\frac{x}{2}$，

$\therefore$ 抛物线 $C_1$ 在点 $N(t,\frac{t^2}{4})$ 处的切线的斜率为 $\frac{t}{2}$，

$\therefore$ 经过 $O$，$M,N$ 三点的圆 $C$ 在点 $N(t,\frac{t^2}{4})$ 处的切线斜率为 $\frac{t}{2}$．

$\because t\neq 0$，$\therefore$ 直线 $NC$ 的斜率存在.

$\because$ 圆心的坐标为 $C\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，

$\therefore \frac{\frac{t^2}{4}+\frac{E}{2}}{t+\frac{D}{2}}\times\frac{t}{2}=-1$，

即 $t^3+2(E+4)t-4(E+8)=0$． ② …………………10 分

$\because t\neq 0$，由①.②消去 $E$，得 $t^3-6t^2+32=0$．

即 $(t-4)^2(t+2)=0$．

$\because t\neq 4$，$\therefore t=-2$．

故满足题设的点 $N$ 存在，其坐标为 $(-2,1)$． …………………12 分

22．解析：（1）$a=1$ 时，$f(x)=|\ln x|+x+\frac{1}{x}$.

① $0<x<1$时，$f(x)=-\ln x+x+\frac{1}{x}, f'(x)=-\frac{1}{x}+1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-x-1}{x^2}=\frac{x(x-1)-1}{x^2}$,

显然此时 $f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $0<x<1$ 时单调递减；……………2 分

② $x>1$时 $f(x)=\ln x+x+\frac{1}{x}, f'(x)=\frac{1}{x}+1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2+x-1}{x^2}$.

显然此时 $f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $x>1$ 时单调递增；

故 $f(x)$ 的最小值是 $f(1)=2$. ……………4 分

（2）由题 $e^x+e^{-x}=a|\ln(ax)|+\frac{1}{ax}, x>0$，

则 $ax+e^x+e^{-x}=a|\ln(ax)|+ax+\frac{1}{ax}$，

即 $a|\ln e^x|+e^x+e^{-x}=a|\ln(ax)|+ax+\frac{1}{ax}$.

所以 $f(e^x)=f(ax)$. ……………6 分

$0<x<1$时，$f'(x)=-\frac{a}{x}+1-\frac{1}{x^2}=-\frac{a}{x}-\frac{1-x^2}{x^2}<0$；

$x>1$时，$f'(x)=\frac{a}{x}+1-\frac{1}{x^2}=\frac{a}{x}+\frac{x^2-1}{x^2}>0$；

所以，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减；在 $(1,+\infty)$ 上递增.

又因为 $f(x)=f(\frac{1}{x})$，

所以 $f(e^x)=f(ax)$，当且仅当 $e^x=ax$ 或 $e^x=\frac{1}{ax}$ ……………8 分

又 $e^x>1$，故 $e^x=ax$ 和 $e^x=\frac{1}{ax}$ 不可能同时成立.

所以方程根 $e^x+e^{-x}-a|\ln(ax)|-\frac{1}{ax}=0$ 的个数是

两函数 $s(x)=e^x-ax$ 和 $t(x)=xe^x-\frac{1}{a}$ 的零点个数之和，其中 $x>0$.

法一：

当 $s(x)=0$ 时，函数 $s(x)=e^x-ax$ 的零点个数转换为直线 $y=a$ 与函数 $h(x)=\frac{e^x}{x}$ 图像的交点个数，

$h'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$，易知 $0<x<1$时，$h(x)$ 单调递减，$x>1$时，$h(x)$ 单调递增；$h(x)$ 在 $x=1$ 处取得最小值为 $e$，

所以 $0<a<e$ 时，直线 $y=a$ 与函数 $h(x)$ 图像无交点，函数 $s(x)$ 无零点；

$a=e$ 时，直线 $y=a$ 与函数 $h(x)$ 图像有一个交点，函数 $s(x)$ 有一个零点；

$a>e$ 时，直线 $y=a$ 与函数 $h(x)$ 图像有 2 个交点函数，$s(x)$ 有两个零点 ……10 分

同理：函数 $t(x)=xe^x-\frac{1}{a}$ 的零点个数转化为直线 $y=\frac{1}{a}$ 与函数 $y=xe^x$ 图像交点个数，易知，函数 $y=xe^x$ 单调递增，且在 $x=0$ 处的值为 0，

所以 故 $a>0$ 时，$t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上必有一个零点. ………11 分

综上所述，$0<a<e$ 时，方程有一个根；

$a=e$ 时，方程有二个根；

$a>e$ 时，方程有三个根. ………12 分

法二：

$s'(x)=e^x-a$，

$0<a\le 1$ 时，$s'(x)>0$，$s(x)$ 递增，$s(x)>s(0)=1$，$s(x)$ 无零点.

$a>1$ 时，令 $s'(x)=0$，得 $x=\ln a$，故 $s(x)$ 在 $(0,\ \ln a)$ 上递减；在 $(\ln a,+\infty)$ 上递增.

当 $1<a<e$ 时，$s(\ln a)=a(1-\ln a)>0$，此时 $s(x)$ 无零点.

当 $a=e$ 时，$s(\ln a)=0$，此时 $s(x)$ 有一个零点.

当 $a>e$ 时，$s(\ln a)=a(1-\ln a)<0, s(\frac{1}{a})=e^{\frac{1}{a}}-1>0, s(2\ln a)=a^2-2a\ln a=a(a-2\ln a)$，

令 $h(a)=a-2\ln a(a>e), h'(a)=1-\frac{2}{a}>0$，故 $h(a)>h(e)=e-2>0$，

所以 $s(2\ln a)>0$，

由零点存在性定理，$s(x)$ 在 $(\frac{1}{a},\ \ln a)$ 和 $(\ln a, 2\ln a)$ 上各有一个零点，

此时 $s(x)$ 有两个零点. ………..10 分

$t(x)=xe^x-\frac{1}{a}, t'(x)=(x+1)e^x>0, t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增.

又 $t(0)=-\frac{1}{a}<0, t(\frac{1}{a})=\frac{1}{a}(e^{\frac{1}{a}}-1)>0$，

故 $a>0$ 时，$t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上必有一个零点. ………11 分

综上所述，$0<a<e$ 时，方程有一个根；

$a=e$ 时，方程有二个根；

$a>e$ 时，方程有三个根. ………12 分