炎德·英才大联考长郡中学2022届高三月考试卷(一)

数　学

得分：________

本试卷共8页。时量120分钟。满分150分。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，集合 $B=\{x|1\leqslant 2^x\leqslant 8\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{-1,1\}$　　B．$\{1,2\}$　　C．$\{0,1,2\}$　　D．$\{1,2,3\}$

★2．设复数 z 满足 $z=\dfrac{2i}{-1+i}$，则 $|z|=$

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

★3．对具有线性相关关系的变量 x,y，测得一组数据如下：

x	2	4	5	6	8
y	20	40	60	70	80

根据上表，利用最小二乘法得它们的回归直线方程为 $\hat{y}=10.5x+a$，据此模型预测当 $x=20$ 时，y 的估计值为

A．210.5　　B．211　　C．211.5　　D．212

4．过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 作斜率大于0的直线 l 交抛物线于 A，B 两点（A 在 B 的上方），且 l 与准线交于点 C，若 $\overrightarrow{CB}=4\overrightarrow{BF}$，则 $\dfrac{|AF|}{|BF|}=$

A．2　　B．3　　C．$\dfrac{5}{3}$　　D．$\dfrac{5}{2}$

5．公元前3世纪，古希腊欧几里得在《几何原本》里提出："球的体积（V）与它的直径（D）的立方成正比"，此即 $V=kD^3$，欧几里得未给出 k 的值．17世纪日本数学家们对求球的体积的方法还不了解，他们将体积公式 $V=kD^3$ 中的常数 k 称为"立圆率"或"玉积率"．类似地，对于等边圆柱（轴截面是正方形的圆柱）、正方体也可利用公式 $V=kD^3$ 求体积（在等边圆柱中，D 表示底面圆的直径；在正方体中，D 表示棱长）．假设运用此体积公式求得球（直径为 a）、等边圆柱（底面圆的直径为 a）、正方体（棱长为 a）的"玉积率"分别为 k_1、k_2、k_3，那么 $k_1:k_2:k_3=$

A．$\dfrac{\pi}{3}:\dfrac{\pi}{2}:2$　　B．$\dfrac{\pi}{6}:\dfrac{\pi}{4}:2$　　C．$\dfrac{\pi}{3}:\dfrac{\pi}{2}:1$　　D．$\dfrac{\pi}{6}:\dfrac{\pi}{4}:1$

6．已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $12\cos^2\alpha+7\sin 2\alpha-4=0$，若 $\tan(\alpha+\beta)=3$，则 $\tan\beta=$

A．$-\dfrac{1}{13}$或-7　　B．$-\dfrac{7}{11}$或1　　C．1　　D．$-\dfrac{1}{13}$

7. 某电视台的夏日水上闯关节目一共有三关，第一关与第二关的过关率分别为$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$. 只有通过前一关才能进入下一关，每一关都有两次闯关机会，且通过每关相互独立. 一选手参加该节目，则该选手能进入第三关的概率为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{5}{6}$　　C. $\frac{8}{9}$　　D. $\frac{15}{16}$

★8. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1、F_2，过点 F_2 作倾斜角为 θ 的直线 l 交双曲线 C 的右支于 A、B 两点，其中点 A 在第一象限，若$|AB|=|AF_1|$，且双曲线 C 的离心率为 2，则 $\cos\theta=$

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9. 已知函数 $f(x)=3\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$，则下列关于 $f(x)$的说法正确的是

A. 最大值为 4　　B. 在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{12}\right)$上单调递减

C. $\left(\frac{\pi}{6},1\right)$是它的一个对称中心　　D. $x=-\frac{\pi}{6}$是它的一条对称轴

10. 已知不等式 $x^2+ax+b>0(a>0)$的解集是$\{x|x\neq d\}$，则下列四个结论中正确的是

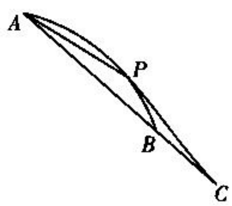
A. $a^2=4b$

B. $a^2+\frac{1}{b}\geqslant 4$

C. 若不等式 $x^2+ax-b<0$ 的解集为(x_1,x_2)，则 $x_1x_2>0$

D. 若不等式 $x^2+ax+b<c$ 的解集为(x_1,x_2)，且$|x_1-x_2|=4$，则 $c=4$

11. 如图，已知 P 是半径为 2，圆心角为$\frac{\pi}{3}$的一段圆弧 AB 上的一点，若$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}$，则$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$的值可以是
(参考数据 $\sqrt{13}\approx 3.606$)



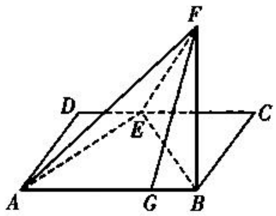
A. -2

B. -1

C. 0

D. 1

12. 如图所示，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=1$，E 为 CD 上一动点，现将$\triangle BEC$ 沿 BE 折起至$\triangle BEF$，在平面 FBA 内作 $FG\perp AB$，G 为垂足. 设 $CE=s$，$BG=t$，则下列说法正确的是



A. 若 $BF\perp$平面 AEF,则 $t=\frac{1}{2}$

B. 若 $AF\perp$平面 BEF,则 $s=\frac{2}{3}$

C. 若平面 $BEF\perp$平面 $ABED$,且 $s=1$,则 $t=\frac{1}{2}$

D. 若平面 $AFB\perp$平面 $ABED$,且 $s=\frac{3}{2}$,则 $t=\frac{3}{4}$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 若 $f(x)=\ln(e^x+1)+kx$ 是偶函数,则 $k=$________.

14. 已知直线 $l:mx+y-3=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 交于 A,B 两点,过 A,B 分别做 l 的垂线与 x 轴交于 C,D 两点,若 $AB=4$,则 $CD=$________.

15. 设函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}-ax$,若曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线经过点 $(2,-1)$. 则实数 a 的值为________;$f(x)$在$\left[\frac{1}{e},e\right]$(e 为自然对数的底数,e=2.71828…)上的最小值为________.

16. 在数列$\{a_n\}$中,对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,$a_n=k$,当且仅当 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$,$k\in\mathbf{N}$,若满足 $a_m+a_{2m}+a_{4m}+a_{8m}+a_{16m}\geqslant 52$,则 m 的最小值为________.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(本小题满分 10 分)

在$\triangle ABC$ 中内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 已知 $a=2,b=\sqrt{7}$,面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{2}a c\cos B$,求 $\cos C$ 的值.

★18.(本小题满分 12 分)

已知数列$\{a_n\}$满足:$a_{n+1}-2a_n=0$,$a_3=8$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设$b_n=\frac{n}{a_n}$,数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n,若$2T_n>m-2021$对$n\in\mathbf{N}^*$恒成立,求正整数m的最大值.

19.(本小题满分 12 分)

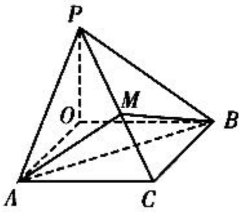
设甲、乙两位同学在高中三年级上学期间,甲同学每天 6:30 之前到校的概率均为$\frac{2}{3}$,乙同学每天 6:30 之前到校的概率均为$\frac{3}{4}$,假定甲、乙两位同学到校情况互不影响,且任一同学每天到校情况相互独立.

(1)设A为事件“上学期间的五天中,甲同学在 6:30 之前到校的天数为 3 天”,B为事件“上学期间的五天中,甲同学有且只有一次连续两天在 6:30 之前到校”,求在事件A发生的条件下,事件B发生的概率;

(2)甲、乙同学组成了学习互助小组后,若某天至少有一位同学在 6:30 之后到校,则之后的一天甲、乙同学必然同时在 6:30 之前到校,在上学期间的五天,随机变量Y表示甲、乙同学同时在 6:30 之前到校的天数,求Y的分布列与数学期望.

20.（本小题满分 12 分）

如图，在$\triangle ABC$中，$AC=BC=2$，$\angle ACB=120^\circ$，O为$\triangle ABC$的外心，$PO\perp$平面ABC，且$PO=\sqrt{6}$.



(1)求证：$BO/\!/$平面PAC；

(2)设平面$PAO\cap$平面$PBC=l$，若点M在线段PC上运动，且$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}$，当直线$l$与平面$ABM$所成角取最大值时，求$\lambda$的值.

21.（本小题满分 12 分）

设椭圆C：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$长轴的左、右顶点分别为$A$，$B$.

(1)若P、Q是椭圆上关于x轴对称的两点，直线AP，BQ的斜率分别为k_1，k_2($k_1k_2\neq 0$)．求$|k_1|+|k_2|$的最小值；

(2)已知过点$D(0,-3)$的直线l交椭圆C于M、N两个不同的点，直线AM、AN分别交y轴于点S、T，记$\overrightarrow{DS}=\lambda\overrightarrow{DO}$，$\overrightarrow{DT}=\mu\overrightarrow{DO}$($O$为坐标原点)，当直线$l$的倾斜角$\theta$为锐角时，求$\lambda+\mu$的取值范围.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}+\dfrac{1}{2}x^2-2x$(e=2.71828…是自然对数的底数).

(1)设$x\in[0,4]$，求$f(x)$的最小值；

(2)讨论关于x的方程$\left[f(x)-\dfrac{1}{2}x^2+2x\right]\dfrac{1}{xe^x}+a=|\ln x|$($a\in\mathbf{R}$)的根的个数.

炎德·英才大联考长郡中学2022届高三月考试卷(一)

数学参考答案

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	C	C	D	D	B	A

1. C 【解析】由函数 $y=2^x$ 单调递增，不等式 $2^0\leqslant 2^x\leqslant 2^3$ 解得 $0\leqslant x\leqslant 3$，即集合 $B=\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$，则 $A\cap B=\{0,1,2\}$. 故选C.

2. B 【解析】因为 $z=\frac{2i}{-1+i}=\frac{2i(i+1)}{(i-1)(i+1)}=1-i$，

所以 $|z|=\sqrt{2}$.

故选B.

3. C 【解析】因 $\bar{x}=\frac{2+4+5+6+8}{5}=5$，$\bar{y}=\frac{20+40+60+70+80}{5}=54$，故将 $\bar{x}=5$，$\bar{y}=54$ 代入 $y=10.5x+a$ 可得 $a=54-52.5=1.5$，则 $\hat{y}=10.5x+1.5$，当 $x=20$ 时，$y=10.5\times20+1.5=211.5$，应选答案C.

4. C 【解析】分别过 A，B 作准线的垂线，垂足分别为 A_1，B_1，设 $|BF|=x$，$|AF|=y$，

则 $\frac{|BB_1|}{BC}=\frac{|BF|}{|BC|}=\frac{|AA_1|}{|AC|}$，∴ $\frac{y}{y+x+4x}=\frac{1}{4}$，∴ $\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{y}{x}=\frac{5}{3}$，故选C.

5. D 【解析】由题意得，球的体积为 $V_1=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3=\frac{\pi}{6}a^3\Rightarrow k_1=\frac{\pi}{6}$；

等边圆柱的体积为 $V_2=\pi R^2a=\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2a=\frac{\pi}{4}a^3\Rightarrow k_2=\frac{\pi}{4}$；

正方体的体积 $V_3=a^3\Rightarrow k_3=1$，所以 $k_1:k_2:k_3=\frac{\pi}{6}:\frac{\pi}{4}:1$. 故选D.

6. D 【解析】由 $12\cos^2\alpha+7\sin2\alpha-4=0$，得 $4\cos^2\alpha+7\sin\alpha\cos\alpha-2\sin^2\alpha=0$，

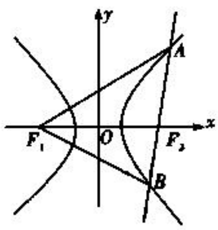
所以 $2\tan^2\alpha-7\tan\alpha-4=0$，求得 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$(舍)，$\tan\alpha=4$.

又∵ $\tan\beta=\tan(\alpha+\beta-\alpha)=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}=\frac{3-\tan\alpha}{1+3\tan\alpha}$，

将 $\tan\alpha=4$ 的值代入上式可得：$\tan\beta=-\frac{1}{13}$. 故选D.

7. B 【解析】该选手闯过第一关的概率为 $P_1=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$，闯过第二关的概率为 $P_2=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{15}{16}$，所以该选手能进入第三关的概率为 $P=\frac{8}{9}\times\frac{15}{16}=\frac{5}{6}$. 故选B.

8. A 【解析】由双曲线的定义知，



$|AF_1|-|AF_2|=2a$，∵ $|AB|=|AF_1|$，

∴ $|AF_2|+|BF_2|=|AF_1|$，

即 $|AF_1|-|AF_2|=|BF_2|=2a$，

∴ $|BF_1|=|BF_2|+2a=4a$，

在 $\triangle BF_1F_2$ 中，由余弦定理知，

$\cos\theta=\frac{|BF_2|^2+|F_1F_2|^2-|BF_1|^2}{2|BF_2|\cdot|F_1F_2|}$，

$\therefore \cos\theta=\dfrac{4a^2+4c^2-16a^2}{2\cdot 2a\cdot 2c}=\dfrac{c^2-3a^2}{2ac}$,

$\because e=\dfrac{c}{a}=2$, $\therefore \cos\theta=\dfrac{4-3}{4}=\dfrac{1}{4}$,故选 A.

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 2 分.

题　号	9	10	11	12
答　案	AD	ABD	ABC	AC

9. AD 【解析】由 $f(x)=3\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+1$,$\therefore f(x)$ 的最大值为 4,所以 A 正确;

因为当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{12}\right)$时,$2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left(\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right)$,$f(x)$不是单调函数,所以 B 错误;

因为$\left(\dfrac{\pi}{6},1\right)$不在 $y=f(x)$图象上,所以不是其对称中心,所以 C 错误;

因为 $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=4$ 为函数的最大值,所以 $x=-\dfrac{\pi}{6}$是对称轴,所以 D 正确,故选 AD.

10. ABD 【解析】由题意,$\Delta=a^2-4b=0$,$\therefore b=\dfrac{a^2}{4}$. 所以 A 正确;

对于 B:$a^2+\dfrac{1}{b}=a^2+\dfrac{4}{a^2}\geqslant 2\sqrt{a^2\cdot\dfrac{4}{a^2}}=4$,等号当且仅当 $a^2=\dfrac{4}{a^2}$,即 $a=\sqrt{2}$时成立,

所以 B 正确;

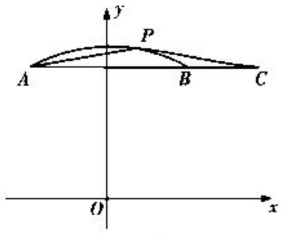
对于 C:由韦达定理,知 $x_1x_2=-b=-\dfrac{a^2}{4}<0$,所以 C 错误;

对于 D:由韦达定理,知 $x_1+x_2=-a$,$x_1x_2=b-c=\dfrac{a^2}{4}-c$,

则 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{a^2-4\left(\dfrac{a^2}{4}-c\right)}=2\sqrt{c}=4$,解得 $c=4$,所以 D 正确;

故选 ABD.

11. ABC 【解析】以圆心为原点,平行 AB 的直线为 x 轴,AB 的垂直平分线为 y 轴,建立平面直角坐标系,



则 $A(-1,\sqrt{3})$,$C(2,\sqrt{3})$,设 $P(2\cos\theta,2\sin\theta)$,$\dfrac{\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{2\pi}{3}$,

则$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}=(2-2\cos\theta,\sqrt{3}-2\sin\theta)\cdot(-1-2\cos\theta,\sqrt{3}-2\sin\theta)=5-2\cos\theta-4\sqrt{3}\sin\theta=5-2\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)$,且 $0<\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{6}<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,$\therefore 0<\alpha<\dfrac{\pi}{6}$,$\therefore \dfrac{\pi}{3}<\theta+\alpha<\dfrac{5\pi}{6}$,

$\because y=\sin(\theta+\alpha)$在$\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$上递增,在$\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6}\right)$上递减,

$\therefore$当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ 时,$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$的最小值为 $5-2\sqrt{13}$,

当 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$时,$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$的最大值为 $5-2\cos\dfrac{2\pi}{3}-4\sqrt{3}\sin\dfrac{2\pi}{3}=0$,

则$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}\in[5-2\sqrt{13},0]$,所以 ABC 正确,D 错误. 故选 ABC.

12. AC 【解析】对于 A，若 $BF\perp$ 平面 AEF，则 $BF\perp AF$，

在 Rt$\triangle BGF$ 中，$AB=2$，$BF=BC=1$，则 $AF=\sqrt{3}$，$\angle ABF=60°$，

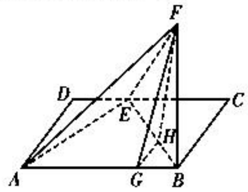
FG 是三角形的高，则 $t=BG=BF\cos 60°=\frac{1}{2}$，所以 A 正确；

对于 B，若 $AF\perp$ 平面 BEF，则有 $AF\perp BF$，$AF\perp EF$，

则 $AF=\sqrt{3}$，在 Rt$\triangle AEF$ 中，$AF^2+EF^2=AE^2=AD^2+DE^2$，

即 $(\sqrt{3})^2+s^2=(2-s)^2+1^2$，解得 $s=\frac{1}{2}$，所以 B 错误；

对于 C，若平面 $BEF\perp$ 平面 $ABED$，作 $FH\perp BE$，垂足为 H，



因为平面 $BEF\cap$ 平面 $ABED=BE$，所以 $FH\perp$ 平面 $ABED$，从而 $FH\perp AB$，

又 $AB\perp FG$，所以 $AB\perp$ 平面 FHG，从而 $AB\perp HG$，

因为 $s=1$，所以在等腰直角三角形 FEB 中，$BH=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以在等腰直角三角形 BGH 中，$t=BG=\frac{1}{2}$，所以 C 正确；

对于 D，若平面 $AFB\perp$ 平面 $ABED$，平面 $AFB\cap$ 平面 $ABED=AB$，

又 $AB\perp FG$，故 $FG\perp$ 平面 $ABED$，

所以 $FG\perp BE$，作 $FH\perp BE$，垂足为 H，

从而有 $BE\perp$ 平面 FGH，从而 $BE\perp HG$，从而有 C,H,G 三点共线，

则 $\angle CGB+\angle GCB=90°$，又 $\angle EBC+\angle GCB=90°$，

故 $\angle CGB=\angle EBC$，又 $\angle GBC=\angle BCE=90°$，

所以 Rt$\triangle CBG\sim$Rt$\triangle ECB$，故 $\frac{BG}{CB}=\frac{CB}{EC}$，

因为 $CB=1$，$s=EC=\frac{3}{2}$，所以 $t=BG=\frac{2}{3}$，所以 D 错误；故选 AC.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $-\frac{1}{2}$ 【解析】$\because f(x)$ 是偶函数，$\therefore f(-1)=f(1)$，$\therefore \ln\left(\frac{1}{e}+1\right)-k=\ln(e+1)+k$，

$k=-\frac{1}{2}$，经检验 $k=-\frac{1}{2}$ 符合题意，故答案为 $-\frac{1}{2}$.

14. $4\sqrt{2}$ 【解析】圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$，圆心 $(1,2)$，半径 $r=2$，

$\because AB=4$，$\therefore$ 直线 $l:mx+y-3=0$ 过圆心 $(1,2)$，

$\therefore m+2-3=0$，$\therefore m=1$，$\therefore$ 直线 $l:x+y-3=0$，倾斜角为 $135°$，

$\because$ 过 A,B 分别做 l 的垂线与 x 轴交于 C,D 两点，$\therefore CD=\frac{AB}{\sin 45°}=\frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4\sqrt{2}$.

15. 1 $-e-\frac{1}{e}$ 【解析】函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}-ax$，则 $f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1-\ln x-ax^2}{x^2}$.

由题设 $f'(1)=\frac{f(1)-(-1)}{1-2}$，解得 $a=1$.

从而 $f'(x)=\frac{(1-x^2)-\ln x}{x^2}$. 当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，$x>1$ 时，$f'(x)<0$.

可知 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e},1\right]$ 上单调递增,在 $[1,e]$ 上单调递减. 又 $f(e)=\frac{1}{e}-e>f\left(\frac{1}{e}\right)=-e-\frac{1}{e}$,所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e},e\right]$ 上的最小值为 $f\left(\frac{1}{e}\right)=-e-\frac{1}{e}$.

16. 512 【解析】不妨设 $2^k\leqslant m<2^{k+1}$, $k\in\mathbf{N}$, $m\in\mathbf{N}^*$, 由题意可得, $a_m=k$,

因为 $2^{k+1}\leqslant 2m<2^{k+2}$, $k\in\mathbf{N}$, 所以 $a_{2m}=k+1$,

同理可得, $a_{4m}=k+2$, $a_{8m}=k+3$, $a_{16m}=k+4$, …

所以 $a_m+a_{2m}+a_{4m}+a_{8m}+a_{16m}=k+(k+1)+(k+2)+(k+3)+(k+4)=5k+10$,

因为 $a_m+a_{2m}+a_{4m}+a_{8m}+a_{16m}\geqslant 52$, 所以 $5k+10\geqslant 52$, 解得 $k\geqslant\frac{42}{5}$, 又 $k\in\mathbf{N}$,

所以 k 的最小值整数解为 9, 故 m 的最小值为 $2^9=512$. 故答案为: 512.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】由三角形面积公式得 $\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}ac\cos B$, 则 $\tan B=\sqrt{3}$,

$\because B\in(0,\pi)$, $\therefore B=60°$. …………………………………… 4 分

(法一)由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 得, $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$,

又由 $a=2<b=\sqrt{7}$ 得 $A<B$, 所以 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$, …………………………………… 8 分

所以 $\cos C=-\cos(A+B)=-\cos A\cos B+\sin A\sin B$

$=-\frac{2\sqrt{7}}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{21}}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{14}$. …………………………………… 10 分

(法二)由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=2^2+c^2-2\cdot 2c\cdot\cos 60°=(\sqrt{7})^2$,

即 $c^2-2c-3=0$, 解得 $c=-1$(舍)或 $c=3$, …………………………………… 8 分

由余弦定理得 $\cos C=\frac{4+7-9}{2\times 2\times\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{14}$. …………………………………… 10 分

18.【解析】(1)因为数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+1}-2a_n=0$, $a_3=8$,

所以 $a_{n+1}=2a_n$, 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q, 可得 $q=2$, …………………………………… 3 分

又 $a_3=8$, 即 $4a_1=8$, 解得 $a_1=2$, …………………………………… 4 分

所以 $a_n=2^n$; …………………………………… 5 分

(2) $b_n=\frac{n}{a_n}=\frac{n}{2^n}$, …………………………………… 6 分

$T_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$,

$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^{n+1}}$, …………………………………… 7 分

上面两式相减可得 $\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$

$=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}$, …………………………………… 8 分

化简可得 $T_n=2-\frac{n+2}{2^n}$, …………………………………… 9 分

因为 $T_{n+1}-T_n=2-\frac{n+3}{2^{n+1}}-2+\frac{2+n}{2^n}=\frac{n+1}{2^{n+1}}>0$, …………………………………… 10 分

所以$\{T_n\}$递增，T_1最小，且为$\frac{1}{2}$，所以$2\times\frac{1}{2}>m-2021$，………… 11分

解得$m<2022$，则m的最大值为2021. ………… 12分

19.【解析】(1)事件AB包含6种情况：甲同学第1、2、4天6:30之前到校；甲同学第1、2、5天6:30之前到校；甲同学第2、3、5天6:30之前到校；甲同学第1、3、4天6:30之前到校；甲同学第1、4、5天6:30之前到校；甲同学第2、4、5天6:30之前到校. 故$P(AB)=6\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{16}{81}$，又$P(A)=C_5^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{80}{243}$，

所以$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{3}{5}$. ………… 5分

(2)随机变量Y的所有可能取值为2、3、4、5.

则$P(Y=2)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，$P(Y=3)=3\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{9}{16}$，

$P(Y=4)=4\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{9}{32}$，$P(Y=5)=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$，………… 10分

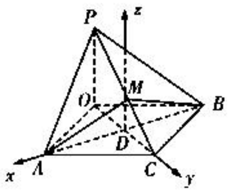
则随机变量Y的分布列为：

Y	2	3	4	5
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{1}{32}$

………… 11分

则$E(Y)=2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{9}{16}+4\times\frac{9}{32}+5\times\frac{1}{32}=\frac{103}{32}$. ………… 12分

20.【解析】(1)如图，连接OC，交AB于点D，O为$\triangle ABC$的外心，



$AC=BC=2$，$OA=OB=OC$，所以$\triangle OAC\cong\triangle OBC$，

所以$\angle ACO=\angle BCO=\frac{1}{2}\angle ACB=60°$.

故$\triangle OAC$和$\triangle OBC$都为等边三角形，………… 3分

即四边形$OACB$为菱形，所以$OB/\!/AC$.

又$AC\subset$平面PAC，$OB\not\subset$平面PAC，所以$BO/\!/$平面PAC. ………… 5分

(2)由(1)同理可知因为$BC/\!/$平面POA，$BC\subset$平面PBC，平面$PAO\cap$平面$PBC=l$，

所以$BC/\!/l$. ………… 6分

如图所示：以点D为原点，DA，DC，垂直平面ABC的直线分别为x，y，z轴建立空间直角坐标系. 则$A(\sqrt{3},0,0)$，$B(-\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，$P(0,-1,\sqrt{6})$，$\overrightarrow{BC}=(\sqrt{3},1,0)$.

设$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}$，所以$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PM}=(\sqrt{3},2\lambda-1,\sqrt{6}(1-\lambda))$，$\overrightarrow{BA}=(2\sqrt{3},0,0)$.

设平面ABM的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.

$\begin{cases}\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}=2\sqrt{3}x=0,\\ \overrightarrow{BM}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{3}x+(2\lambda-1)y+\sqrt{6}(1-\lambda)z=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=0\\ (2\lambda-1)y+\sqrt{6}(1-\lambda)z=0\end{cases}$

令$y=\sqrt{6}$，得$\boldsymbol{n}=\left(0,\sqrt{6},\frac{2\lambda-1}{\lambda-1}\right)$. ………… 9分

所以直线l与平面ABM所成角α的正弦值为：$\sin\alpha=\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{BC}\rangle=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\sqrt{6+\left(2-\frac{1}{1-\lambda}\right)^2}}\leqslant\frac{1}{2}$，

………… 11分

即当$\lambda=\frac{1}{2}$，即点M是线段PC的中点时，直线l与平面ABM所成角取最大值. ………… 12分

21.【解析】(1)设点 $P(x_0,y_0)$,由椭圆的对称性知 $Q(x_0,-y_0)$,不妨令 $y_0>0$,

由已知 $A(-3,0)$,$B(3,0)$,则 $k_1=\dfrac{y_0}{x_0+3}$,$k_2=\dfrac{-y_0}{x_0-3}$,显然有 $-3<x_0<3$, ………… 2分

则 $|k_1|+|k_2|=\dfrac{y_0}{3+x_0}+\dfrac{y_0}{3-x_0}=\dfrac{6y_0}{9-x_0^2}$,

$\dfrac{x_0^2}{9}+\dfrac{y_0^2}{5}=1\Rightarrow 9-x_0^2=\dfrac{9y_0^2}{5}$,则 $|k_1|+|k_2|=\dfrac{10}{3y_0}$, ………… 4分

因 $0<y_0\leqslant\sqrt{5}$,所以 $|k_1|+|k_2|=\dfrac{10}{3y_0}\geqslant\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$,

当且仅当 $y_0=\sqrt{5}$ 时等号成立,即 $|k_1|+|k_2|$ 的最小值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. ………… 5分

(2)当直线 l 的倾斜角 θ 为锐角时,设 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$,设直线 l:$y=kx-3$,$(k>0)$,

由 $\begin{cases}y=kx-3\\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1\end{cases}$ 得 $(5+9k^2)x^2-54kx+36=0$,

从而 $\Delta=(54k)^2-4\times36\times(5+9k^2)>0$,又 $k>0$,得 $k>\dfrac{2}{3}$,

所以 $x_1+x_2=\dfrac{54k}{9k^2+5}$,$x_1x_2=\dfrac{36}{9k^2+5}$, ………… 6分

又直线 AM 的方程是:$y=\dfrac{y_1}{x_1+3}(x+3)$,令 $x=0$,解得 $y=\dfrac{3y_1}{x_1+3}$,所以点 S 为 $\left(0,\dfrac{3y_1}{x_1+3}\right)$;

直线 AN 的方程是:$y=\dfrac{y_2}{x_2+3}(x+3)$,同理点 T 为 $\left(0,\dfrac{3y_2}{x_2+3}\right)$,

所以 $\overrightarrow{DS}=\left(0,\dfrac{3y_1}{x_1+3}+3\right)$,$\overrightarrow{DT}=\left(0,\dfrac{3y_2}{x_2+3}+3\right)$,$\overrightarrow{DO}=(0,3)$,

因为 $\overrightarrow{DS}=\lambda\overrightarrow{DO}$,$\overrightarrow{DT}=\mu\overrightarrow{DO}$,所以 $\dfrac{3y_1}{x_1+3}+3=3\lambda$,$\dfrac{3y_2}{x_2+3}+3=3\mu$, ………… 8分

所以 $\lambda+\mu=\dfrac{y_1}{x_1+3}+\dfrac{y_2}{x_2+3}+2=\dfrac{kx_1-3}{x_1+3}+\dfrac{kx_2-3}{x_2+3}+2=\dfrac{2kx_1x_2+3(k-1)(x_1+x_2)-18}{x_1x_2+3(x_1+x_2)+9}+2$,

$$=\frac{2k\cdot\dfrac{36}{9k^2+5}+3(k-1)\left(\dfrac{54k}{9k^2+5}\right)-18}{\dfrac{36}{9k^2+5}+3\times\left(\dfrac{54k}{9k^2+5}\right)+9}+2=-\frac{10}{9}\times\frac{k+1}{k^2+2k+1}+2$$

$=-\dfrac{10}{9}\times\dfrac{(k+1)}{(k+1)^2}+2=-\dfrac{10}{9}\times\dfrac{1}{k+1}+2$. ………… 11分

$\because k>\dfrac{2}{3}$,$\therefore \lambda+\mu\in\left(\dfrac{4}{3},2\right)$,

综上,所以 $\lambda+\mu$ 的范围是 $\left(\dfrac{4}{3},2\right)$. ………… 12分

22.【解析】(1)由题意可求得 $f'(x)=\dfrac{2x-x^2}{e^x}+x-2=\dfrac{(x-2)(e^x-x)}{e^x}$, ………… 1分

因为 $e^x\geqslant x+1>x$,$x\in[0,4]$,当 $x\in(0,2)$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减,

当 $x\in(2,4)$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $(2,4)$ 上单调递增, ………… 3分

所以 $x\in[0,4]$ 时,$f(x)$ 的最小值为 $f(2)=\dfrac{4}{e^2}-2$. ………… 4分

(2)设 $h(x)=|\ln x|-\left[f(x)-\dfrac{1}{2}x^2+2x\right]\dfrac{1}{xe^x}-a=|\ln x|-\dfrac{x}{e^{2x}}-a$,$x\in(0,+\infty)$,

令 $y=\frac{x}{e^{2x}}$，则 $y'=\frac{1-2x}{e^{2x}}$，

所以 $y=\frac{x}{e^{2x}}$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上递增，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上递减. ………………………………………… 5 分

（ⅰ）当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\ln x>0$，则 $h(x)=\ln x-\frac{x}{e^{2x}}-a$，

所以 $h'(x)=e^{-2x}\left(\frac{e^{2x}}{x}+2x-1\right)$. 因为 $2x-1>0$，$\frac{e^{2x}}{x}>0$，所以 $h'(x)>0$，

因此 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ………………………………………………………… 7 分

（ⅱ）当 $x\in(0,1)$ 时，$\ln x<0$，则 $h(x)=-\ln x-\frac{x}{e^{2x}}-a$，则 $h'(x)=e^{-2x}\left(-\frac{e^{2x}}{x}+2x-1\right)$.

因为 $e^{2x}\in(1,e^2)$，$e^{2x}>1$，$0<x<1$，$\therefore\frac{e^{2x}}{x}>1$，即 $-\frac{e^{2x}}{x}<-1$，又 $2x-1<1$，

所以 $h'(x)=e^{-2x}\left(-\frac{e^{2x}}{x}+2x-1\right)<0$，因此 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

综合（ⅰ）（ⅱ）可知，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h(x)\geqslant h(1)=-\frac{1}{e^2}-a$， ………………………………… 5 分

当 $h(1)=-e^{-2}-a>0$，即 $a<-\frac{1}{e^2}$ 时，$h(x)$ 没有零点，故关于 x 的方程根的个数为 0，

当 $h(1)=-e^{-2}-a=0$，即 $a=-\frac{1}{e^2}$ 时，$h(x)$ 只有一个零点，

故关于 x 的方程根个数为 1，………………………………………………………………… 7 分

当 $h(1)=-e^{-2}-a<0$，即 $a>-\frac{1}{e^2}$ 时，①当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)=\ln x-\frac{x}{e^{2x}}-a>\ln x-\left(\frac{1}{e^2}+a\right)>\ln x-1-a$，

要使 $h(x)>0$，可令 $\ln x-1-a>0$，即 $x\in(e^{1+a},+\infty)$； ……………………………………… 9 分

②当 $x\in(0,1)$ 时，$h(x)=-\ln x-\frac{x}{e^{2x}}-a\geqslant-\ln x-\left(\frac{1}{2}e^{-1}+a\right)>-\ln x-1-a$，

要使 $h(x)>0$，可令 $-\ln x-1-a>0$，即 $x\in(0,e^{-1-a})$，所以当 $a>-\frac{1}{e^2}$ 时，$h(x)$ 有两个零点，故关于 x 的方程根的个数为 2， ……………………………………………………………… 11 分

综上所述：当 $a<-\frac{1}{e^2}$ 时，关于 x 的方程根的个数为 0，当 $a=-\frac{1}{e^2}$ 时，关于 x 的方程根的个数为 1，当 $a>-\frac{1}{e^2}$ 时，关于 x 的方程根的个数为 2. ……………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。