

2021-2022 学年北京市新高三入学定位考试

数 学

2021.8

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ ， $B = \{x | -3 \leq x \leq 1\}$ 则 $A \cap B =$

- (A) $\{x | -3 \leq x \leq 0\}$ (B) $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$
(C) $\{x | 1 \leq x \leq 2\}$ (D) $\{x | -3 \leq x \leq 2\}$

解析：画数轴，注意求的是交集，选 B.

(2) 在复平面内，复数 z 满足 $(z+i)i = -2$ ，则 $z =$

- (A) i (B) $-i$
(C) 1 (D) -1

解析： $z = \frac{-2}{i} - i = \frac{-2i}{i^2} - i = i$ ，选 A.

(3) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ ，则“ $\forall x \in \mathbb{R}$ ， $f(x)f(-x) \geq 0$ ”是“函数 $f(x)$ 为偶函数”的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

解析：后推前，明显成立，

前推后，举反例 $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$ 符合条件，但 $f(x)$ 不是偶函数，选 B.

(4) 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，其前 n 项和为 S_n . 若 $S_{n+1} = ka_n - 1$ ，则 $k =$

- (A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4

解析： $\frac{1 \times (1 - 2^{n+1})}{1 - 2} = k \times 2^{n-1} - 1$ ，即 $2^{n+1} = k \times 2^{n-1}$ ，所以 $k = \frac{2^{n+1}}{2^{n-1}} = 4$ ，选 D.



(5) 已知函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, 则下列可以使得 $f(x) + f(x+\theta) = 0$ 恒成立的 θ 的值是

- (A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{2}$
(C) π (D) $\frac{3\pi}{2}$

解析: 正余弦函数, 使 $f(x) + f(x+\theta) = 0$ 恒成立的 θ 可以为 $\theta = \frac{T}{2} + kT$, 此题 $\theta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

当 $k=0$ 时, $\theta = \pi$, 选 C.

(6) 已知 $a = 1.2^{0.5}$, $b = 0.5^{1.5}$, $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则这三个数的大小关系为

- (A) $a < b < c$ (B) $a < c < b$
(C) $b < a < c$ (D) $b < c < a$

解析: $a > 1$, $0 < b < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < c < 1$, 故 $b < c < a$, 选 D.

(7) 二项式 $(\sqrt{2}+1)^4$ 的化简结果为

- (A) $16+8\sqrt{2}$ (B) $17+8\sqrt{2}$
(C) $16+12\sqrt{2}$ (D) $17+12\sqrt{2}$

解析: $(\sqrt{2}+1)^4 = [(\sqrt{2}+1)^2]^2 = (3+2\sqrt{2})^2 = 17+12\sqrt{2}$, 选 D.

(8) 把函数 $f(x) = \ln|x-1|$ 的图象向左平移 $t(t>0)$ 个单位长度, 所得函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

则 t 的取值范围为

- (A) $(0, +\infty)$ (B) $[1, +\infty)$
(C) $[e, +\infty)$ (D) $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$

解析: 数形结合, 当 $x > 1$ 时, $f(x) = \ln(x-1)$, 单调递增,

且函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=1$, 故左移 1 个大于 1 个单位即符合题意, 选 B.

(9) 直线 $y=2x$ 与抛物线 $W: y^2 = 2px$ 交于 A, B 两点, 若 $|AB| = \sqrt{5}$, 则 A, B 两点到抛物线 W 的

准线的距离之和为

- (A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4

解析: 由题, $y=2x$ 与抛物线交于 $(0,0)$, $(1,2)$ 两点, 即抛物线方程为 $y^2 = 4x$,

故距离之和为 $1+(1+1) = 3$, 选 C.



(10) 已知数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列, 且 $a_n + a_{n+1} = 2n + 3$. 若 $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2k} = 120$, 则 $k =$

- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12

解析: 由于此题答案唯一, 故可代符合题意的数列即可.

因为数列递增, 且 $a_n + a_{n+1} = 2n + 3 = (n+1) + (n+2)$, 故可令 $a_n = n+1$,

则 $a_2 + a_4 + \dots + a_{2k} = ka_2 + \frac{k(k-1)}{2} \times 2 = k^2 + 2k = 120$, 即 $(k+1)^2 = 121 = 11^2$, 故 $k = 10$, 选 B.

第二部分 (非选择题共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

(11) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a_2} - \frac{y^2}{b_2} = 1$, 若 $b = \sqrt{3}a$, 则双曲线 C 的离心率是_____.

解析: $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2$, 故 $c = 2a$, 所以 $e = \frac{c}{a} = 2$.

(12) 函数 $f(x) = \frac{4}{x} - \log_2 x - 1$ 的零点个数为_____.

解析: 数形结合, 画出 $g(x) = \frac{4}{x}$, $h(x) = \log_2 x + 1$ 看两个函数的交点个数, 有 1 个交点,

故零点个数为 1.

(13) 已知单位向量 a, b 满足 $a \cdot b = 0$. 则 a, b 的夹角大小为_____; 若 $a = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 写出一个满足题意的向量 b 的坐标_____.

解析: 向量相乘得 0, 两向量垂直, 故 $\vec{a}, \vec{b}$ 夹角为 $\frac{\pi}{2}$;

单位圆中 $\vec{a} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = (\cos 60^\circ, \sin 60^\circ)$,

故 $\vec{b} = (\cos 150^\circ, \sin 150^\circ) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ 或 $\vec{b} = (\cos(-30^\circ), \sin(-30^\circ)) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.

(14) 已知圆 $C: x^2 + y^2 = r^2$. 若直线 $x - y + 4 = 0$ 上存在一点 P , 使得经过点 P 与圆 C 相切的两条切线互相垂直, 则 r 的最小值为_____.

解析: 找临界. 取 $P(-2, 2)$, 此时两条切线垂直, 此时 $r = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2$.

(15) 记正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的八个顶点组成的集合为 S . 若集合 $M \subseteq S$,

满足 $\forall X_i, X_j \in M, \exists X_k, X_l \in M$ 使得直线 $X_iX_j \perp X_kX_l$, 则称 M 是 S 的“保垂直”子集.

给出下列三个结论:

①集合 $\{A, B, C, C_1\}$ 是 S 的“保垂直”子集;

②集合 S 的含有 6 个元素的子集一定是“保垂直”子集;

③若 M 是 S 的“保垂直”子集, 且 M 中含有 5 个元素, 则 M 中一定有 4 个点共面.

其中所有正确结论的序号是_____.

解析: 首先弄清楚可取其中的 5, 6, 7, 8 个点时, 符合 M 是 S 的“保垂直”子集.

注意, 正方体的两条体对角线不垂直哦.

对于①, 当取体对角线 AC_1 时, 找不到与之垂直的直线, ①错误;

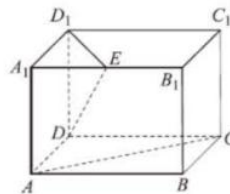
对于②, 当 8 个点任取 6 个点时, 一定满足题意, 且此时必有 4 点共面, ②正确;

对于③, 举反例即可, 如 $M = \{B, C, D, C_1, A_1\}$, ③错误.

填②.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 13 分) 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=\sqrt{2}$ ， $AD=AA_1=1$ ，点 E 在线段 A_1B_1 上，且 $AC \perp DE$ 。



(I) 求证： $BB_1 \parallel$ 平面 DD_1E ；

(II) 求证： $AC \perp D_1E$ ；

(III) 求二面角 $A-DD_1-E$ 的余弦值。

解：(I) 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

因为 $BB_1 \parallel DD_1$ ， 1 分

且 $DD_1 \subset$ 平面 DD_1E ， $BB_1 \not\subset$ 平面 DD_1E 3 分

所以 $BB_1 \parallel$ 平面 DD_1E 。 4 分

(II) 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中

因为 $DD_1 \perp$ 底面 $ABCD$ 5 分

所以 $DD_1 \perp AC$ 。 6 分

又 $AC \perp DE$ ，且 $DD_1 \cap DE = D$ 7 分

所以 $AC \perp$ 平面 DD_1E 8 分

所以 $AC \perp D_1E$ 9 分

(III) 因为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$

所以 DA, DC, DD_1 两两垂直

以 D 为坐标原点，分别以 DA, DC, DD_1

为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系 $D-xyz$ ，

则 $D(0,0,0)$ ， $A(1,0,0)$ ， $C(0,\sqrt{2},0)$ ，

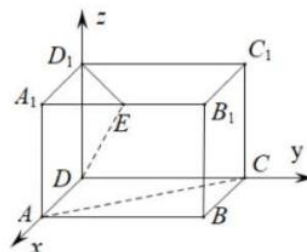
因为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$

所以平面 ADD_1 法向量为 $\overrightarrow{DC} = (0, \sqrt{2}, 0)$ ， 10 分

由 (II) 知，平面 DD_1E 法向量为 $\overrightarrow{AC} = (-1, \sqrt{2}, 0)$ 11 分

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{DC}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

由题知，二面角 $A-DD_1-E$ 为锐角，所以其余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 。 13 分



(17) (本小题 13 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $b = \sqrt{3}c$, $a = 6$.

(I) 若 $A = \frac{\pi}{6}$, 求 c 的值;

(III) 在下面三个条件中选择一个作为已知, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件① $\sqrt{3} \cos B = \cos C$; 条件② $\cos B = \sin C$; 条件③ $B = 2C$.

注: 如果选择条件①, 条件②和条件③分别解答, 按第一个解答计分.

解: (I) 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

2 分

$$\text{且 } b = \sqrt{3}c, a = 6, A = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{所以 } 36 = 3c^2 + c^2 - 2\sqrt{3}c^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4 分

$$\text{所以 } c^2 = 36, c = 6.$$

5 分

(II) 选条件①: $\sqrt{3} \cos B = \cos C$.

$$\text{因为 } b = \sqrt{3}c, \text{ 由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

7 分

$$\text{得 } \sin B = \sqrt{3} \sin C.$$

$$\text{又 } \sqrt{3} \cos B = \cos C,$$

$$\text{所以 } \sin B \cos B = \sin C \cos C, \text{ 所以 } \sin 2B = \sin 2C,$$

9 分

$$\text{因为 } 0 < 2B < \pi, 0 < 2C < \pi$$

$$\text{所以 } 2B = 2C, \text{ 或者 } 2B + 2C = \pi.$$

$$\text{因为 } b = \sqrt{3}c, \text{ 所以 } B > C,$$

$$\text{所以 } 2B + 2C = \pi, \text{ 所以 } B + C = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以 } A = \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } 36 = 3c^2 + c^2,$$

11 分

$$\text{所以 } c = 3, b = 3\sqrt{3},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

13 分

选条件②: $\cos B = \sin C$.

在 $\triangle ABC$ 中,

$$\text{因为 } b = \sqrt{3}c, \text{ 由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\text{得 } \sin B = \sqrt{3} \sin C,$$

7 分

又 $\cos B = \sin C$ ，所以 $\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sqrt{3} \sin C}{\sin C} = \sqrt{3}$,

所以 $\tan B = \sqrt{3}$

9 分

因为 $0 < B < \pi$ ，所以 $B = \frac{\pi}{3}$ ，所以 $\sin C = \cos B = \frac{1}{2}$

因为 $0 < C < \pi$ ，且 $b = \sqrt{3}c$ ，所以 $C = \frac{\pi}{6}$

所以 $A = \frac{\pi}{2}$ ，所以 $36 = 3c^2 + c^2$ ，

11 分

所以 $c = 3, b = 3\sqrt{3}$ ，

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ 。

13 分

选条件③ $B = 2C$

在 $\triangle ABC$ 中，因为 $b = \sqrt{3}c$ ，由正弦定理， $\sin B = \sqrt{3} \sin C$ ，

7 分

因为 $B = 2C$ ，所以 $\sin B = 2 \sin C \cos C$ ，

9 分

所以 $2 \sin C \cos C = \sqrt{3} \sin C$ ，所以 $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$

因为 $0 < C < \pi$ ，所以 $C = \frac{\pi}{6}$ ，所以 $B = 2C = \frac{\pi}{3}$

所以 $A = \frac{\pi}{2}$ ，所以 $36 = 3c^2 + c^2$ ，

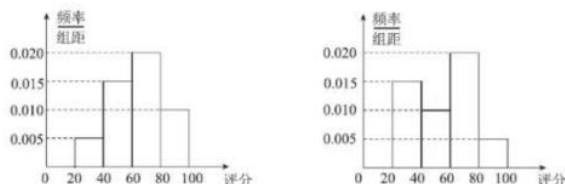
11 分

所以 $c = 3, b = 3\sqrt{3}$ ，

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

13 分

(18) (本小题 14 分) 某公司生产甲、乙两种不同型号的汽车尾气净化器, 为提高净化器的质量, 现从甲种型号的净化器中随机抽取了 400 件产品, 从乙种型号的净化器中随机抽取了 100 件产品, 并对抽出的样本进行产品性能质量评估. 该公司将甲、乙两种不同型号的汽车尾气净化器评估综合得分按照 $[20, 40)$, $[40, 60)$, $[60, 80)$, $[80, 100]$ 分组, 绘制成评估综合得分频率分布直方图如图:



甲种型号产品评估综合得分频率分布直方图 乙种型号产品评估综合得分频率分布直方图

(I) 从公司生产的乙种型号净化器中随机抽取一件, 估计这件产品的评估综合得分不低于 80 分的概率;

(II) 从两种型号的样本净化器中各随机抽取一件, 以 X 表示这两件中综合得分不低于 80 的件数, 求 X 的分布列和数学期望;

(III) 根据频率分布直方图, 假设同组中的每个数据用该组区间的中点值代替, 估计 400 件甲种型号的净化器评估综合得分的平均值为 μ_1 , 估计 100 件乙种型号的净化器评估综合得分的平均值为 μ_2 , 同时估计上述抽取的 500 件净化器评估综合得分的平均值为 μ_0 , 试比较 μ_0 和 $\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$ 的大小.
小强数学 (结论不要求证明)

解: (I) 由频率分布直方图可知, 100 件乙种型号的净化器评估综合得分不低于 80 分的频率为 $0.005 \times 20 = 0.1$, 所以从公司生产的乙种型号净化器中随机抽取一件, 这件产品的评估综合得分不低于 80 分的概率大约为 0.1. 3 分

(II) X 的所有可能值为 0, 1, 2. 4 分

所以 $P(X=0) = 0.8 \times 0.9 = 0.72$,

$P(X=1) = 0.2 \times 0.9 + 0.8 \times 0.1 = 0.26$

$P(X=2) = 0.2 \times 0.1 = 0.02$. 7 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	0.72	0.26	0.02

故 X 的数学期望 $E(X) = 0 \times 0.72 + 1 \times 0.26 + 2 \times 0.02 = 0.3$. 11 分

(III) $\mu_0 > \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$. 14 分

($\mu_1 = 30 \times 0.1 + 50 \times 0.3 + 70 \times 0.4 + 90 \times 0.2 = 64$, $\mu_2 = 30 \times 0.3 + 50 \times 0.2 + 70 \times 0.4 + 90 \times 0.1 = 56$,

$\mu_0 = 30 \times 0.14 + 50 \times 0.28 + 70 \times 0.4 + 90 \times 0.18 = 62.4$)

(19) (本小题 15 分) 已知函数 $f(x) = x^3 - ax^2 - a^2x - 1$, 其中 $a < 0$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(a, f(a))$ 处的切线方程;

(II) 若存在实数 t , 使得不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 $(-\infty, t)$, 求 a 的取值范围.

解: 由 $f(x) = x^3 - ax^2 - a^2x - 1$ 得 $f'(x) = 3x^2 - 2ax - a^2$.

2 分

(I) 所以 $f'(a) = 0$.

3 分

又因为 $f(a) = -a^3 - 1$.

4 分

故所求的切线方程为 $y = -a^3 - 1$.

5 分

(II) 因为 $f'(x) = 3x^2 - 2ax - a^2 = (3x + a)(x - a)$.

7 分

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = -\frac{a}{3}, x_2 = a$,

8 分

此时 $f'(x)$, $f(x)$ 随 x 的变化如下:

x	$(-\infty, a)$	a	$(a, -\frac{a}{3})$	$-\frac{a}{3}$	$(-\frac{a}{3}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

11 分

由题意, 要想存在实数 t , 使得不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 $(-\infty, t)$

$$\text{只需} \begin{cases} f(a) > 0 \\ f(-\frac{a}{3}) > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} f(a) < 0 \\ f(-\frac{a}{3}) < 0 \end{cases}$$

13 分

$$\text{因为 } f(-\frac{a}{3}) = \frac{5}{27}a^3 - 1 < 0,$$

$$\text{所以 } f(a) = -a^3 - 1 < 0$$

所以 a 的取值范围为 $(-1, 0)$.

15 分

(20) (本小题 15 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 直线 l 经过椭圆 C 的左焦点 $F(-1, 0)$ 与其交于点 A, B .

(I) 求椭圆 C 的方程和离心率;

(II) 已知点 $M(1, 0), N(2, 0)$, 直线 MA, MB 与直线 $x=2$ 分别交于点 P, Q . 若 $|NP||NQ|=1$,

求直线 l 的方程.

解: (I) 由题设, 得 $c=1$.

1 分

又 $a^2=3$, 所以 $b^2=2$.

2 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$.

3 分

所以椭圆 C 的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

5 分

(II) 依题意, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

当直线 AB 无斜率时, 方程为 $x=-1$, 所以 $|y_A||y_B| = \frac{4}{3}$

由平面几何知识可以得到, $|y_P||y_Q| = \frac{1}{3}$, 不合题意.

7 分

当直线 AB 有斜率时, 设 $y=k(x+1)$

由 $\begin{cases} y=k(x+1), \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$ 得 $(3k^2+2)x^2 + 6k^2x + 3k^2 - 6 = 0$.

8 分

则 $x_1+x_2 = -\frac{6k^2}{3k^2+2}, x_1x_2 = \frac{3k^2-6}{3k^2+2}$.

10 分

直线 MA 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1-1}(x-1)$.

令 $x=2$, 得点 P 的纵坐标 $y_P = \frac{y_1}{x_1-1}$.

12 分

同理可得点 Q 的纵坐标 $y_Q = \frac{y_2}{x_2-1}$.

$|y_P||y_Q| = |y_P \cdot y_Q| = \left| \frac{y_1}{x_1-1} \cdot \frac{y_2}{x_2-1} \right| = \left| \frac{k^2(x_1+1)(x_2+1)}{(x_1-1)(x_2-1)} \right| = \left| k^2 \frac{x_1x_2 + (x_1+x_2) + 1}{x_1x_2 - (x_1+x_2) + 1} \right| = \left| \frac{-k^2}{3k^2-1} \right| = 1$

14 分

解得 $k = \pm \frac{1}{2}$ 或 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

所求直线 l 的方程为 $y = \pm \frac{1}{2}(x+1)$ 或 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)$.

15 分

(21) (本小题 15 分) 给定正整数 $n \geq 2$, 对于一个由 n 个非负整数构成的数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$,

如果存在非负整数 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, 使得 $x_0 = x_n = 0$, 且 $a_k = x_{k-1} + x_k (k=1, 2, \dots, n)$, 则称数列 A 为 “ F 数列”.

(I) 判断数列 $A_1: 1, 2, 3, 4$ 和 $A_2: 1, 3, 4, 2$ 是否为 “ F 数列”;

(II) 若数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$ 为 “ F 数列”, 求证: $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k$ 为定值;

(III) 求所有正整数 n , 使得存在 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$, 且 A 为 “ F 数列”.

解: (I) A_1 不是 “ F 数列”, A_2 是 “ F 数列”.

4 分

(II) 因为 $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (x_{k-1} + x_k)$,

当 n 为偶数时,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (x_{k-1} + x_k) \\ &= (x_0 + x_1) - (x_1 + x_2) + \dots + (x_{n-2} + x_{n-1}) - (x_{n-1} + x_n) \\ &= x_0 - x_n = 0, \end{aligned}$$

当 n 为奇数时,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (x_{k-1} + x_k) \\ &= (x_0 + x_1) - (x_1 + x_2) + \dots + (x_{n-3} + x_{n-2}) - (x_{n-2} + x_{n-1}) + (x_{n-1} + x_n) \\ &= x_0 + x_n = 0, \end{aligned}$$

所以 $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k$ 为定值 0

9 分

(III) 若 $1, 2, 3, \dots, n$ 的一个排列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$ 为“ F 数列”, 则

$$1+2+3+\dots+n=x_0+2(x_1+x_2+\dots+x_{n-1})+x_n,$$

$$\text{即 } \frac{n(n+1)}{2} = 2(x_1+x_2+\dots+x_{n-1}), \text{ 所以 } \frac{n(n+1)}{2} \text{ 为偶数.}$$

$$\text{又 } n=4m-2 \text{ 或 } n=4m-3 \text{ 时 } (m \in \mathbf{N}^*), \frac{n(n+1)}{2} \text{ 为奇数,}$$

$$\text{所以 } n=4m \text{ 或 } n=4m-1 \quad (m \in \mathbf{N}^*).$$

$$\text{①若 } n=4m \text{ 时, 取排列 } A: a_k = \begin{cases} 2k-1, & 1 \leq k \leq 2m \\ 8m-2k+2, & 2m < k \leq 4m. \end{cases}$$

此时对应的

$$x_k = \begin{cases} k, & 0 \leq k \leq 2m, \\ 4m-k, & 2m < k \leq 4m, k=2i, i \in \mathbf{N}^*, \\ 4m-k+1, & 2m < k \leq 4m, k=2i-1, i \in \mathbf{N}^*. \end{cases},$$

满足题意, 所以 $n=4m$ 符合题意;

$$\text{②若 } n=4m-1 \text{ 时, 取排列 } A': a_k = \begin{cases} 2k-1, & 1 \leq k \leq 2m \\ 8m-2k, & 2m < k \leq 4m-1. \end{cases}$$

此时对应的

$$x_k = \begin{cases} k, & 0 \leq k \leq 2m, \\ 4m-k, & 2m < k \leq 4m-1, k=2i, i \in \mathbf{N}^*, \\ 4m-k-1, & 2m < k \leq 4m-1, k=2i-1, i \in \mathbf{N}^*. \end{cases},$$

满足题意, 所以 $n=4m-1$ 符合题意.

$$\text{综上所述: } n=4m \text{ 或 } n=4m-1 \quad (m \in \mathbf{N}^*).$$

15 分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 “专业、专注、有态度” 的创办公理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。



微信搜一搜



自主选拔在线