质量抽测

数学参考答案及评分细则

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4．只给整数分数。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．

1．B　　2．C　　3．A　　4．A

5．D　　6．C　　7．D　　8．C

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

9．AD　　10．BC　　11．ABD　　12．BC

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．-0.1　　14．$x=2$ ，$3x-4y-6=0$（写其中一条直线方程即可）

15．$9\sqrt{10}\pi$　　16．$\left(-\infty,\dfrac{2}{3}\right)$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．

17．【命题意图】本小题主要考查三角恒等变换、三角函数及其性质等基础知识；考查运算求解能力、数学建模能力；考查化归与转化思想、函数与方程思想；导向对发展直观想象、逻辑推理、数学运算、数学建模等核心素养的关注；体现基础性和应用性，满分 10 分．

【解答】（1）由 $\angle ABD=x$，则 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$，…………1 分

因为 $\angle CAE=x+\dfrac{\pi}{6}$，…………2 分

所以 $AC=\dfrac{1}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$，…………3 分

$AB=\dfrac{2}{\sin x}$，…………4 分

所以$S(x)=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AB\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin x}$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$. ……………………………5 分

（2）由（1），$S(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)}$ ……………………………6 分

$=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1-\cos 2x}{2}}$ ……………………………7 分

$=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1}$. ……………………………8 分

因为$x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，所以$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1$的取值范围是$(0,1]$，……9 分

所以$S(x)$的最小值为$2\sqrt{3}$，此时$x=\frac{\pi}{6}$. ……………………………10 分

18.【命题意图】本小题主要考查随机变量的分布列与期望、条件概率与全概率公式等知识；考查数学建模能力、运算求解能力、逻辑思维能力；考查统计与概率思想、分类与整合思想；导向对发展逻辑推理、数学运算、数学建模、数学抽象、数据分析等核心素养的关注；体现综合性和应用性，满分 12 分.

【解答】设A_i="第i天去 A 餐厅用餐"（i=1,2），B_j="第j天去 B 餐厅用餐"（j=1,2），……………………………1 分

则A_1与B_1对立，A_2与B_2对立.

（1）依题意得，X=0,1,2. ……………………………2 分

$P(X=0)=P(B_1B_2)=P(B_1)P(B_2\mid B_1)=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times(1-\frac{3}{4})=\frac{1}{6}$，……………………………3 分

$P(X=1)=P(A_1B_2\cup B_1A_2)=P(A_1B_2)+P(B_1A_2)=P(A_1)P(B_2\mid A_1)+P(B_1)P(A_2\mid B_1)$，

所以$P(X=1)=\frac{1}{3}\times(1-\frac{3}{5})+\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{4}=\frac{19}{30}$，……………………………4 分

$P(X=2)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$，……………………………5 分

则X的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{19}{30}$	$\frac{1}{5}$

所以$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{19}{30}+2\times\frac{1}{5}=\frac{31}{30}$. ……………………………6 分

（2）由全概率公式，得$P(B_2)=P(A_1)P(B_2\mid A_1)+P(B_1)P(B_2\mid B_1)$

$=\frac{1}{3}\times(1-\frac{3}{5})+\frac{2}{3}\times(1-\frac{3}{4})=\frac{3}{10}$，……………………………8 分

所以 $P(A_1|B_2)=\dfrac{P(A_1B_2)}{P(B_2)}=\dfrac{P(A_1)P(B_2|A_1)}{P(B_2)}=\dfrac{\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)}{\frac{3}{10}}=\dfrac{4}{9}$，…………………………9 分

所以 $P(B_1|B_2)=1-P(A_1|B_2)=1-\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9}$，…………………………10 分

所以 $P(A_1|B_2)<P(B_1|B_2)$，…………………………11 分

所以如果周同学第 2 天去 B 餐厅，那么第 1 天去 B 餐厅的可能性更大. …………12 分

解法二：（1）同解法一…………………………6 分

（2）$P(A_1B_2)=P(A_1)P(B_2\mid A_1)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{15}$，…………………………8 分

$P(B_1B_2)=P(B_2\mid B_1)P(B_1)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{6}$，…………………………9 分

所以 $P(A_1B_2)<P(B_1B_2)$，…………………………10 分

因为 $P(A_1\mid B_2)=\dfrac{P(A_1B_2)}{P(B_2)}$，$P(B_1\mid B_2)=\dfrac{P(B_1B_2)}{P(B_2)}$，

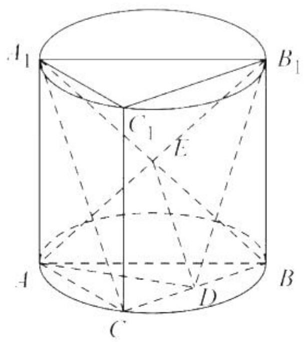
所以 $P(A_1\mid B_2)<P(B_1\mid B_2)$，…………………………11 分

所以如果周同学第 2 天去 B 餐厅，那么第 1 天去 B 餐厅的可能性更大. …………12 分

19.【命题意图】本小题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系等基础知识；考查空间想象能力、逻辑思维能力、运算求解能力；考查化归与转化思想、函数与方程思想；涉及的核心素养有直观想象、逻辑推理、数学运算等，体现基础性、综合性. 满分 12 分.

【解答】

（1）设圆柱的高 $BB_1=h$，连接 A_1B 交 AB_1 于点 E，连接 DE，…………………………1 分



因为 A_1C//平面 AB_1D，平面 $A_1CB\cap$平面 $AB_1D=DE$，$A_1C\subset$平面 A_1CB，

所以 $A_1C//DE$，…………………………3 分

又因为 E 是 A_1B 的中点，所以 D 是 BC 中点. …………………………4 分

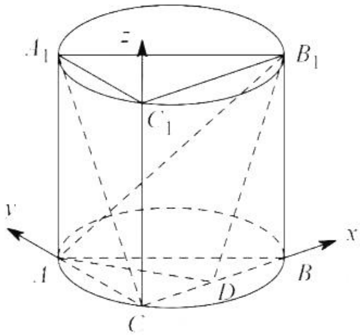
所以 $S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，

所以 $V_2=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=\dfrac{1}{3}\times 2S_{\triangle ABD}\cdot h=2V_1$. …………………………5 分

（2）如图，分别以 $\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CC_1}$ 为 x，y，z 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $C-xyz$，

则 $A(0,2,0)$，$B(4,0,0)$，$D(2,0,0)$，$B_1(4,0,h)$，

所以$\overrightarrow{AB_1}=(4,-2,h)$，$\overrightarrow{AD}=(2,-2,0)$，$\overrightarrow{CD}=(2,0,0)$．……………………………… 6 分



设平面AB_1D的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}4x_1-2y_1+hz_1=0,\\2x_1-2y_1=0.\end{cases}$ 取$z_1=-2$，得$\boldsymbol{m}=(h,h,-2)$，……………………………… 8 分

因为A_1C到平面AB_1D的距离即点C到平面AB_1D的距离，

所以$\dfrac{|\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{4}{3}$，即$\dfrac{2h}{\sqrt{h^2+h^2+4}}=\dfrac{4}{3}$，解得$h=4$，……………………………… 9 分

所以$\boldsymbol{m}=(4,4,-2)$，

因为$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,\sqrt{2})$，

所以$|\cos<\boldsymbol{m},\overrightarrow{CC_1}>|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CC_1}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{CC_1}|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{6\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{3}$，……………………………… 11 分

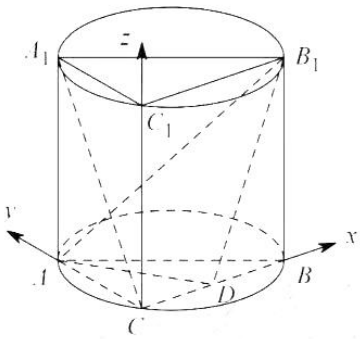
所以直线CC_1与平面AB_1D所成角的正弦值为$\dfrac{1}{3}$．……………………………… 12 分

解法二：（1）同解法一；……………………………… 5 分

（2）如图，分别以$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CC_1}$为x，y，z轴的正方向，建立空间直角坐标系$C-xyz$，

则$A(0,2,0)$，$B(4,0,0)$，$D(2,0,0)$，$B_1(4,0,h)$，

所以$\overrightarrow{AB_1}=(4,-2,h)$，$\overrightarrow{AD}=(2,-2,0)$，$\overrightarrow{CD}=(2,0,0)$．……………………………… 6 分



设平面AB_1D的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}4x_1-2y_1+hz_1=0,\\2x_1-2y_1=0.\end{cases}$ 取$z_1=-2$，得$\boldsymbol{m}=(h,h,-2)$，……………………………… 8 分

因为A_1C到平面AB_1D的距离即点C到平面AB_1D的距离，

所以$\frac{|\overrightarrow{CD}\cdot \boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=1$，即$\frac{2h}{\sqrt{h^2+h^2+4}}=\frac{4}{3}$，解得$h=4$，…………………………………9 分

因为$CC_1//BB_1$，

所以直线CC_1与平面AB_1D所成角与直线BB_1与平面所成角相等，设为θ. …………10 分

因为D是BC的中点，

所以点B到平面AB_1D的距离d与C到平面AB_1D的距离相等，即$d=\frac{4}{3}$.

所以$\sin\theta=\frac{d}{BB_1}=\frac{\frac{4}{3}}{4}=\frac{1}{3}$，

所以直线CC_1与平面AB_1D所成角的正弦值为$\frac{1}{3}$. ……………………………………12 分

20.【命题意图】本小题主要考查数列的通项、数列的单调性和最值、数列求和等基础知识；考查逻辑思维能力、运算求解能力；考查化归与转化思想、函数与方程思想等；导向对发展数学抽象、逻辑推理、数学运算等核心素养的关注；体现基础性、综合性和创新性，满分 12 分.

【解答】(1) 依题意，$b_1=0$，…………………………………………………………1 分

$b_{n+1}-b_n=2n-10$，…………………………………………………………………2 分

于是当$n\geqslant 2$时，

$$\begin{aligned}b_n-b_1&=\sum_{i=1}^{n-1}(b_{i+1}-b_i)\\&=\sum_{i=1}^{n-1}(2i-10)\\&=2+4+\cdots+(2n-2)-10(n-1)\\&=n^2-11n+10\end{aligned}$$
. …………………………………………………………………………5 分

即$b_n=n^2-11n+10$，

又$b_1=0$也符合上式，所以$b_n=n^2-11n+10$. ……………………………………6 分

(2) 由 (1) 可知$b_n=a_{n+1}-a_n=(n-1)(n-10)$，…………………………………7 分

当$2\leqslant n\leqslant 9$时，$b_n<0$，即$a_{n+1}<a_n$，

当$n\geqslant 11$时，$b_n>0$，即$a_{n+1}>a_n$，……………………………………………10 分

当$n=1$或10时，$b_n=0$，即$a_{n+1}=a_n$，………………………………………11 分

所以a_n取得最小值时$n=10$或11. ……………………………………………12 分

21.【命题意图】本小题主要考查双曲线的标准方程和简单几何性质，直线与双曲线的位置关系等基础知识；考查运算求解能力，逻辑思维能力，空间想象能力和创新能力等；考查数形结合思想，函数与方程思想，化归与转化思想；导向对发展直观想象，逻辑推理，

数学运算等核心素养的关注；体现综合性与创新性，满分 12 分.

【解答】（1）因为 $P(1,1)$ 在 C 的渐近线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 上，所以 $a=b$，…………1 分

因为 $A(a,0)$，所以 $\triangle PAO$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}a=\dfrac{1}{2}$，…………2 分

解得 $a=1$，所以 $b=1$，…………3 分

所以 C 的方程为 $x^2-y^2=1$.…………4 分

（2）当直线 l 的斜率不存在时，不符合题意，舍去；

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y-1=k(x-1)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases} y-1=k(x-1), \\ x^2-y^2=1, \end{cases}$ 得 $(1-k^2)x^2-2k(1-k)x-k^2+2k-2=0$，…………5 分

$\Delta=4k^2(1-k)^2-4(1-k^2)(-k^2+2k-2)=8-8k$，

由 $\begin{cases} 1-k^2\neq 0, \\ \Delta>0, \end{cases}$ 得 $k<1$ 且 $k\neq -1$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{2k}{1+k}$，$x_1x_2=\dfrac{k^2-2k+2}{k^2-1}$.…………6 分

直线 AM 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1-1}(x-1)$，

令 $x=x_2$，得 $G(x_2,\dfrac{y_1(x_2-1)}{x_1-1})$，…………7 分

因为 H 为 NG 的中点，所以 $H(x_2,\dfrac{\frac{y_1(x_2-1)}{x_1-1}+y_2}{2})$，

所以 $k_{AH}=\dfrac{\dfrac{\frac{y_1(x_2-1)}{x_1-1}+y_2}{2}}{x_2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y_1}{x_1-1}+\dfrac{y_2}{x_2-1}\right)$，…………8 分

因为 $\dfrac{y_1}{x_1-1}+\dfrac{y_2}{x_2-1}=\dfrac{k(x_1-1)+1}{x_1-1}+\dfrac{k(x_2-1)+1}{x_2-1}=2k+\dfrac{1}{x_1-1}+\dfrac{1}{x_2-1}$，…………9 分

又 $\dfrac{1}{x_1-1}+\dfrac{1}{x_2-1}=\dfrac{x_1+x_2-2}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}$ …………10 分

$$=\frac{\frac{2k}{1+k}-2}{\frac{k^2-2k+2}{k^2-1}-\frac{2k}{k+1}+1}$$

$=2-2k$，…………11 分

所以 $k_{AH}=1$，

所以直线 AH 的斜率为定值. …………12 分

22.【命题意图】本小题主要考查导数及其应用、函数的单调性、零点等基础知识；考查运算求解能力、逻辑思维能力、空间想象能力和创新能力等；考查数形结合思想、函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想；导向对发展数学抽象、直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养的关注；体现综合性与创新性，满分 12 分.

【解答】

解法一：（1）由 $f'(x)=(x-a)e^{x-1}, x<b$， ………………………………………………… 1 分

当 $a\geq b$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,b)$ 上单调递减；………………………………… 2 分

当 $a<b$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=a$，

故当 $x\in(-\infty,a)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递减；

当 $x\in(a,b)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增．………………………………… 4 分

综上所述，当 $a<b$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递减，在 (a,b) 上单调递增；当 $a\geq b$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,b)$ 上单调递减．

（2）设切点为 $Q(x_1,y_1)$，

因为 $y'=e^{x-1}$，所以切线的斜率为 e^{x_1-1}；

则切线方程为 $y-y_1=e^{x_1-1}(x-x_1)$，…………………………………………………………5 分

因为切线经过 $P(m,m)$，所以 $m-(e^{x_1-1}+1)=e^{x_1-1}(m-x_1)$，

即 $(x_1-m-1)e^{x_1-1}+m-1=0\quad(-1<x_1<3)$，

若过点 P 可以作两条直线与曲线 $y=e^{x-1}+1(-1<x<3)$ 相切，则上述关于 x_1 的方程至少有两个不等的实根．

令 $G(x)=(x-m-1)e^{x-1}+m-1$，$-1<x<3$，……………………………………………… 6 分

由（1）取 $b=3$ 可得，

当 $m\geq 3$ 时，$G(x)$ 在 $(-1,3)$ 上单调递减，

故 $G(x)$ 在 $(-1,3)$ 至多 1 个零点，不合题意，舍去；…………………………………………7 分

当 $-1<m<3$ 时，$G(x)$ 在 $(-1,m)$ 上单调递减；$G(x)$ 在 $(m,3)$ 上单调递增，

故 $G(x)$ 有最小值 $G(m)$，$G(m)=-e^{m-1}+m-1$，

以下证明 $G(m)<0$．

事实上，设 $h(x)=-e^{x-1}+x-1$，$-1<x<3$，

则 $h'(x)=-e^{x-1}+1$，

由 $h'(x)$ 单调递减，且 $h'(1)=0$，

所以当 $-1<x<1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

当 $1<x<3$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

所以 $h(x)\leq h(1)<0$，即 $G(m)<0$．

因此 $G(x)$ 存在两个零点，当且仅当 $\begin{cases}G(-1)>0,\\ G(3)>0.\end{cases}$

由 $\begin{cases}(-m-2)e^{-2}+m-1>0,\\ (2-m)e^{2}+m-1>0,\\ -1<m<3.\end{cases}$ 解得 $\dfrac{e^2+2}{e^2-1}<m<\dfrac{2e^2-1}{e^2-1}$，

此时过点 P 可以作两条直线与曲线 $y=e^{x-1}+1(-1<x<3)$ 相切；……………………… 9 分

当 $m\leq -1$ 时，$G(x)$ 在 $(-1,3)$ 上单调递增，故 $G(x)$ 在 $(-1,3)$ 至多 1 个零点，不合题意，舍去．

综上所述，m 的取值范围是 $\left[\frac{e^2+2}{e^2-1},\frac{2e^2-1}{e^2-1}\right]$．……………………………………10 分

（ii）m 的取值范围是 $\left[\frac{e^2+2}{e^2-1},\frac{2e^2-1}{e^2-1}\right]$．……………………………………12 分

解法二：（1）同解法一；……………………………………4 分

（2）设切点为 $Q(x_1,y_1)$，

因为 $y'=e^{x-1}$，所以切线的斜率为 e^{x_1-1}；

则切线方程为 $y-y_1=e^{x_1-1}(x-x_1)$，……………………………………5 分

因为切线经过 $P(m,m)$，所以 $m-(e^{x_1-1}+1)=e^{x_1-1}(m-x_1)$，

即 $(x_1-m-1)e^{x_1-1}+m-1=0\quad(-1<x_1<3)$，

若过点 P 可以作两条直线与曲线 $y=e^{x-1}+1(-1<x<3)$ 相切，则上述关于 x_1 的方程至少有两个不等的实根．

显然 $x_1=1$ 不是该方程的实根，所以关于 x 的方程 $m=\frac{e^{x-1}(1-x)+1}{1-e^{x-1}}$ 在 $(-1,1)\cup(1,3)$ 上至少有两个不等的实数根．……………………………………6 分

令 $G(x)=\frac{e^{x-1}(1-x)+1}{1-e^{x-1}},x\in[-1,1)\cup(1,3]$，

则 $G'(x)=\frac{e^{x-1}\left(e^{x-1}+1-x\right)}{\left(1-e^{x-1}\right)^2},x\in(-1,1)\cup(1,3)$，……………………………………7 分

令 $g(x)=e^{x-1}+1-x,x\in(-1,1)\cup(1,3)$，

而 $g'(x)=e^{x-1}-1,x\in(-1,1)\cup(1,3)$，

所以当 $x\in(-1,1)$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减，

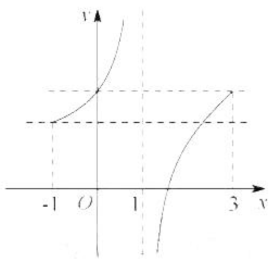
当 $x\in(1,3)$ 时，$g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $(1,3)$ 上单调递增，

所以 $g(x)>g(1)=0$，

所以当 $x\in(-1,1)\cup(1,3)$ 时，$G'(x)>0$，

所以 $G(x)$ 在 $(-1,1)$ 单调递增，在 $(1,3)$ 单调递增，……………………………………8 分

$G(x)$ 图象如下图所示：



因为 $G(0)=\frac{e+1}{e-1}$，$G(3)=\frac{2e^2-1}{e^2-1}$，$G(0)>G(3)$，

$G(-1)=\dfrac{e^2+2}{e^2-1}$，$G(2)=1$，$G(-1)>G(2)$，

所以当 $\dfrac{e^2+2}{e^2-1}<m<\dfrac{2e^2-1}{e^2-1}$ 时，关于 x 的方程 $m=\dfrac{e^{x-1}(1-x)+1}{1-e^{x-1}}$ 在 $(-1,1)\cup(1,3)$ 上有两个不等的实数根，

此时过点 P 可以作两条直线与曲线 $y=e^{x-1}+1(-1<x<3)$ 相切，

所以 m 的取值范围是 $\left(\dfrac{e^2+2}{e^2-1},\dfrac{2e^2-1}{e^2-1}\right)$. ……………………………………………………10 分

（ii）m 的取值范围是 $\left(\dfrac{e^2+2}{e^2-1},\dfrac{2e^2-1}{e^2-1}\right)$. ……………………………………………………12 分